УДК 629.7.05

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИГРИНВИЧСКИХ И КВАЗИГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НАВИГАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛЯРНЫХ ЗОНАХ

Андрей Андреевич ГОЛОВАН, *д. ф.-м. н.*
МГУ им. М. В. Ломоносова,
Александр Владимирович ФОМИЧЕВ, *к. ф.-м. н., доцент*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru,
София Павловна АБЛЯСОВА
МГУ им. М. В. Ломоносова

Рассматривается вариант решения известной проблемы плохой обусловленности части навигационных параметров в полярных зонах за счет перехода к квазигринвичским и квазигеографическим координатам. Приводятся простые алгебраические формулы перехода к новым координатам и выражения, пригодные для решения задач автономной навигации и коррекции инерциальной навигационной системы (ИНС) по глобальной спутниковой навигационной системе (ГНСС) в полярных зонах, мало загружающие бортовой вычислитель.

Ключевые слова: *инерциальная навигационная система, плохая обусловленность навигационных параметров в полярных зонах, навигация в полярных зонах, коррекция ИНС в полярных зонах.*

THE USE OF QUASI-GREENWICH AND QUASI-GEOCENTRIC COORDINATES FOR NAVIGATION IN POLLAR REGIONS

Andrey A. GOLOVAN, *D. Sc. in Phys. and Math*
Lomonosov Moscow State University,
Alexander V. FOMICHEV, *PhD in Phys. and Math.*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru,
Sofiya P. ABLYASOVA
Lomonosov Moscow State University

The article considers the solution to the well-known problem of ill-conditioning of some navigation parameters in polar regions due to transition to quasi-Greenwich and quasi-geographic coordinates. The article provides simple algebraic formulas for transition to new coordinates and equations for unaided navigation as well as for inertial navigation system (INS) aided by global navigation satellite system (GNSS) with little load on the flight computer during flights in polar regions.

Keywords: *inertial navigation system, ill-conditioning of navigation parameters in polar regions, navigation in polar regions, aided INS in polar regions.*

Введение

Известно, что навигационные параметры, связанные с направлением меридиана, такие, как географическая долгота, компоненты вектора скорости по восточной и северной осям, истинный курс и другие углы, отсчитываемые от касательной к текущему меридиану (например, путевой угол, магнитный курс и т. п.), плохо обусловлены в полярных зонах. Для краткости назовем их «величинами, связанными с меридианом».

Плохая обусловленность величин, связанных с меридианом, объясняется сходимостью меридианов у полюсов. На рис. 1 изображена ошибка долготы вблизи северного полюса из-за отличия вычисленного положения M' от фактического M. В линейном приближении поверхность Земли аппроксимируется касательной плоскостью в полюсе.

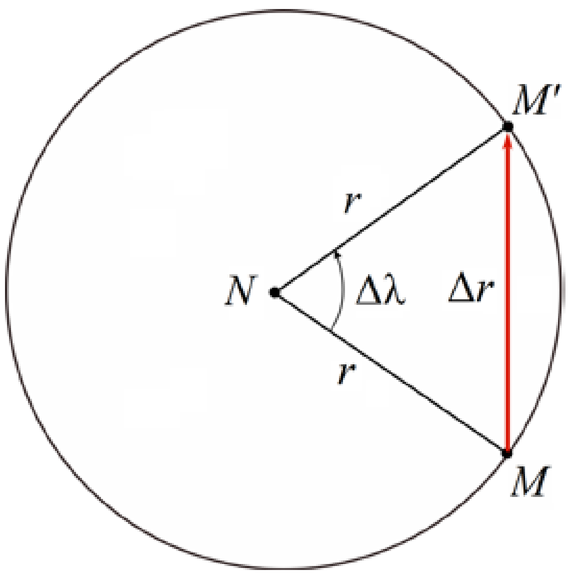

Рис. 1. Навигационная погрешность Δr в окрестности полюса N приводит к существенным ошибкам долготы $\Delta\lambda$ и направления местного меридиана: например, при $\Delta r = r = NM = NM' = 1$ км ошибка $\Delta\lambda = 60^\circ$

Поскольку истинное направление на полюс MN отличается от вычисленного $M'N$, то во все параметры, связанные с меридианом, войдет составляющая от угловой ошибки $\Delta\lambda$. Вблизи полюса $NM \simeq a\cos\varphi$, где a — экваториальный радиус Земли, $\varphi = \pi/2 - \delta$, $\delta \ll 1$ — географическая широта точки M, поэтому $\Delta\lambda \sim \Delta r/(a\cos\varphi) \simeq \Delta r/(a\delta)$. На полюсах $\delta \to 0$, и если позиционные ошибки навигационной системы соизмеримы с расстоянием до полюса, то ошибки величин, связанных с меридианом, соизмеримы со значениями самих величин.

Однако плохая обусловленность является лишь геометрической особенностью части параметров, выдаваемых ИНС, но не «внутренним» вырождением вычислительного процесса. Например, для азимутально свободной или полусвободной ориентации опорного трехгранника [1, 2] вычисления «внутри» инерциальной навигационной системы определены в любых точках Земли, причем техническая реализация системы, в том числе платформенная она или бесплатформенная, не существенно.

Для исключения плохо обусловленных параметров предлагается перейти к новым координатам и угловым параметрам опосредовано через переход к новой — квазигринвичской — системе координат, оси которой переставлены относительно стандартных гринвичских осей, а полюсы новой угловой координатной сетки за счет этого перенесены в точки пересечения экватора и нулевого меридиана. После переноса полюсов вводятся угловые — квазигеоцентрические — координаты, описывающие положение в окрестности полюсов, а углы ориентации объекта и компоненты вектора его скорости от нового — квазигеоцентрического — трехгранника. Подробности этого перехода приведены ниже.

Плохая обусловленность параметров, связанных с меридианом, вблизи полюсов препятствует и решению задач коррекции и комплексирования ИНС и ГНСС в этих параметрах. Однако «внутри» приемника ГНСС навигационная задача решается во всюду невырожденных гринвичских координатах, причем положение и скорость в гринвичских осях выдаются спутниковыми приемниками потребителю. В совокупности с навигационными параметрами ИНС, определенными у полюсов, это позволяет решать задачу коррекции вблизи полюсов и выдавать потребителю хорошо обусловленные корректируемые квазигеоцентрические координаты скорость и углы ориентации.

Квазигринвичские и квазигеоцентрические координаты. Вначале отметим, что приставка «квази» отличает вводимые новые параметры от «традиционных», что не совпадает с принятым в аналитической механике понятием квазикоординат [3], которое не относится к обсуждаемым здесь вопросам.

При выводе формул будем использовать идеальные значения параметров. Учет ошибок ИНС, как правило, сводится к замене точных величин в формулах на параметры, вычисленнные ИНС (называемые также модельными), которые согласно [1, 2] будут отмечаться штрихом.

Пусть $O\eta_1\eta_2\eta_3$ — гринвичский трехгранник, изображенный на рис. 2 (стр. 6). Для краткости будем обозначать его $O\eta$ или просто η, если не надо выделять начало координат, и будем использовать ту же систему обозначений для всех трехгранников.

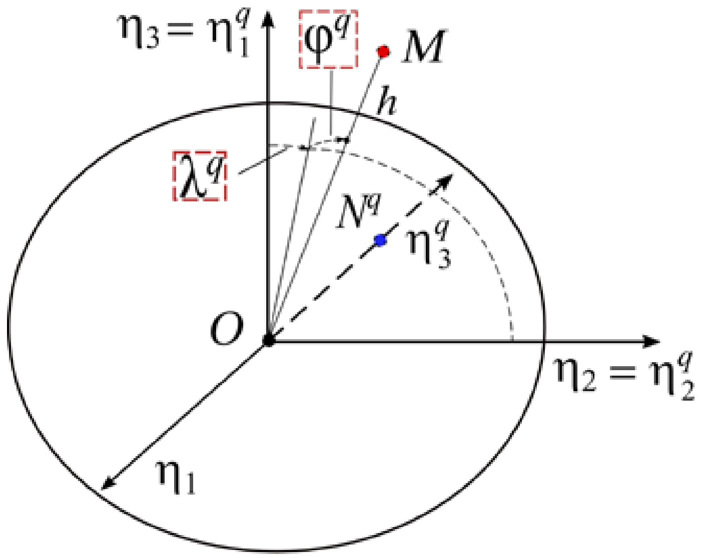

Рис. 2. Гринвичская $O\eta$ и квазигринвичская $O\eta^q$ системы координат, квазигеоцентрические долгота λ^q и широта φ^q. Объект расположен в точке M, находящейся на высоте h от поверхности земного эллипсоида

Квазигринвичский трехгранник $O\eta^q$ получается из $O\eta$ поворотом вокруг оси η_2 на угол $\pi/2$, связывающая их матрица равна

$$B_{\eta\eta^q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее индексы матрицы указывают связываемые ей базисы: для любого вектора l верно равенство $l_\eta = B_{\eta\eta^q} l_{q^q}$, нижний индекс у вектора обозначает базис, в котором он задан.

В базисе $O\eta^q$ роль северного полюса играет точка пересечения N^q оси η_3 и поверхности эллипсоида с географическими координатами $\lambda = \pi$, $\varphi = 0$. Согласно рис. 2, вводятся квазигеоцентрические координаты, аналогичные геоцентрическим координатам в гринвичских осях. Отметим, что фигура земного эллипсоида не обладает осевой симметрией относительно η_3^q, а радиус-вектор точки M отсчитывается от центра земного эллипсоида O.

Новой плоскостью экватора служит $O\eta_1^q\eta_2^q$, квазидолготой λ^q называется угол между осью η_1^q и проекцией радиуса-вектора ОМ на плоскость $O\eta_1^q\eta_2^q$, квазиширотой φ^q — угол между OM и плоскостью $O\eta_1^q\eta_2^q$. Из построений ясно, что перемещение полюса в точку N^q переносит в нее же (и диаметрально противоположную точку) особенности параметров λ^q и φ^q, устраняя их в географических полюсах.

Квазигеоцентрический трехгранник Mx^q вводится так, что ось x_3^q ориентируется вдоль OM, ось x_2^q ортогональна OM и лежит в плоскости, содержащей O, M и N^q. Ось x_1^q дополняет базис до правой тройки. В Mx^q вводятся аналоги параметров, вычисляемых в географическом трехграннике Mx° (ось x_1° которого ориентирована на восток, x_2° — на север по касательной к меридиану, x_3° — по местной вертикали [1, 2]).

Выразим λ^q и φ^q через элементы матрицы $B_{x\eta}$, которая невырождена всюду. Вначале свяжем квазигеоцентрические координаты λ^q, φ^q с «обычными» *геоцентрическими* координатами $\lambda^\circ, \varphi^\circ$. Параметры $\lambda^\circ, \varphi^\circ$ как и *географические* координаты λ, φ [1, 2], плохо обусловлены в полярных зонах, но удобны для промежуточных выкладок, результат которых будет выражен через элементы b_{ij} матрицы $B_{x\eta}$.

Геоцентрическая долгота равна географической $\lambda^\circ = \lambda$ и потому индекс «$^\circ$» у λ далее не пишется. Геоцентрическая широта φ° — угол между OM и плоскостью $\eta_1\eta_2$ рис. 2. Выразим $r_\eta = OM_\eta$ через геоцентрические и квазигеоцентрические координаты:

$$r_\eta = |r_\eta| \begin{bmatrix} \cos\lambda\cos\varphi^\circ \\ \sin\lambda\cos\varphi^\circ \\ \sin\varphi^\circ \end{bmatrix} = |r_\eta| \begin{bmatrix} -\sin\varphi^q \\ \sin\lambda^q\cos\varphi^q \\ \cos\lambda^q\cos\varphi^q \end{bmatrix}, \tag{1}$$

отсюда

$$\lambda^q = \mathrm{Arctg}\frac{\sin\lambda\cos\varphi^\circ}{\sin\varphi^\circ},\ \varphi^q = -\arcsin\left(\cos\lambda\cos\varphi^\circ\right), \tag{2}$$

где Arctg возвращает угол в диапазоне $(-\pi, \pi]$ в соответствии со знаками числителя и знаменателя. Для выражения λ^q, φ^q через b_{ij} используем известные формулы [1, 2] связывающие сферические координаты r_η с параметрами λ, φ, h и b_{ij}:

$$r_\eta = \begin{bmatrix} (R_e+h)\cos\lambda\cos\varphi \\ (R_e+h)\sin\lambda\cos\varphi \\ (R_e+h)\sin\varphi - e^2R_e\sin\varphi \end{bmatrix} = (R_e+h)\begin{bmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{bmatrix} - e^2R_e\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{33} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$R_e = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2b_{33}^2}},$$

где e — эксцентриситет земного эллипсоида, R_e — долготный радиус кривизны, b_{ij} — элементы матрицы $B_{x\eta}$.

Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi^{\circ}=\left(1-\frac{e^2}{1+hR_e^{-1}}\right)\operatorname{tg}\varphi=\left(1-\mu\right)\operatorname{tg}\varphi,\qquad \mu=\frac{e^2}{1+hR_e^{-1}}\ll 1,$$

разложение по малому параметру:

$$\varphi^{\circ}\simeq\varphi-\mu\sin\varphi\cos\varphi-\mu^2\sin^3\varphi\cos\varphi. \tag{4}$$

Поскольку $\mu\simeq e^2\simeq 6,7\cdot 10^{-3}$, член $\sim\mu$ дает поправку $\sim 0,38^{\circ}$, а член $\sim\mu^2$ — поправку $9,4''$, т. е. десятки километров и несколько сотен метров вдоль меридиана соответственно.

Подстановка выражения R_e в формулу выше и разложение по двум малым параметрам e^2 и $a^{-1}h$ дает:

$$\varphi^{\circ}=\varphi-\frac{e^2}{2}\sin 2\varphi\left(1-\frac{h}{a}+e^2\sin^2\varphi\right). \tag{5}$$

Член следующего порядка по $a^{-1}h$ пренебрежимо мал: даже при $h = 10$ км $e^2a^{-2}h^2\sim 0,002''\ll e^4\sim 10''$. Подстановка (5) в (2) и разложение по параметрам e^2 и $a^{-1}h$ с учетом равенств $b_{31}=\cos\lambda\cos\varphi$, $b_{32}=\sin\lambda\cos\varphi$, $b_{33}=\sin\varphi$, связывающих географические координаты с элементами матрицы $B_{x\eta}$ [1, 2], приводят к следующим приближенным формулам:

$$\begin{aligned}\lambda^q &= \operatorname{Arctg}\frac{b_{32}\left[1+e^2\left(1-a^{-1}h\right)+e^4\right]}{b_{33}},\\ \varphi^q &= -\arcsin\left[b_{31}\left[1+e^2b_{33}^2\left(1-a^{-1}h-0,5e^2\left(1-3b_{33}^2\right)\right)\right]\right].\end{aligned} \tag{6}$$

Вычисления по точным формулам (2) и разложениям (6) для $\varphi\sim 89^{\circ}$ дают пренебрежимо малую разницу порядка $10^{-5''}$. Функция Arctg возвращает значение в диапазоне $(-\pi,\pi]$ с учетом знаков числителя и знаменателя ее аргумента. Например, $\operatorname{Arctg}\left((-1)/(-1)\right)=-3\pi/4$.

Для вычисления квазигеоцентрических координат модельной точки M', положение которой вычислено ИНС, в формулы (6) подставляются элементы b'_{ij} матрицы $B'_{y\eta}$, и высота h', вычисленные ИНС. Здесь y — модельный трехгранник — образ трехгранника x, вычисленный ИНС, отличающийся от x из-за ошибок ИНС [1, 2].

Пересчет векторов и углов в квазигеографический трехгранник. Матрица $B_{x\eta}$ для свободной и полусвободной ориентации опорного трехгранника x определена в любой точке земного эллипсоида, как и параметры, отсчитываемые от осей трехгранника x. Однако они не удобны для решения навигационной задачи в полярных зонах: азимутальная ориентация опорного трехгранника x зависит от траектории и заранее неизвестна, а угол платформы χ, задающий направление на север, в полярных зонах плохо обусловлен.

Переход в квазигеоцентрический трехгранник x^q снимает неопределенность с азимутальной ориентаций, поскольку одна из его осей ориентирована вдоль квазимеридиана, проходящего через точки M и N^q, – направлению, определенному в зонах географических полюсов. Ориентация x^q напоминает ориентацию по сторонам света, ось x_2^q ориентирована на «квазиполюс» N^q и «свобода» в азимуте отсутствует.

Выразим величины, необходимые для пересчета векторов в квазигеоцентрический трехгранник x^q. Из (1) и геометрического смысла координатных линий, соответствующих изменению параметров λ^q, φ^q, $|r_\eta|$ следует, что

$$B_{\eta x^q} = \left[\frac{\partial r_\eta / \partial \lambda^q}{\left|\partial r_\eta / \partial \lambda^q\right|}, \quad \frac{\partial r_\eta / \partial \varphi^q}{\left|\partial r_\eta / \partial \varphi^q\right|}, \quad \frac{r_\eta}{|r_\eta|} \right],$$

отсюда

$$B_{\eta x^q} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\varphi^q & -\sin\varphi^q \\ \cos\lambda^q & -\sin\lambda^q \sin\varphi^q & \sin\lambda^q \cos\varphi^q \\ -\sin\lambda^q & -\cos\lambda^q \sin\varphi^q & \cos\lambda^q \cos\varphi^q \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где λ^q, φ^q, находятся по формулам (6). Таким образом

$$B_{xx^q} = B_{x\eta} B_{\eta x^q}.$$

Для модельных параметров, вычисленных БИНС, соответственно, получим:

$$B'_{yy^q} = B'_{y\eta} B'_{\eta y^q}. \tag{8}$$

Здесь матрица $B'_{\eta y^q}$ находится по формуле (7), в которую подставляются $\lambda^{q\prime}$, $\varphi^{q\prime}$, вычисленные по формулам (6) и элементам b'_{ij} и h'.

Трехгранники x и x^q с точностью до поправок от несовпадения географической x_3 и геоцентрической x_3^q вертикалей, малых в полярных зонах, различаются лишь разворотом на азимутальный угол χ^q поворота от x^q к x против часовой стрелки.

Тогда

$$B_{xx^q} \simeq \begin{bmatrix} \cos\chi^q & \sin\chi^q & 0 \\ -\sin\chi^q & \cos\chi^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B'_{yy^q} \simeq \begin{bmatrix} \cos\chi^{q'} & \sin\chi^{q'} & 0 \\ -\sin\chi^{q'} & \cos\chi^{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

и

$$\chi^q = \operatorname{Arctg}\frac{b_{12}^q}{b_{22}^q}, \ \ \chi^{q'} = \operatorname{Arctg}\frac{b_{12}^{q\,\prime}}{b_{22}^{q\,\prime}},$$

где $b_{ij}^q, b_{ij}^{q'}$ — элементы матриц B_{xx^q} и B'_{yy^q}. Далее перечисляются формулы перехода к квазипараметрам.

· Квазидолгота и квазиширота. Вычисляются по формулам (6) с подстановкой в них модельных параметров b'_{ij}, h'.

· Компоненты линейной относительной скорости вычисляются по формулам

$$V'_{y^q} = B'_{y^q y} V'_y, \ \ B'_{y^q y} = B'^T_{yy^q}.$$

Отсюда с учетом (9)

$$V_1^q = V_1 \cos\chi^q - V_2 \sin\chi^q, \qquad V_2^q = V_1 \sin\chi^q + V_2 \cos\chi^q,$$

$$V_1^{q'} = V_1' \cos\chi^{q'} - V_2' \sin\chi^{q'}, \quad V_2^{q'} = V_1' \sin\chi^{q'} + V_2' \cos\chi^{q'}.$$

· Углы ориентации и другие курсовые углы. С объектом связывается приборный трехгранник p, у которого ось p_1 ориентирована вдоль продольной оси объекта, ось p_2 — по локальной вертикали объекта, p_3 — по правому борту. Ориентацию p относительно x удобно задавать углами курса, тангажа и крена. Крен и тангаж не имеют особенностей в полярных зонах, в которых плоскость горизонта x_1x_2 близка к $x_1^q x_2^q$, поэтому пересчет этих углов не требуется. Истинный курс ψ плохо обусловлен в полярных зонах. Гироскопический курс ψ^g определен всюду, причем для платформенных ИНС $\psi^{g'}$ получается прямым измерением, однако зависимость азимутальной ориентации опорного трехгранника от траектории делает его неудобным для навигационного счисления. Квазикурс ψ^g — угол между проекцией продольной оси p_1 на плоскость $x_1^q x_2^q$ и осью x_2^q лишен этого недостатка и находится по матрице

$$D_{x^q p} = B_{x^q x} D_{xp}.$$

Ее столбцы — координаты ортов базиса p относительно x^q, поэтому, обозначив элементы матрицы $D_{x^q p}$ через d_{ij}^q, получим

$$\psi^q = \mathrm{Arctg}\frac{d_{11}^q}{d_{21}^q}.$$

Для параметров, вычисленных ИНС:

$$D'_{z^q p} = B'_{y^q y} D'_{zp}, \tag{10}$$

здесь точные матрицы заменены на вычисленные и учтено, что ошибки начальной выставки и дрейфы гироплатформы или ДУС БИНС приводят к отличию приборного (квазиприборного для БИНС) трехгранника z от y, описываемым вектором малого поворота β, называемого кинематической ошибкой [1, 2]. Из (10) следует, что этот же поворот на β совмещает y^q и z^q. Соответственно

$$\psi^{q\prime} = \mathrm{Arctg}\frac{d_{11}^{q\prime}}{d_{21}^{q\prime}}. \tag{11}$$

Из геометрического смысла курсовых углов и формул (9), (10) следует, что

$$\psi^q = \psi^g - \chi^q,$$

где ψ^g — угол гироскопического курса [1, 2].

При движении вблизи полюсов формулы допускают приближенную запись, поскольку ориентация x^q там меняется мало и в первом приближении фиксируется на одном из полюсов. Для этого в формуле (7) подставляется $\lambda^q = 0,\ \varphi^q = 0$ для северного полюса или $\lambda^q = \pi,\ \varphi^q = 0$ для южного полюса. Тогда

$$B_{\eta x^q} \simeq \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix},\ B_{x x^q} = \begin{bmatrix} \cos\chi^q & \sin\chi^q & 0 \\ -\sin\chi^q & \cos\chi^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_{x\eta} B_{\eta x^q} \simeq$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \pm b_{12} & -b_{11} & \pm b_{13} \\ \pm b_{22} & -b_{21} & \pm b_{23} \\ \pm b_{32} & -b_{31} & \pm b_{33} \end{bmatrix},$$

где верхний знак отвечает северному полюсу, нижний — южному.

Отсюда

$$\chi^q \simeq \mathrm{Arctg}\frac{-b_{11}}{-b_{21}}, \tag{12}$$

причем знаки числителя и знаменателя не «сокращаются»: иначе значение функции Arctg меняется на π. Вычисление по приближенной формуле дает азимутальный угол поворота от Mx^q к Mx против часовой стрелки относительно оси x_3^q, а его вычисленное (модельное) значение равно $\chi^{q\prime} \simeq \mathrm{Arctg}\left(\left(-b'_{11}\right)\big/\left(-b'_{21}\right)\right)$.

Кроме истинного курса от направления x_2^q можно отсчитывать любые «курсовые» углы. Для этого из любого угла, отсчитываемого от оси x_2 надо вычесть χ^q. Например, квазипутевой угол с точностью до несовпадения географической и геоцентрической вертикалей равен

$$\psi_v^q = \mathrm{Arcrg}\frac{V_1}{V_2} - \chi^q = \mathrm{Arcrg}\frac{V_1^q}{V_2^q},$$

где V_1, V_2 — компоненты вектора линейной относительной скорости в опорном трехграннике x, а V_1^q, V_2^q — в трехграннике x^q.

Если в некоторую формулу входит истинный курс ψ, он заменяется на квазикурс ψ^q. Например, квазимагнитный курс вычисляется по формуле

$$\psi_m^q = \psi^q - D_m,$$

где D_m — магнитное склонение.

Аналогичные выражения записываются для других квазипараметров. На практике идеальные значения во всех формулах заменяются на вычисленные (модельные).

Отдельный интерес представляет поведение ошибки квазикурса в полярных зонах. Известно [1, 2], что ошибка истинного курса $\Delta\psi$ выражается формулой

$$\Delta\psi = \beta_3 + \Delta\lambda\sin\varphi' + \Delta\gamma\sin\vartheta',$$

где β_3 — азимутальная компонента кинематической ошибки, $\Delta\lambda$ — ошибка долготы, $\Delta\gamma$ — ошибка крена, ϑ' — модельное значение угла тангажа (для платформенных ИНС еще добавляется ошибка СКТ). В полярных зонах из-за плохой обусловленности велика ошибка $\Delta\lambda$ и, соответственно, $\Delta\psi$. При переходе к квазиполюсам вместо географической широты φ используется квазиширота, которая мала в полярных зонах $\varphi^q \simeq 0$. Ошибка крена не зависит от азимутальной ориентации опорного трехгранника, поэтому для ошибки квазикурса верно приближенное выражение $\Delta\psi^q \simeq \beta_3 + \Delta\gamma\sin\vartheta'$.

Задача коррекции БИНС в зоне полюсов. В задаче комплексирования ИНС и внешних источников информации разности инерциальных и корректирующих параметров выражаются через линейные комбинации компонент вектора состояния системы уравнений ошибок ИНС, называемые корректирующими замерами. Алгоритм оценивания ошибок инерциальной системы на основе замеров и уравнений ошибок традиционно строится на основе фильтра Калмана [2, 4]. Оценки фильтра используются в различных задачах комплексирования.

Рассмотрим наиболее распространенный случай полусвободной азимутальной ориентации опорного трехгранника ИНС или БИНС, для которого проекция его угловой скорости относительно Земли на третью (вертикальную) ось нулевая: $\Omega_3 = 0$.

Известно, что для анализа ошибок в этом случае удобна комбинированная форма системы уравнений ошибок, вектор состояния которой имеет вид

$$x = \left[\Delta r_y, \delta V_y, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \Delta f_y, \Delta \nu_y\right]^T, \tag{13}$$

где Δr_y — вектор позиционных ошибок в модельном трехграннике y, δV_y — динамическая ошибка скорости относительно Земли в трехграннике y, α_1, α_2 — динамические ошибки вертикали, β_3 — кинематическая ошибка азимута, Δf_y, $\Delta \nu_y$ — приведенные векторы смещений нулевых сигналов акселерометров и дрейфов гироскопов ДУС БИНС или гироплатформы в осях трехгранника y [1, 2, 4].

Для обсуждаемых здесь вопросов система уравнений ошибок, описывающая эволюцию вектора x и приведенная, например, в [1, 2], не существенна, и потому не выписывается, как и хорошо известные уравнения дискретного фильтра Калмана.

Формирование замеров. Обозначим информацию, поступающую от ГНСС, верхним индексом s. Тогда координаты объекта (точки M), вычисленные по данным ГНСС в гринвичских осях η, имеют вид:

$$r_\eta^s = r_\eta + \rho_\eta^{rs},$$

где r_η^s — радиус-вектор точки M, отвечающий навигационному решению ГНСС в осях η, r_η — фактический радиус-вектор точки M в осях η, ρ_η^{rs} — позиционная погрешность ГНСС в осях η, представляющая собой при штатной работе приемника ГНСС высокочастотный (на фоне ошибок инерциальной системы) шум с возможными «выбросами» большой амплитуды, подлежащими отбраковке.

Для формирования корректирующего замера в трехграннике y навигационное решение ГНСС проектируется в трехгранник y через модельную матрицу $B'_{y\eta}$, вычисленную ИНС:

$$r_y^s = B'_{y\eta} r_\eta^s.$$

Позиционный корректирующий замер представляет собой разность инерциального и спутникового навигационных решений в трехграннике y и выражается через компоненту Δr_y вектора состояния формулой

$$z_y^p = r'_y - r_y^s = r'_y - B'_{y\eta} r_\eta^s = \Delta r_y - \rho_y^{rs}, \tag{14}$$

где ρ_y^{rs} — позиционная погрешность ГНСС в трехграннике y. Для формирования замера инерциальное навигационное решение r'_y следует выразить по формуле

$$r'_y = B'_{y\eta} r'_\eta,$$

где r'_η находится из (3), куда подставляются элементы b'_{ij} матрицы $B'_{y\eta}$.

Формирование скоростных замеров. Обозначим через V_η^s скорость, вычисленную ГНСС в осях η. Тогда

$$V_\eta^s = V_\eta + \rho_\eta^{vs},$$

где V_η — скорость точки M, ρ_η^{vs} — погрешность скоростного решения ГНСС, которая в штатном режиме является высокочастотным (на фоне ошибок инерциальной системы) шумом с возможными «выбросами», подлежащим отбраковке. В навигационном режиме инерциальная системы вычисляет скорость модельной точки M' в модельном трехграннике y. Поэтому для формирования скоростного корректирующего замера решение V_η^s перепроектируется в трехгранник y и в нем находится разность векторов:

$$V_y^s = B'_{y\eta} V_\eta^s, \quad z_y^v = V'_y - V_y^s = \Delta V_y - \rho_y^{vs}. \tag{15}$$

Известно, что полная ошибка скорости ΔV_y связана с динамической ошибкой δV_y формулой $\Delta V_y = \delta V_y + \hat{\beta}_y V'_y$. Можно показать [1, 2], что

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \delta V_1 - \left(\alpha_2 - \frac{\Delta r_1}{a}\right) V'_3 + \beta_3 V'_2, \\ \Delta V_2 &= \delta V_2 + \left(\alpha_1 + \frac{\Delta r_2}{a}\right) V'_3 - \beta_3 V'_1, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\Delta V_3 = \delta V_3 + \left(\alpha_1 + \frac{\Delta r_2}{a}\right) V_2' - \left(\alpha_2 - \frac{\Delta r_1}{a}\right) V_1', \quad (16)$$

где Δr_i, ΔV_i, δV_i, V_i' — компоненты соответствующих векторов в трехграннике *y*. Таким образом, из (14 — 16) следует, что по информации инерциальной системы с полусвободным опорным трехгранником и решению ГНСС в гринвичском трехграннике могут быть сформированы корректирующие замеры в модельном трехграннике *y*. Они выражаются через линейные комбинации компонент вектора состояния линейной системы уравнений ошибок (13) и погрешности ГНСС. Отсутствие плохо обусловленных величин позволяет решать задачу коррекции с использованием фильтра Калмана в полярных зонах.

Формирование корректируемой информации. Решение задачи коррекции по замерам, описанным выше, выполняется в опорном трехграннике *y*, и оценка вектора состояния

$$\tilde{x} = \left[\Delta\tilde{r}_y, \delta\tilde{V}_y, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_3, \Delta\tilde{f}_y, \tilde{\nu}_y\right]^T$$

позволяет корректировать инерциальное навигационное решение в трехграннике *y*. Корректируемые положение и скорость $\tilde{r}_y$, $\tilde{V}_y$ вычисляются по формулам

$$\tilde{r}_y = r_y' - \Delta\tilde{r}_y, \; \tilde{V}_y = V_y' - \Delta\tilde{V}_y.$$

Эти параметры определены всюду, включая географические полюсы, однако азимутальная ориентации трехгранника *y* зависит от траектории и данные параметры не удобны для потребителя.

Вдали от географических полюсов эту проблему устраняет переход к модельному географическому трехграннику с азимутальной ориентацией по сторонам света. Вблизи географических полюсов вместо него можно использовать квазигеоцентрический трехгранник y^q.

Напомним, что от его оси y_2^q отсчитывается угол квазикурса

$$\psi^{q'} = \psi^{g'} - \chi^{q'},$$

а угол $\chi^{q'}$, вычисляемый по формулам (10) или (11), задает азимутальный поворот, совмещающий оси y_2 и y_2^q.

Любой корректируемый параметр (или поправку к нему, оцененную фильтром) можно пересчитать из трехгранника у в квазигеографический трехгранник y^q, используя матрицу

$$B_{yy^q} \simeq \begin{bmatrix} \cos\chi^{q'} & \sin\chi^{q'} & 0 \\ -\sin\chi^{q'} & \cos\chi^{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это снимает неопределенность в азимутальной ориентации опорного трехгранника в зоне полюсов и позволяет сформировать там любые автономные и корректируемые параметры.

В заключение отметим, что в новых квазикоординатах могут задаваться и положения различных объектов на картах полярных зон и использоваться в различных бортовых системах летательного аппарата.

Заключение

Параметры, связанным с направлением местного меридиана — долгота, истинный курс, компоненты скорости в трехграннике, ориентированным по сторонам света, и некоторые другие величины, вычисляемые навигационной системой, плохо обусловлены в зонах географических полюсов. Это делает невозможным их использование вблизи полюсов и препятствует решению задачи коррекции ИНС по ГНСС, если ее данные и решение ГНСС содержит плохо обусловленные параметры. Однако и вычислительный алгоритм ИНС, и решение ГНСС содержат параметры, определенные в любой точке Земли, что позволяет перейти к новым величинам, обладающим наглядностью и не имеющим особенностей вблизи географических полюсов.

В статье рассмотрена одна из замен координат, устраняющая особенности на географических полюсах. Приводятся точные и приближенные формулы, связывающие всюду определенные параметры вычислительного алгоритма ИНС, с новыми квазигеоцентрическими координатами и квазикурсовыми углами, направление отсчета которых в зоне полюсов близко к нулевому меридиану, проходящему через географические полюсы. Показано, что в новых параметрах могут решаться задачи автономной инерциальной навигации, коррекции ИНС БИНС и задания координат объектов на картах в полярных зонах.

Литература

1. *Голован А. А., Парусников Н. А.* Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. − 136 с.

2. *Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А.* Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Издательство Московского университета, 2020. −164 с.

3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961. − 825 с.

4. *Голован А. А., Парусников Н. А.* Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложения методов теории оценивания к задачам навигации. 2-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2012. − 172 с.