

УДК 629.7.05

ТРАЕКТОРНЫЙ АВТОПИЛОТ С АСТАТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ В ПРОДОЛЬНОМ КАНАЛЕ УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТА

*Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, д. т. н., профессор
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru*

В статье рассмотрен подход формирования системы автоматического управления самолета в вертикальной плоскости, объединяющий классический автопилот и систему траекторного управления. Метод объединения основан на построении вложенных систем по принципу подчиненных контуров регулирования. Каждый внутренний контур управления без изменения используется во внешнем контуре. Синтез системы осуществляется по методу обратной задачи модального управления с использованием редукации динамических систем, оптимизации амплитудно-частотных характеристик замкнутого контура, интегральной квадратичной оценки для минимизации невязки движения системы и эталонного аналога. Получен траекторный автопилот с оптимальными характеристиками качества и быстродействия с минимальным числом параметров регулятора.

Ключевые слова: траекторное движение самолета, замкнутый контур, система управления амплитудно-частотная характеристика, передаточная функция, оптимизация настроек, перерегулирование.

AUTOMATIC FLIGHT CONTROL SYSTEM WITH TRAJECTORY CONTROL IN LONGITUDINAL CHANNEL INVOLVING ASTATIC CONTROLLER

*Vladimir E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru*

The article discusses an approach to developing an automatic flight control system with trajectory control in a vertical plane, combining a classic autopilot and a trajectory control system. The integration method is based on the construction of nested systems according to principle of subordinate control loops. Each inner control loop is used unchanged in the outer loop. The system synthesis is carried out by the method of modal control inverse problem with the use of dynamical systems reduction, closed loop amplitude-frequency characteristics optimization, integral quadratic estimation for minimizing the residual between system movement and the reference analogue. The automatic flight control system with trajectory control in longitudinal channel is obtained, that has optimal quality and high speed response characteristics with a minimum number of controller parameters.

Keywords: aircraft trajectory, closed loop, flight control system, amplitude-frequency characteristic, transfer function, settings optimization, overshoot.

Создание систем автоматического управления (САУ) прошло ряд этапов становления от простейших демпферов, автопилотов (АП) и систем траекторного управления (СТУ) к комплексным системам управления (КСУ). Развитие подходов к построению САУ определялось в основном уровнем развития электронной техники, аппаратной реализацией датчиков и вычислителей бортовых систем. Методические подходы к синтезу законов управления традиционно опережали возможности бортовой автоматики, которая долгое время оставалась аналогового типа и была основой автоматизации управления полетом самолетов [1].

Реализация математических зависимостей законов управления с помощью аналоговых схем и блочная конструкция САУ (АП + СТУ) оказали свое влияние на структурную организацию алгоритмов управления цифровых систем, пришедших на смену аналоговой технике.

На сегодняшний день, несмотря на применение единого цифрового вычислителя в КСУ, продолжает сохраняться относительная независимость алгоритмов, обеспечивающих раздельное решение автопилотных и траекторных задач. Так, траекторный алгоритм в вертикальной плоскости формирует заданную нормальную перегрузку $n_{у,зад}$, а автопилотный закон управления ее «отрабатывает». Относительная независимость такого разделения функций оправдана известными [2] свойствами длиннопериодического и короткопериодического движений самолета, различающихся по времени их выполнения. Критерием допустимости изолированного исследования короткопериодического и длиннопериодического движений самолета является устойчивость короткопериодического движения, которое трактуется как устойчивость движения самолета по перегрузке [3, стр. 38, 52]. Поэтому сложилась система проектирования САУ с независимым синтезом углового (быстрого) контура автоматического управления и траекторного (медленного) контура без учета влияния уравнений равновесия моментов относительно центра масс. При этом для каждого из режимов траекторного управления: стабилизации высоты, скорости, угла наклона траектории, — от разработчика САУ требовалось выполнение условия о сохранении разнесенности корней траекторного и углового движений в целях обеспечения относительной независимости положения корней друг относительно друга при замыкании контура управления «самолет — АП — СТУ».

В целом, условное разделение продольного движения самолета на угловое и траекторное потребовало решения ряда вопросов при разработке САУ в траекторных режимах управления. К ним следует отнести: сопряжение каждого режима траекторного управления в отдельности с контуром автопилота, совместная параметрическая настройка двух контуров для достижения заданного качества управления

регулируемой траекторной координаты, дополнительное внесение специальных способов обеспечения астатизма траекторного контура управления и его инвариантности к действующим возмущениям.

В настоящей статье изложен подход к созданию целостной системы автоматизации траекторного управления самолета — траекторного автопилота, алгоритмически объединяющего взаимосвязанные алгоритмы углового и траекторного движений в единый алгоритм «автопилотного» типа как полного автомата траекторного управления самолета.

Согласно фундаментальному закону механики движения твердого тела, обоснованным способом анализа структуры траекторного движения самолета является рассмотрение последовательности «сила → скорость → смещение». Тогда для синтеза траекторных режимов математическое описание линеаризованного объекта управления в преобразовании Лапласа будет представлять собой последовательное соединение звеньев: для синтеза системы стабилизации высоты (рис. 1), для синтеза системы стабилизации скорости полета через руль высоты (рис. 2):

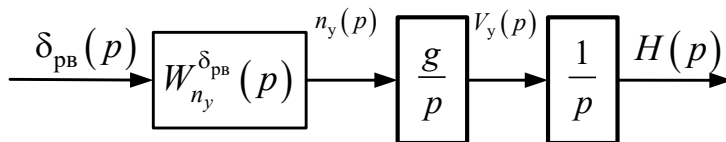


Рис. 1. Объект управления для стабилизации высоты полета

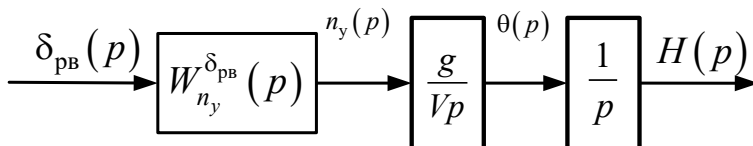


Рис. 2. Объект управления для стабилизации скорости полета

Здесь для синтеза управления скоростью и высотой исходным считается установившийся режим полета при постоянной балансировочной тяге двигателей. Привода руля высоты приняты безынерционными, а приращения перегрузки — относительно балансировочного значения перегрузки.

Как видно из рассмотрения рис. 1 и рис. 2, объекты управления для синтеза траекторных режимов управления структурно одинаковы и отличаются только одним параметром — коэффициентом прямого усиления. Это дает объективные основания для формирования единой структуры траекторного управления самолетом в вертикальной плоскости с использованием канала руля высоты. Основной вопрос состоит в организации контуров обратных связей по регулируемым параметрам.

Из всего разнообразия способов синтеза систем автоматического управления остановим свое внимание на способе формирования многоконтурной системы с вложенными контурами управления, основанного на принципе построения подчиненных контуров регулирования [4, стр. 47], впервые примененного при конструировании систем управления электроприводом. Основанный на этом принципе метод синтеза многоконтурной САУ состоит в последовательном построении регулятора внешнего контура для управления внутренним контуром, выступающим в роли объекта управления, многоконтурной системы подчиненного регулирования [5, стр. 80], Применяя этот метод построения многоконтурной системы для траекторного автопилота получим следующую обобщенную структуру последовательно замыкаемых контуров, вложенных друг в друга, как показано на рис. 3 для задачи управления высотой полета.

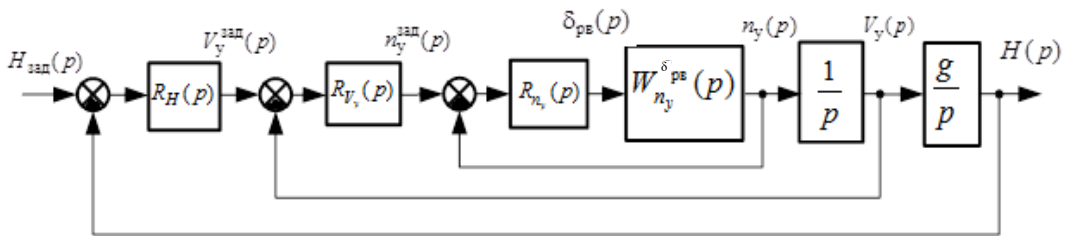


Рис. 3. Обобщенная структурная схема многоконтурной системы траекторного автопилота

На рис. 3 обозначены: $R_{n_y}(p)$, $R_{V_y}(p)$ и $R_H(p)$ — регуляторы контуров перегрузки n_y , вертикальной скорости V_y и высоты H соответственно. Процесс синтеза многоконтурной системы регулирования [6] состоит из нескольких последовательных этапов с настройкой каждой системы регулирования с одной единичной обратной связью, начиная с внутреннего контура. Возникает эффект подчиненного регулирования координат с последовательной коррекцией входного сигнала для смежного внутреннего контура управления.

Каждый из контуров подсистем стабилизации перегрузки, вертикальной скорости и высоты представляет собой следящую систему по параметрам движения n_y , V_y и H .

Заданные сигналы $n_y^{зад}$ и $V_y^{зад}$ вырабатывается внешним замыкающим контуром управления. Сигнал заданной высоты $H^{зад}$ стандартно формируется с пульта управления САУ. При таком подходе каждый контур можно синтезировать по очереди, сначала внутренний контур перегрузки, включающий в себя некомпенсируемую часть объекта управления, затем контур вертикальной скорости и завершающим этапом (на основании ранее разработанных регуляторов контуров n_y и V_y) — внешний контур стабилизации высоты.

Такое чередование разработки автопилота самолета в [7] названо «последовательными замыканиями контуров обратной связи». В качестве регуляторов контуров могут быть использованы ПИД-регуляторы [8].

На основе метода последовательного замыкания вложенных контуров рассмотрим синтез системы автоматизации траекторного движения в варианте траекторного автопилота с одним астатическим регулятором для всех стабилизируемых параметров движения.

Сложившаяся система формирования астатических контуров стабилизации предполагала введение интеграла в контур для каждого регулируемого параметра [3, 9, 10]. Известно [11, стр. 158], что для обеспечения астатизма первого порядка замкнутой следящей системы по отношению к входному (заданному) сигналу достаточно иметь одно интегрирующее звено ее разомкнутой системы. Из структуры многоконтурного траекторного автопилота (рис. 3) следует, что астатизм первого порядка по входу имеют контур отработки вертикальной скорости и контур стабилизации высоты. Для обеспечения в установившемся движении свойства невозмущаемости контура V_y , например, по перегрузке, необходимо выполнить условие структурного признака астатизма для возмущения [12, стр. 160]: «между входом возмущения и выходом системы против хода сигнала» (против хода стрелок на рис. 3) должно находиться одно интегрирующее звено. Это же условие невозмущаемости относится и к контуру стабилизации высоты. Тогда для внешних контуров по V_y и H достаточно наличия одного интегратора во внутреннем контуре нормальной перегрузки. Это же интегрирующее звено будет обеспечивать, находясь в прямой цепи, и астатизм контура перегрузки по входному заданному сигналу.

Таким образом, синтез траекторного автопилота следует начинать с формирования замкнутого контура по перегрузке в варианте как минимум ПИ-регулятора. Остановимся на этом минимально необходимом виде закона управления перегрузкой. Соответствующая структурная схема замкнутого контура управления перегрузкой представлена на рис. 4.

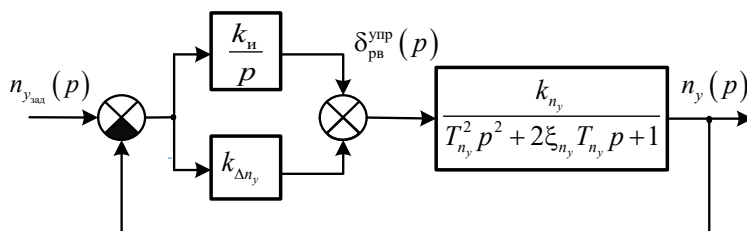


Рис. 4. Структурная схема астатического контура перегрузки

Передаточная функция по перегрузке, изображенная на рис. 4 имеет выражение

$$W_{n_y}^{\delta_{\text{рв}}} (p) = \frac{k_{n_y}}{T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p + 1}, \quad (1)$$

где T_{n_y} и ξ_{n_y} — постоянная времени и относительный коэффициент затухания свободной системы выхода на перегрузку, k_{n_y} — коэффициент усиления тракта «руль высоты — нормальная перегрузка», пропорциональный эффективности $\delta_{\text{рв}}$. С учетом введенного ПИ-регулятора передаточная функция замкнутого астатического контура перегрузки примет вид

$$W_{n_y}^{n_y^{\text{зад}}} (p) = \frac{k_{n_y} k_{\Delta n_y} p + k_{n_y} k_{\text{и}}}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (k_{n_y} k_{\Delta n_y} + 1) p + k_{n_y} k_{\text{и}}}, \quad (2)$$

где $k_{\Delta n_y}$, $k_{\text{и}}$ — искомые передаточные коэффициенты регулятора по отклонению и интегралу отклонения перегрузки от заданного значения для закона управления

$$\delta_{\text{рв}}^{\text{упр}} (t) = k_{\Delta n_y} \cdot \Delta n_y (t) + \int_{t_{\text{вкл}}}^t \Delta n_y (\tau) d\tau, \quad \Delta n_y (t) = n_y^{\text{зад}} - n_y (t). \quad (3)$$

В законе управления рулем высоты (3), записанном во временной области, обозначено: $t_{\text{вкл}}$ — момент времени включения режима отработки заданной перегрузки, $n_y^{\text{зад}}$ — заданная перегрузка, принятая для проведения процедуры синтеза за постоянное значение.

Так как в передаточной функции (2) коэффициент k_{n_y} является общим коэффициентом системы (рис. 4), выделим для упрощения структуры соответствующий общий коэффициент усиления k_{yc} в (3) и запишем в преобразовании Лапласа закон управления в обновленном виде

$$\delta_{\text{рв}}^{\text{упр}} (p) = k_{\text{yc}} \left(\frac{\bar{k}_{\Delta n_y}}{k_{n_y}} + \frac{\bar{k}_{\text{и}}}{p} \right) \Delta n_y (p), \quad k_{\text{yc}} = \frac{1}{k_{n_y}}. \quad (4)$$

Тогда передаточная функция (2) с учетом (4) может быть записана в виде

$$W_{n_y}^{n_y^{\text{зад}}} (p) = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} p + \bar{k}_{\text{и}}}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1) p + \bar{k}_{\text{и}}}, \quad \bar{k}_{\Delta n_y} = k_{n_y} k_{\Delta n_y}, \quad \bar{k}_{\text{и}} = k_{n_y} k_{\text{и}}. \quad (5)$$

Передаточная функция замкнутого контура перегрузки (5) не относится к классу простых динамических систем [13], числитель которых является полиномом нулевой степени, то есть с постоянным коэффициентом. Для простых динамических систем достаточно обеспечить с помощью коэффициентов регулятора только распределение корней характеристического полинома, соответствующее требуемому быстродействию и точности [14].

Найдем условия приведения системы (рис. 4) с передаточной функцией (5) третьего порядка к системе простого вида, что возможно с помощью деления нацело полинома знаменателя в выражении (5) на полином числителя. В результате такого деления получим характеристический полином пониженного порядка

$$\frac{T_{n_y}^2}{\bar{k}_{\Delta n_y}} p^2 + \frac{1}{\bar{k}_{\Delta n_y}} \left(2\xi_{n_y} T_{n_y} - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} T_{n_y}^2 \right) p + 1, \quad (6)$$

существующий при выполнении условия нулевого остатка от деления

$$1 - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} \left(2\xi_{n_y} T_{n_y} - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} T_{n_y}^2 \right) = 0. \quad (7)$$

В итоге на основании (6) и (7) получаем простую систему второго порядка с передаточной функцией

$$\bar{W}_{n_y}^{зад}(p) = \frac{1}{\bar{T}_{n_y}^2 p^2 + 2\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} p + 1}, \quad (8)$$

где постоянная времени системы (8) равна

$$\bar{T}_{n_y} = \frac{T_{n_y}}{\sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}}}, \quad (9)$$

а относительный коэффициент затухания $\bar{\xi}_{n_y}$ находится из уравнения

$$2\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} = \frac{1}{\bar{k}_{\Delta n_y}} \left(2\xi_{n_y} T_{n_y} - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} T_{n_y}^2 \right). \quad (10)$$

С учетом (9) и (7) $\bar{\xi}_{n_y}$ из (10) определится формулой

$$\bar{\xi}_{n_y} = \frac{\sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}}}{2T_{n_y} \bar{k}_и}. \quad (11)$$

Задавая для полученной системы (8) желаемый относительный коэффициент затухания $\bar{\xi}_{n_y}$, из (11) найдем выражение для коэффициента при интеграле

$$\bar{k}_и = \frac{\sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}}}{2T_{n_y} \bar{\xi}_{n_y}}. \quad (12)$$

Подставим (12) в (7) и получим уравнение относительно неизвестного коэффициента $k_{\Delta n_y}$:

$$4\bar{k}_{\Delta n_y} \bar{\xi}_{n_y}^2 - 4\xi_{n_y} \bar{\xi}_{n_y} \sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}} + 1 = 0,$$

которое имеет одно из двух решений, дающее большую величину коэффициента прямого усиления для получения максимального быстродействия системы

$$\bar{k}_{\Delta n_y} = \frac{\left(\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}\right)^2}{4\bar{\xi}_{n_y}^2}. \quad (13)$$

Соответствующее решение для коэффициента при интеграле после подстановки (7) в (6) равно

$$\bar{k}_и = \frac{\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{4\bar{\xi}_{n_y}^2 T_{n_y}}. \quad (14)$$

Выражение (13) показывает, что найденные коэффициенты ПИ-регулятора (13) и (14) существуют только при условии

$$\xi_{n_y} \geq 1 \quad (15)$$

для исходного описания движения свободного самолета по перегрузке (1).

Интересно отметить, что соотношение коэффициентов закона управления (3) не зависит от назначения желаемого относительного коэффициента затухания редуцированной простой системы (8)

$$\frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} = \frac{\xi_{n_y} - \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{T_{n_y}}, \quad (16)$$

а зависит, как следует из (16), только от постоянной времени T_{n_y} и относительного коэффициента затухания ξ_{n_y} объекта управления, что объясняется условием деления многочленов передаточной функции (5) нацело.

Несмотря на проведенную математическую редукцию системы третьего порядка (2) до простой системы второго порядка (8), физически система не изменила исходной структуры, при этом отметим два важных момента:

1) полученная простая система также имеет астатизм первого порядка по входу, что показывает равенство единичного свободного члена знаменателя единичному коэффициенту числителя, обеспечивающее нулевую ошибку стабилизации в установившемся состоянии;

2) система в целом обеспечивает астатизм по возмущению благодаря физическому сохранению структуры и порядка исходной замкнутой системы, покажем это ниже.

Точкой входа возмущения будем считать дополнительное изменение положения руля высоты, например, при перебалансировке или при развитии фугоидного движения самолета. Тогда имеем

$$\delta_{рв}(p) = \delta_{рв}^{упр}(p) + \delta_{рв}^{возм}(p). \quad (17)$$

Проведем замыкание контура прохождения возмущения $\delta_{рв}^{возм}(p) \Rightarrow n_y(p)$, введем обозначения передаточных функций, полученных с учетом прямой цепи $A(p)$ и цепи обратной связи $B(p)$ для этого способа замыкания контура с точкой входа через руль высоты:

$$A(p) = \frac{1}{T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p + 1}, \quad B(p) = \frac{\bar{k}_{n_y} p + \bar{k}_и}{p}. \quad (18)$$

По правилам структурных преобразований получаем следующую передаточную функцию по возмущению

$$W_{n_y}^{\delta_{рв}^{возм}}(p) = \frac{A(p)}{1 + B(p)A(p)} = \frac{p}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1)p + \bar{k}_и}. \quad (19)$$

Передаточная функция (19) делится на p , поэтому система (рис. 4) имеет первый порядок астатизма [15, стр. 178] по отношению к возмущению. Это означает, что постоянное возмущение в установившемся движении не проходит в контур перегрузки, то есть на перегрузку не влияет. Астатизм проявляется еще и в том, что тракт прохождения сигнала $\delta_{рв}^{возм}(p) \Rightarrow \delta_{рв}^{упр}(p)$ с учетом инвертирования знака (см. рис. 4) описывается передаточной функцией

$$W_{\delta_{рв}^{упр}}^{\delta_{рв}^{возм}}(p) = -\frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{-(\bar{k}_{\Delta n_y} p + \bar{k}_и)}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1)p + \bar{k}_и}. \quad (20)$$

Таким образом, после переходного процесса вмешательства возмущения в управление перегрузкой возникает, согласно (20), равновесное состояние в виде $\delta_{рв}^{упр} = -\delta_{рв}^{возм}$, в результате на вход динамического звена отработки перегрузки поступает нулевой сигнал — произошла перебалансировка самолета. Применение изодромного звена типа $B(p)$ (18) нашло широкое применение для балансировки самолета [10] в законах траекторных режимов систем автоматического управления.

Основным ограничением при нахождении параметров синтезируемого астатического закона управления (4) изложенным способом является довольно жесткое условие (15) — требование практически аperiодического движения по перегрузке свободного самолета. Как правило, это условие не выполняется и относительный коэффициент затухания у самолета по перегрузке составляет менее единицы

$$\xi_{n_y} < 1. \tag{21}$$

Коррекция ξ_{n_y} в сторону увеличения осуществляется по требованиям устойчивости и управляемости для ручных режимов управления обычно с помощью статического демпфера, входящего в систему управления самолета. Для современных самолетов эта функция сосредоточена в системе дистанционного управления (СДУ), входящей в состав КСУ. В работе [16] с помощью найденных коэффициентов производных аэродинамических сил и моментов показан способ определения коэффициента демпфирования контура угловой скорости вращательного движения по тангажу, имеющего одинаковый характеристический полином с контуром перегрузки. Покажем способ нахождения коэффициента демпфирования по известным динамическим параметрам свободного движения самолета. Контур по перегрузке свободного самолета с демпфером примет вид, показанный на рис. 5.

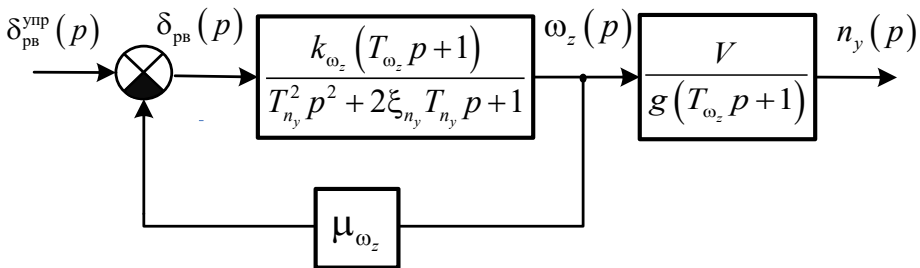


Рис. 5. Структура контура перегрузки с демпфером тангажа

На рис. 5 обозначены: k_{ω_z} и T_{ω_z} — модуль коэффициента усиления и постоянная времени форсирующего звена системы выхода самолета на угловую скорость вращения ω_z , μ_{ω_z} — передаточный коэффициент

демпфера тангажа. Объект управления с демпфером (рис. 5) для последующего замыкания контура перегрузки ПИ-регулятором будет иметь следующую передаточную функцию

$$W_{n_y, \delta}^{\delta_{PB}^{упр}}(p) = \frac{V}{g} \cdot \frac{k_{\omega_z}}{T_{n_y}^2 p^2 + (2\xi_{n_y} T_{n_y} + k_{\omega_z} T_{\omega_z} \mu_{\omega_z}) p + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z} + 1}$$

или

$$W_{n_y, \delta}^{\delta_{PB}^{упр}}(p) = \frac{V}{g} \cdot \frac{k_{\omega_z}^{\Delta}}{(T_{n_y}^{\Delta})^2 p^2 + 2\xi_{n_y}^{\Delta} T_{n_y}^{\Delta} p + 1}, k_{\omega_z}^{\Delta} = \frac{k_{\omega_z}}{1 + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}, T_{n_y}^{\Delta} = \frac{T_{n_y}}{\sqrt{1 + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}},$$

$$\xi_{n_y}^{\Delta} = \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y} + k_{\omega_z} T_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}{2T_{n_y} \sqrt{1 + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}}, \xi_{n_y}^{\Delta} > \xi_{n_y}. \quad (22)$$

Здесь имеют место следующие обозначения: V – истинная скорость полета, g – ускорение свободного падения, $k_{\omega_z}^{\Delta}$ – модуль коэффициента усиления динамического звена угловой скорости ω_z с демпфером, и $T_{n_y}^{\Delta}$ – постоянная времени контуров угловой скорости и перегрузки с демпфером, $\xi_{n_y}^{\Delta}$ – относительный коэффициент затухания контура с демпфером. Из формулы для $\xi_{n_y}^{\Delta}$ (22) определяем выражение для физически значимого коэффициента демпфирования

$$\mu_{\omega_z} = \frac{2T_{n_y} \left[T_{n_y} (\xi_{n_y}^{\Delta})^2 + \xi_{n_y}^{\Delta} \sqrt{T_{n_y}^2 (\xi_{n_y}^{\Delta})^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_{\omega_z} + T_{\omega_z}^2} - \xi_{n_y} T_{\omega_z} \right]}{k_{\omega_z} T_{\omega_z}^2}. \quad (23)$$

При недостаточном затухании колебательного движения по перегрузке можно с помощью формулы (23) для заданного желаемого значения $\xi_{n_y}^{\Delta} \geq 1$ всегда найти соответствующий коэффициент демпфера тангажа для применения предложенной методики расчета коэффициентов (13) и (14) ПИ-регулятора.

Получение простой системы (4) при условии ее существования (15) позволяет применить подход к дальнейшему построению замкнутых систем траекторного управления по типу структур (рис. 3) с использованием методов оптимизации переходного движения по длительности и перерегулированию [7, 18, 19, 20]. Известен метод оптимизации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) [21, 22] для определения параметров регулирования быстродействующей системы, которая по своим частотным свойствам приближалась бы к идеальному фильтру низкой частоты [23]. Для этого АЧХ системы должна быть невозрастающей функция частоты и не иметь всплеска на частоте среза системы.

Для динамического звена второго порядка этому условию соответствует относительный коэффициент затухания, равный $1/\sqrt{2}$.

Этот результат был получен следующим образом. Пусть дана система с передаточной функцией стандартного вида

$$W(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (24)$$

Постоянная времени T — неизменяемый параметр, а относительный коэффициент затухания ξ — регулируемая величина. Используя правила работы с комплексными функциями, найдем квадрат модуля АЧХ системы (24):

$$|W(j\omega)|^2 = W(j\omega) \cdot W(-j\omega) = \frac{1}{T^4 \omega^4 + 2T^2(2\xi^2 - 1)\omega^2 + 1} = A^2(\omega), \quad (25)$$

где $A(\omega)$ — вещественная функция круговой частоты ω , собственно АЧХ системы (24). Исследуем функцию (25) на монотонность убывания и на наличие экстремума при равенстве нулю ее производной

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{\omega T^2(1 - 2\xi^2) - 2\omega^3 T^4}{\sqrt{[T^4 \omega^4 + 2T^2(2\xi^2 - 1)\omega^2 + 1]^3}} = 0. \quad (26)$$

Равенство нулю производной (26) обеспечивает уравнение

$$\omega T^2(1 - 2\xi^2) - 2\omega^3 T^4 = 0,$$

имеющее в особых точках решения при положительных значениях ω , а именно

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_{\text{экстр}} = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{T}. \quad (27)$$

Первая точка ω_0 — начало координатной оси аргумента, вторая точка $\omega_{\text{экстр}}$ есть экстремум в окрестности частоты среза $\omega_{\text{ср}} = 1/T$. При увеличении ξ от нуля до величины $1/\sqrt{2}$ точка экстремума сдвигается от $\omega_{\text{ср}}$ до нуля. Таким образом, экстремум АЧХ при $\xi = 1/\sqrt{2}$ всегда будет находиться в точке нулевой частоты $\omega_{\text{экстр}} = \omega_0 = 0$:

$$\max A(\omega) = A(0), \quad (28)$$

а график АЧХ как невозрастающей функции частоты будет монотонно убывать при увеличении угловой частоты от нуля в точке (28) до бесконечности $\omega \rightarrow \infty$.

Тогда система (24) превращается в фильтр Баттерворта, имеющий «плоскую» амплитудно-частотную характеристику в области низких собственных частот, а на частотах выше частоты среза обладающий резким спадом характеристики. В общем случае для фильтра Баттерворта порядка n темп снижения АЧХ определяется свойствами функции гиперболы порядка $2n$, которая описывает функцию квадрата АЧХ, в нашем случае

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{1}{T^{2n}\omega^{2n} + 1} \Big|_{n=2} = \frac{1}{T^4\omega^4 + 1}. \quad (29)$$

Результат (29), как следует из (25), получается при $\xi = 1/\sqrt{2}$. Известно [24], что системы в варианте структуры и параметров Баттерворта имеют максимальное быстродействие.

Проведем далее замыкание полученного контура перегрузки (8) внешним контуром по сигналу V_y в структуре вложенных контуров (рис. 3), получим передаточную функцию контура отработки заданной вертикальной скорости полета стабилизации $V_y^{\text{зад}}$:

$$W_{V_y}^{V_y^{\text{зад}}}(p) = \frac{gk_{V_y}}{\bar{T}_{n_y}^2 p^3 + 2\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} p^2 + p + gk_{V_y}}. \quad (30)$$

По методике (25...27) отыскания «плоской» без экстремумов АЧХ замкнутой системы с высоким быстродействием получим следующий результат

$$A_{V_y}(\omega) = \sqrt{\left| W_{V_y}^{V_y^{\text{зад}}}(j\omega) \right|^2} = \frac{gk_{V_y}}{\sqrt{\bar{T}_{n_y}^4 \omega^6 + 2\bar{T}_{n_y}^2 (2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1) \omega^4 + (1 - 4\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y}) + g^2 k_{V_y}^2}},$$

$$\frac{dA_{V_y}(\omega)}{d\omega} = \frac{-gk_{V_y} \left[3\bar{T}_{n_y}^4 \omega^5 + 4\bar{T}_{n_y}^2 (2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1) \omega^3 + (1 - 4\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y}) \omega \right]}{\sqrt{\left[\bar{T}_{n_y}^4 \omega^6 + 2\bar{T}_{n_y}^2 (2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1) \omega^4 + (1 - 4\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y}) + g^2 k_{V_y}^2 \right]^3}} = 0,$$

$$\omega_0 = 0, \omega_{\text{экстр}} = \frac{\sqrt{\sqrt{16\bar{\xi}_{n_y}^4 - 16\bar{\xi}_{n_y}^2 + 12\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y} + 1} - 2\bar{\xi}_{n_y}^2 + 2}}{\sqrt{3} \cdot \bar{T}_{n_y}}. \quad (31)$$

Для условия существования экстремума АЧХ только при нулевой частоте $\omega_{\text{экстр}} = 0$ на основании (31) имеет место единственное решение

по коэффициенту k_{V_y}

$$k_{V_y} = \frac{1}{4g\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}}, \quad (32)$$

которое определяет коэффициент k_{V_y} настройки контура вертикальной скорости в функции только параметров контура перегрузки \bar{T}_{n_y} и $\bar{\xi}_{n_y}$. Заметим, что при полученном выражении для k_{V_y} (32) и при значении $\bar{\xi}_{n_y} = 1/\sqrt{2}$ в знаменателе модуля АЧХ (19) останется полином только с максимальной (шестой) степенью ω^6 в структуре (29) и система (30) превращается в фильтр Баттерворта третьей степени.

Продолжим замыкание полученного траекторного контура V_y внешним контуром стабилизации высоты полета, передаточная функция которого, с учетом (32), примет вид:

$$W_H^{H^{3ад}}(p) = \frac{k_H}{4\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 p^4 + 8\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^2 p^3 + 4\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} p^2 + p + k_H}. \quad (33)$$

Соответствующий (27) квадрат АЧХ будет иметь выражение

$$A_H^2(\omega) = \frac{k_H^2}{16\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6\omega^8 + 32\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^4(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)\omega^6 + 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H \omega^4 + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H)\omega^2 + k_H^2}, \quad (34)$$

а производная АЧХ, с учетом (34), примет вид

$$\frac{dA_H(\omega)}{d\omega} = \frac{-k_H \left[64\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6\omega^7 + 96\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^4(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)\omega^5 + 16\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H \omega^3 + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H)\omega \right]}{\sqrt{\left[16\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6\omega^8 + 32\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^4(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)\omega^6 + 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H \omega^4 + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H)\omega^2 + k_H^2 \right]^3}}. \quad (35)$$

Нетривиальное равенство нулю производной АЧХ (35) обеспечивается решением кубического уравнения

$$64\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6 y^3 + 96\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^5(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)y^2 + 16\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H y + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H) = 0, \quad y = \omega^2. \quad (36)$$

Единственный действительный корень $y_1(k_H, \bar{T}_{n_y}, \bar{\xi}_{n_y})$ уравнения (36) является сложной функцией входящих в нее параметров (не показана в силу громоздкости формул).

Для обеспечения максимума АЧХ только в одной точке $\omega = 0$ достаточно найти решение относительно настраиваемого коэффициента k_H из уравнения

$$y_1(k_H, \bar{T}_{n_y}, \bar{\xi}_{n_y}) = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) имеет единственное аналитическое решение относительно аргумента k_H :

$$k_H = \frac{1}{8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}}. \quad (38)$$

Заметим, что найденные формулы (32) и (38) справедливы при любых значениях относительного коэффициента затухания ξ_{n_y} и постоянной времени T_{n_y} контура перегрузки устойчивого свободного самолета, а не только при выполнении условия (15). Главным основанием справедливости полученных общих решений (32) и (38) является простая структура исходного контура перегрузки, к которой была приведена замкнутая система с пропорционально-интегральным регулятором (4) перегрузки.

Покажем графики переходных процессов контуров V_y (рис. 6) и H (рис. 7) с найденными коэффициентами настроек (32) и (38) для исходных параметров $\xi_{n_y} = 1$ и $T_{n_y} = 0,7$ с при подаче на вход единичных ступенек.

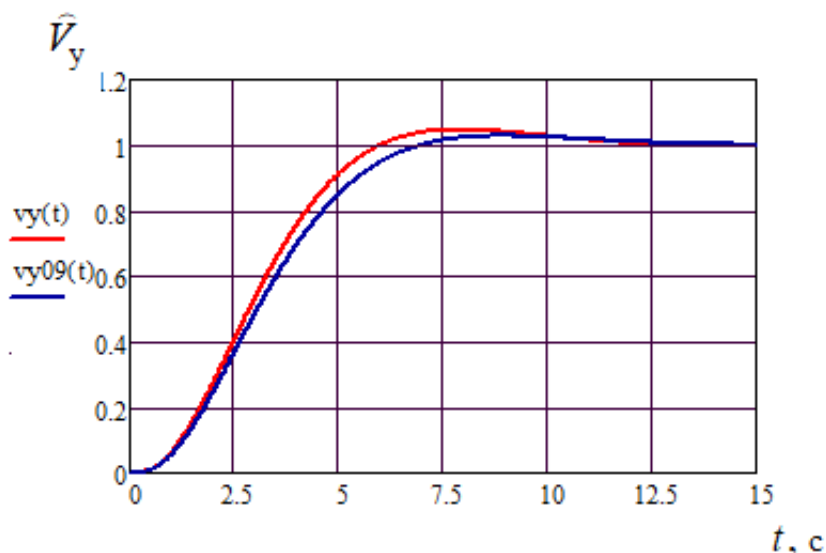


Рис. 6. Переходный процесс по вертикальной скорости полета

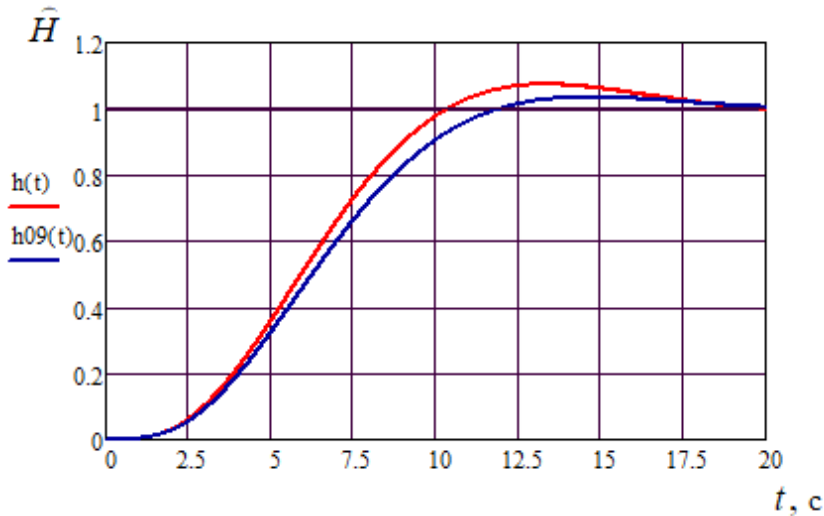


Рис. 7. Переходный процесс по высоте полета

На рис. 6, 7 красным цветом обозначены кривые переходных движений при настройках по формулам (26) и (32), соответственно перерегулирование по V_y составляет 4,7%, а по высоте 7,3%. В работе [25] по методу корневого годографа показано влияние уменьшения коэффициента прямого усиления на снижение колебательности движения и, как следствие, уменьшения перерегулирования. Для рассматриваемого варианта объединения контуров траекторных систем достаточно уменьшить соответствующие коэффициенты усиления k_{V_y} и k_H на 10% с получением перерегулирований 2,8% по V_y и 3,4% по H . Эти графики на рис. 6, 7 показаны синим цветом. При этом время регулирования несущественно возрастает на 1,0 – 1,5 секунды.

Метод построения гладкой амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы управления, не имеющей максимумов на своем спадающем участке, позволяет найти наиболее быстрое переходное движение по вертикальной скорости и высоте полета самолета без расчета кривой переходного процесса. Фактически этот метод является методом оптимизации АЧХ систем с простыми структурами, который позволяет обеспечивать высокое качество и быстродействие процессов, в нашем случае, процессов траекторного управления.

В целях получения общего подхода к формированию управления внутренним контуром перегрузки с астатизмом по возмущению в варианте (2), (5), в том числе при $\xi_{n_y} < 1$, предложим методику корневого анализа качества переходного процесса по перегрузке.

Начнем с рассмотрения полученного результата редукции интегрального контура перегрузки при условии (15). Представим передаточную функцию замкнутого контура перегрузки (5) в виде, удобном для исследования ее корней: нулей и полюсов.

$$W_{n_y}^{n_{y\text{зад}}} (p) = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y}}{T_{n_y}^2} \bar{W}(p), \quad \bar{W}(p) = \frac{p + \frac{\bar{k}_u}{\bar{k}_{\Delta n_y}}}{p^3 + \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}} p^2 + \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2} p + \frac{\bar{k}_u}{T_{n_y}^2}}. \quad (39)$$

Нормированную с точностью до постоянного множителя передаточную функцию $\bar{W}(p)$ устойчивого контура перегрузки, сохраняющую динамические свойства передаточной функции $W_{n_y}^{n_{y\text{зад}}}$, представим в разложении на множители [26, стр. 221] с одним действительным корнем p_1 и парой комплексно сопряженных корней p_2 и p_3 , а именно

$$\bar{W}(p) = \frac{p - p_0}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)}, \quad p_0 = -\alpha_0, \quad p_1 = -\alpha_1, \quad p_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\beta$$

или в развернутом виде

$$\bar{W}(p) = \frac{p + \alpha_0}{(p + \alpha_1)(p^2 + 2\alpha_2 p + \alpha_2^2 + \beta_2^2)}. \quad (40)$$

Сопоставляя множитель второго порядка в характеристическом полиноме (40) со множителем стандартного вида $p^2 + 2\xi_2 \omega p + \omega^2$, $\omega = 1/T$, где T — постоянная времени, получим $2\alpha_2 = 2\xi_2 \omega$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = \omega^2$, отсюда

$$\omega = \frac{\alpha_2}{\xi_2}, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40), получим характеристический полином в развернутом виде:

$$(p + \alpha_1) \left(p^2 + 2\alpha_2 p + \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} \right) = p^3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) p^2 + \left(2\alpha_1 \alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} \right) p + \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\xi_2^2}. \quad (42)$$

Напомним, что условием делимости полинома знаменателя (42) на полином числителя в варианте представления системы в виде (39), (40) является равенство их корней, а именно

$$\alpha_1 = \alpha_0 = \frac{\bar{k}_u}{\bar{k}_{\Delta n_y}}. \quad (43)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной полиномов (39) и (40), получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_n}{T_{n_y}^2}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{2\alpha_2\bar{k}_n}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_2^2}{\bar{k}_{\Delta n_y}\xi_2^2} = \frac{1}{T_{n_y}^2}. \end{array} \right. \quad (44)$$

Потребуем сохранения в редуцированной передаточной функции (5) постоянной времени $\bar{T}_{n_y} = T_{n_y}$, равной постоянной времени исходного контура перегрузки (1), для исключения ее увеличения при возможных значениях $\bar{k}_{\Delta n_y} < 1$, что приведет к затягиванию переходного движения. Для этого должно выполняться условие

$$\bar{k}_{\Delta n_y} = 1. \quad (45)$$

Тогда, с учетом (45), система (44) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{2\alpha_2\bar{k}_n}{\xi_2^2} = \frac{2}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_2^2}{2\xi_2^2} = \frac{1}{T_{n_y}^2}. \end{array} \right. \quad (46)$$

Система уравнений (46) будет иметь решение

$$\alpha_2 = \frac{\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{2T_{n_y}}, \quad \bar{k}_n = \frac{\xi_{n_y} - \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{T_{n_y}}, \quad \xi_2 = \frac{\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{2}. \quad (47)$$

Найдем условия получения оптимальной по быстродействию редуцированной системы второго порядка, у которой относительный коэффициент затухания равен

$$\xi_2 = 1/\sqrt{2}. \quad (48)$$

Из (47) при условии (48) получаем, что относительный коэффициент затухания исходной системы должен быть равен опорному значению

$$\xi_{n_y}^{\text{опор}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1,0607. \quad (49)$$

В этом случае также выполняется равенство

$$\alpha_2 = \bar{k}_{\text{и}} = \frac{1}{T_{n_y} \sqrt{2}}. \quad (50)$$

Обратим внимание, что, с учетом (50), получен результат, когда $\bar{k}_{\text{и}} = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Равенство действительной части колебательного корня α_2 действительному корню α_1 для системы третьего порядка, согласно диаграмме Вышнеградского [27], обеспечивает наибольшее быстродействие переходного процесса. На основании этого вернемся к рассмотрению системы (44) при $\bar{k}_{\text{и}} = \alpha$ для величин ξ_{n_y} , не связанных равенством (49). Тогда можно представить на рассмотрение систему:

$$\begin{cases} 3\alpha = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} = \frac{1}{T_{n_y}^2}. \end{cases} \quad (51)$$

Решением системы (51) будут следующие выражения

$$\alpha_2 = \bar{k}_{\text{и}} = \frac{2\xi_{n_y}}{3T_{n_y}}, \quad \bar{k}_{\Delta n_y} = \frac{8}{9}\xi_{n_y}^2, \quad \xi_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{3}. \quad (52)$$

Тогда в окрестности «опорного» значения $\xi_{n_y}^{\text{опор}} = 1,0607$ для значений относительного коэффициента затухания контура перегрузки свободного самолета в интервале

$$\xi_{n_y} = (1/\sqrt{2}, 1,2) \quad (53)$$

определим амплитудно-частотные характеристики астатической системы 3-го порядка (5) в сравнении с АЧХ оптимальной системы второго порядка (8), к которой сводится система при опорном значении (49) с коэффициентами (52).

Квадрат модуля АЧХ системы (5):

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y}^2 \omega^2 + \bar{k}_n^2}{T_{n_y}^4 \omega^6 + 2T_{n_y}^2 (2\xi_{n_y}^2 - 1 - \bar{k}_{\Delta n_y}) \omega^4 + (\bar{k}_{\Delta n_y}^2 + 2\bar{k}_{\Delta n_y} - 4\xi_{n_y} T_{n_y} \bar{k}_n + 1) \omega^2 + \bar{k}_n^2}. \quad (54)$$

Соответствующая АЧХ после подстановки в (54) коэффициентов (47) примет вид:

$$A_3(\omega) = \sqrt{\frac{64\xi_{n_y}^4 T_{n_y}^2 \omega^2 + 36\xi_{n_y}^2}{81T_{n_y}^6 \omega^6 + 18T_{n_y}^4 (10\xi_{n_y}^2 - 9) \omega^4 + T_{n_y}^2 (64\xi_{n_y}^4 - 72\xi_{n_y}^2 + 81) \omega^2 + 36\xi_{n_y}^2}}. \quad (55)$$

Амплитудно-частотная характеристика эталонного контура обработки перегрузки второго порядка типа (24) с постоянной времени T_{n_y} и $\xi_{n_y}^{эт} = 1/\sqrt{2}$, к которому по приведенной выше методике сведен астатический контур перегрузки, имеет вид

$$A_{эт}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{T_{n_y}^4 \omega^4 + 1}}. \quad (56)$$

В совпадении выражений (55) и (56) несложно убедиться при подстановке в (55) опорного значения $\xi_{n_y}^{опор} = 3/(2\sqrt{2})$ (49), при котором обеспечивается аналитическая редукция исследуемого контура перегрузки к простой системе второго порядка, имеющей максимальное быстродействие.

На рис. 8 показаны графики АЧХ астатического контура перегрузки 3-го порядка для крайних значений интервала (48): $\xi_{n_y} = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ и $\xi_{n_y} = 1,2$ в сравнении с эталонной АЧХ оптимальной системы 2-го порядка.

Рисунок 9 иллюстрирует степень сближения АЧХ контура перегрузки с эталонной АЧХ при различных относительных коэффициентах затухания вблизи $\xi_{n_y} \approx 1$.

Графики стандартных переходных движений контура перегрузки при постоянной времени $T_{n_y} = 0,6$ с в сравнении с переходным процессом (показан красным цветом) эталонной системой второго порядка при $\xi_{et} = 1/\sqrt{2}$ приведены на рис. 10 (стр. 64).

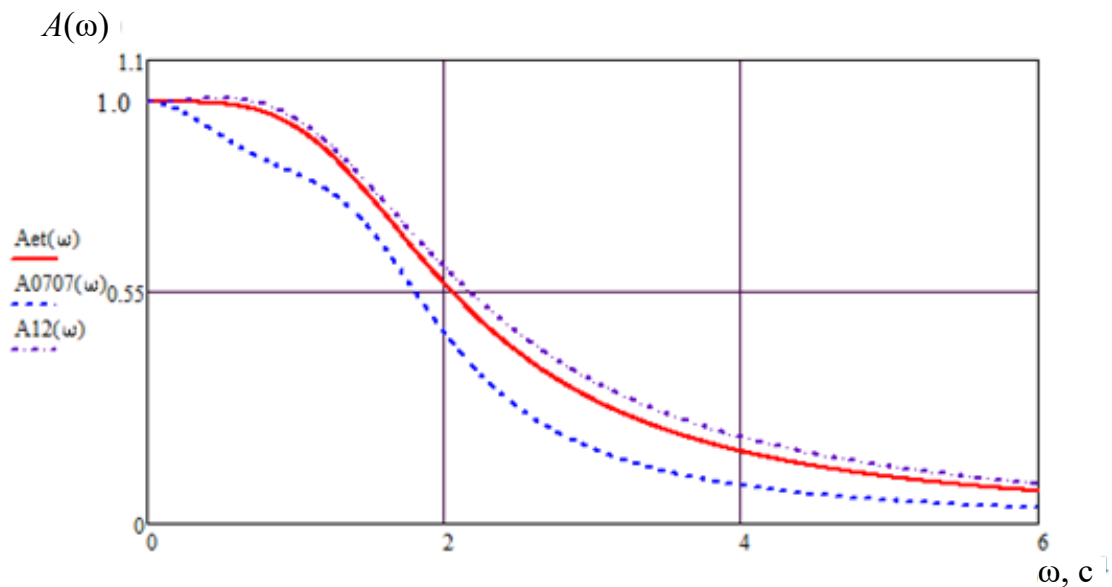


Рис. 8. Разброс АЧХ контура перегрузки в диапазоне от $\xi_{n_y} = 0,707$ до $\xi_{n_y} = 1,2$

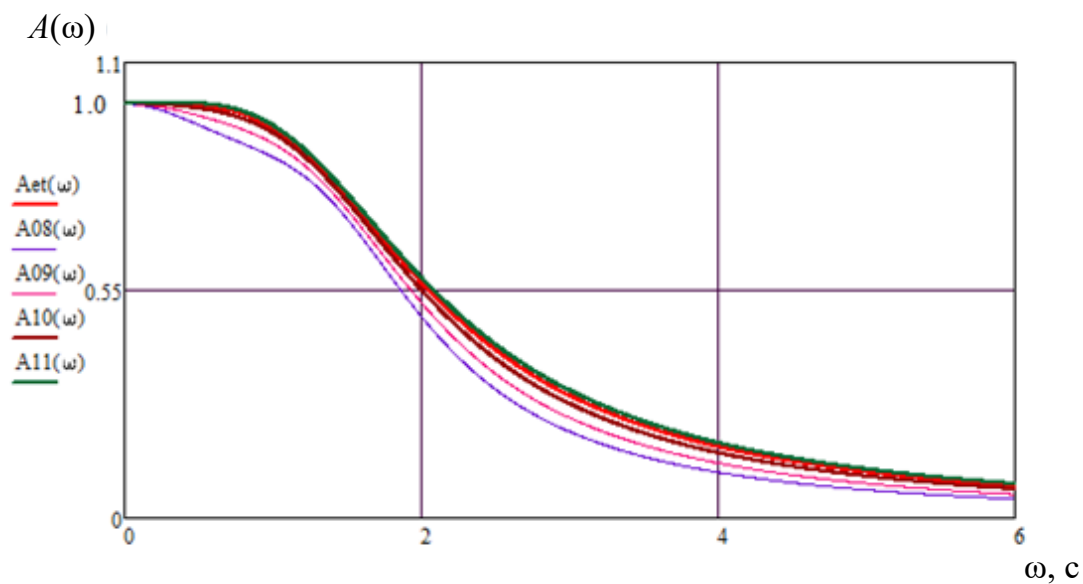


Рис. 9. АЧХ контура перегрузки для значений $\xi_{n_y} = 0,8, 0,9, 1,0, 1,1$ соответственно

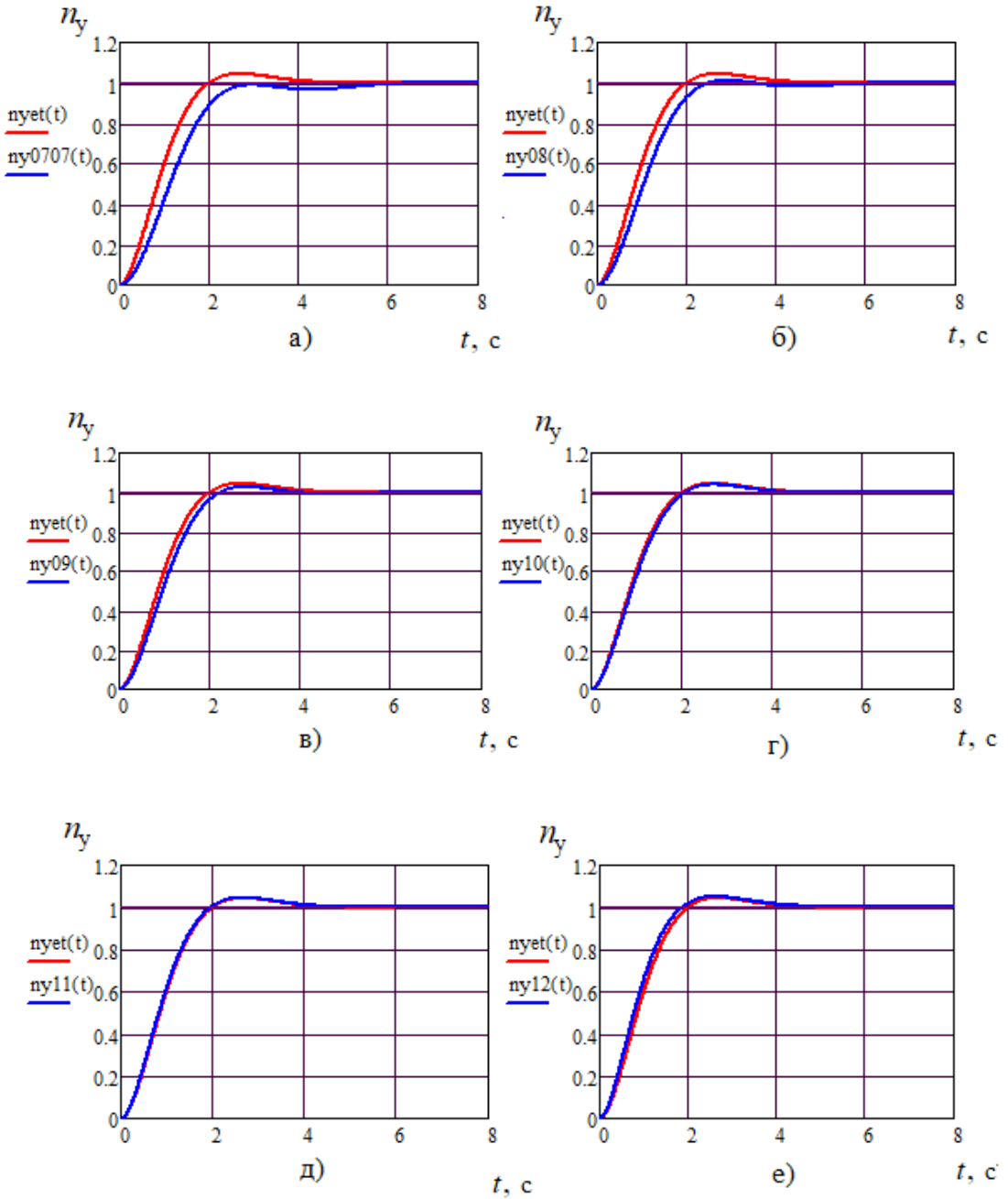


Рис. 10. Графики переходных процессов астатического контура перегрузки с относительными коэффициентами затухания исходной системы:

а) $\xi_{n_y} = 0,707$, б) $\xi_{n_y} = 0,8$,

в) $\xi_{n_y} = 0,9$, г) $\xi_{n_y} = 1,0$,

д) $\xi_{n_y} = 1,1$, е) $\xi_{n_y} = 1,2$

Интересным эффектом обладает полученный результат синтеза астатического контура перегрузки — перерегулирование не зависит от постоянной времени T_{n_y} , а только от ξ_{n_y} . Этот факт иллюстрирует рис. 11, на котором показаны графики переходных процессов при начальных значениях модели контура перегрузки $\xi_{n_y} = 1,1$ и $T_{n_y} = 0,3$ с (красного цвета), $T_{n_y} = 0,6$ с (синего цвета) и $T_{n_y} = 1$ с (зеленого цвета).

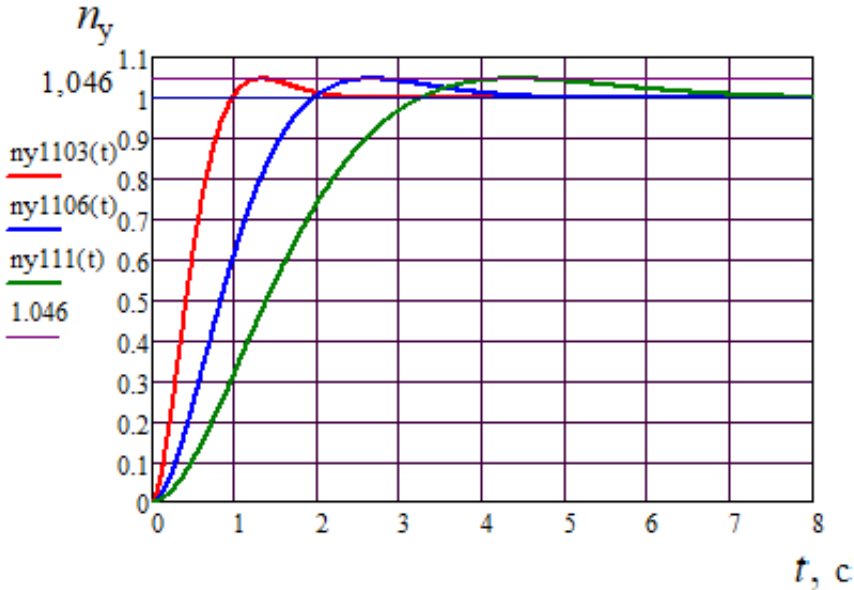


Рис. 11. Сравнение переходных процессов с разными постоянными времени и одинаковым относительном коэффициенте затухания

Как следует из рассмотрения графиков для всех вариантов перерегулирование одинаково и составляет 4,6%.

Покажем, что полученный результат синтеза астатического контура перегрузки является оптимально полученным в смысле минимума интегральной квадратичной оценки [28] разности переходных процессов эталонной быстродействующей модели

$$W_{\text{эт}}(p) = \frac{1}{T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{\text{opt}} T_{n_y} p + 1} \quad (57)$$

и системы обработки перегрузки (5). Формулировка задачи состоит в следующем. Дана передаточная функция разности $\Delta h(t) \doteq L^{-1}[W_{\Delta h}(p)]$ переходных процессов: оптимального желаемого (57) и по выше приведенной методике процесса обработки перегрузки (5)

$$W_{\Delta}(p) = \frac{1}{p \left(T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{\text{opt}} T_{n_y} p + 1 \right)} - \frac{\frac{\bar{k}_{\Delta n_y}}{\bar{k}_и} p + 1}{p \left(\frac{T_{n_y}^2}{\bar{k}_и} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{\bar{k}_и} p^2 + \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{\bar{k}_и} p + 1 \right)}. \quad (58)$$

С учетом выражений для коэффициентов закона управления (52) передаточная функция разности (58) преобразовывается к виду

$$W_{\Delta}(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1},$$

$$b_2 = T_{n_y}^3 (9 - 8\xi_{n_y}^2), \quad b_1 = T_{n_y}^2 \xi_{n_y} (12 - 16\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}}), \quad b_0 = T_{n_y} (9 - 12\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}}),$$

$$a_5 = 9T_{n_y}^5, \quad a_4 = 18T_{n_y}^4 (\xi_{n_y} + \xi_{\text{opt}}), \quad a_3 = 2T_{n_y}^3 (4\xi_{n_y}^2 + 18\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}} + 9),$$

$$a_2 = 2T_{n_y}^2 (8\xi_{n_y}^2 \xi_{\text{opt}} + 12\xi_{n_y} + 9\xi_{\text{opt}}), \quad a_1 = T_{n_y} (8\xi_{n_y}^2 + 12\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}} + 9), \quad a_0 = 6\xi_{n_y}. \quad (59)$$

Интегральная квадратичная оценка разности процессов, описываемых передаточной функцией (59), определяется [15] по формуле

$$I_{\Delta h} = \frac{\det B_{\Delta h}}{2a_5 \det A_{\Delta h}},$$

$$A_{\Delta h} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 & -a_5 \\ 0 & 0 & a_0 & -a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B_{\Delta h} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 & -a_5 \\ B_0 & B_1 & B_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

$$B_0 = b_0^2, \quad B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2, \quad B_2 = b_2^2.$$

Скалярная оценка (60) является функцией трех аргументов $I_{\Delta h}(T_{n_y}, \xi_{n_y}, \xi_{\text{opt}})$, аналитическое выражение которой очень громоздко и в работе не приведено. Параметры T_{n_y}, ξ_{n_y} известны, параметр ξ_{opt} является искомым для наиболее близких между собой переходных процессов в работе сравниваемых систем.

Экстремум среднего квадрата (60) будем искать в функции ξ_{opt} , для этого найдем производную оценки (60) и приравняем ее к нулю

$$\frac{\partial I_{\Delta h}(T_{n_y}, \xi_{n_y}, \xi_{opt})}{\partial \xi_{opt}} = 0. \quad (61)$$

Уравнение (61) представляет собой алгебраическую функцию 7-го порядка относительно ξ_{opt} , поэтому решение может быть найдено только численно. Численные решения ξ_{opt} получены для относительных коэффициентов затухания ξ_{n_y} в интервале значений (53) исходной модели движения по перегрузке свободного самолета. В таблице 1 приведено сравнение величин перерегулирования астатического контура (рис. 10) и приближенной к нему оптимальной в смысле минимальной квадратичной оценки системы (57) 2-го порядка.

Таблица 1.

Система 3-го порядка	ξ_{n_y}	0,707	0,8	0,9	1,0	1,0607	1,1	1,2
	$\delta_{n_y}, \%$	≈ 0	1,1	2,7	3,8	4,32	4,6	4,96
Система 2-го порядка	ξ_{opt}	0,9932	0,88643	0,8016	0,73807	0,707	0,68947	0,65167
	$\delta_{n_y}, \%$	0	0,24	2,48	3,12	4,32	5,03	6,73

В результате исследований подтверждено, что оптимальные в смысле минимума среднего квадрата разности переходных процессов приведенные в табл. 1 величины ξ_{opt} не зависят от постоянной времени свободного движения самолета по перегрузке.

Анализ табл. 1 показывает, что в диапазоне относительных коэффициентов затухания $\xi_{n_y} \in (0,9, 1,1)$ перерегулирования обеих систем близки между собой и составляют (2,5...5)%. Этот факт позволяет замещать при синтезе контуров траекторного движения дробно-рациональную передаточную функцию контура с ПИ-регулятором на передаточную функцию простого вида (57) 2-го порядка.

Таким образом, способ применения интегральной квадратичной оценки [15, 21, 28] для приближения передаточной функции астатического контура перегрузки третьего порядка к передаточной функции второго порядка простого типа дает возможность использовать представленный метод оптимизации АЧХ траекторных контуров по V_y (31), (32) и по H (35), (38).

Полная передаточная функция контура вертикальной перегрузки с астатическими свойствами по управлению и возмущению имеет вид:

$$\bar{W}_{V_y}^{V_y \text{ зад}}(p) = \frac{g\bar{k}_{V_y}(\bar{k}_{\Delta n_y}p + \bar{k}_и)}{T_{n_y}^2 p^4 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^3 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1)p^2 + (\bar{k}_и + g\bar{k}_{V_y}\bar{k}_{\Delta n_y})p + g\bar{k}_{V_y}\bar{k}_и}. \quad (62)$$

Коэффициенты настройки $\bar{k}_{\Delta n_y}$ и $\bar{k}_и$ находятся по формулам (52), а параметр k_{V_y} по формуле (32) с коэффициентом взвешивания 0,9 и найденным по табл. 1 оптимальным относительным коэффициентом затухания

$$k_{V_y} = \frac{0,9}{4g\xi_{\text{opt}}T_{n_y}}. \quad (63)$$

Использование эквивалентной простой системы контура перегрузки в смысле минимума интегральной квадратичной оценки ее отклонения от движения системы 3-го порядка с ПИ-регулятором позволяет с коррекцией (63) применять ранее полученное решение синтеза простых систем траекторного управления.

На рис. 12 в сравнении с рис. 6 показан переходный процесс по \hat{V}_y (в относительных единицах) системы (62) при тех же параметрах $\xi_{n_y} = 1$ и $T_{n_y} = 0,7$ с, для которых при условии (15) обеспечивается редукция контура перегрузки с ПИ-регулятором до простой системы 2-го порядка (4), с переходным процессом системы (30) с оптимальной АЧХ.

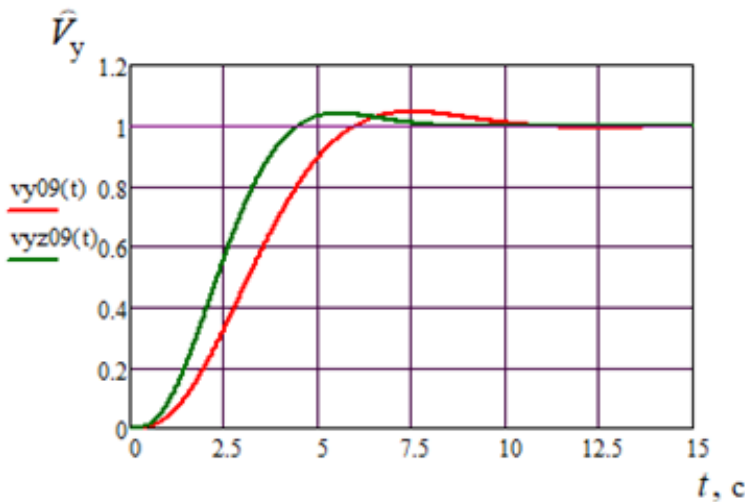


Рис. 12. Переходный процесс по вертикальной скорости с астатическим контуром n_y

Сравнение переходных движений с оптимальной АЧХ (кривая красного цвета) и с оптимальным контуром перегрузки (кривая зеленого цвета) показывает уменьшение времени срабатывания для последнего на 1,5 секунды и снижения перерегулирования с 4,7% до 3,9%.

Полная передаточная функция контура высоты с астатическими свойствами по управлению и возмущению примет вид

$$\bar{W}_H^{H^{3ад}}(p) = \frac{g\bar{k}_H k_{V_y} (\bar{k}_{\Delta n_y} p + \bar{k}_n)}{T_{n_y}^2 p^5 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^4 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1) p^3 + (\bar{k}_n + gk_{V_y} \bar{k}_{\Delta n_y}) p^2 + gk_{V_y} (\bar{k}_n + \bar{k}_H \bar{k}_{\Delta n_y}) p + g\bar{k}_H k_{V_y} \bar{k}_n}. \quad (64)$$

В (64) используются коэффициенты $\bar{k}_{\Delta n_y}$ и \bar{k}_n (52), k_{V_y} (32) и коэффициент \bar{k}_H :

$$\bar{k}_H = \frac{0,9}{8\xi_{opt} T_{n_y}}. \quad (65)$$

Рисунок 13 иллюстрирует повышение быстродействия и качества переходного процесса системы (64) по сравнению с системой (33) при одинаковой коррекции (65) коэффициента \bar{k}_H .

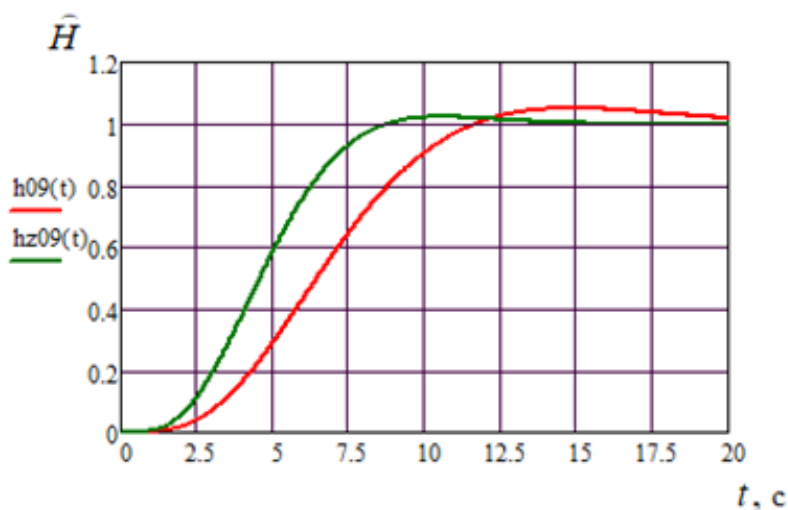


Рис. 13. Переходный процесс по высоте с оптимальным контуром перегрузки

Как видно из графиков, время срабатывания уменьшается на 3 секунды, а перерегулирование с 3,4% до 2,2%.

Таким образом, системы (5), (62) и (64) объединенные в последовательно замыкаемые контура представляют собой единую систему автоматического траекторного управления самолета — траекторный автопилот, обладающий максимальным быстродействием и высоким качеством процессов управления, а синтез которого осуществляется аналитически по исходным характеристикам свободного самолета.

Литература

1. *Гуськов Ю. П., Загайнов Г. И., Колбасов В. Н.* Управление полетом самолетов: Учебник для авиационных вузов. — М.: Машиностроение. 1980. — 213 с.
2. *Аэромеханика самолета.* / Под ред. А. Ф. Бочкарева. — М.: Машиностроение. 1977. — 246 с.
3. *Михалев И. А. и др.* Системы автоматического управления самолетом. / И. А. Михалев, Б. Н. Окоемов, М. С. Чикулаев. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение. 1987. — 240 с.
4. *Панкратов В. В.* Автоматическое управление электроприводами. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. — 200 с.
5. *Шрейнер Р. Т.* Системы подчиненного регулирования электроприводов: учеб. пособие. / Р. Т. Шрейнер. — Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет» РГППУ, 2008. — 279 с.
6. *Усынин Ю. С.* Теория автоматического управления учебное пособие для вузов. / Ю. С. Усынин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. — 176 с.
7. *Рендал У. Биард, Тимоти У. МакЛэйн.* Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2015. — 312 с.

8. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.
9. *Байбородин Ю. В., Драбкин В. В., Сменковский Е. Г., Унгуриян С. Г.* Бортовые системы управления полетом. – М.: Транспорт, 1975. – 336 с.
10. Автоматизированное управление самолетами и вертолетами. / *С. М. Федоров, В. В. Драбкин, О. И. Михайлов, В. М. Кейн.* Под ред. С. М. Федорова. – М.: Транспорт, 1977. – 246 с.
11. *Денисенко В. В.* ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации. / Современные технологии автоматизации. – М.: СТА-ПРЕСС, № 4, 2006. – С. 66–74. № 1, 2007. – С. 78–88.
12. *Кочетков Ю. А.* Основы автоматики авиационного оборудования. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1975. – 454 с.
13. *Щепетов А. Г.* Об оптимальных формах переходного процесса и амплитудночастотной характеристики линейной динамической системы. // Проблемы управления. – М.: ИПУ РАН, 2008, выпуск 3. – С. 30–36.
14. *Попов Е. П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1989. – С. 304.
15. *Кочетков Ю. А.* Основы автоматики авиационного оборудования. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1995. – 574 с.
16. *Кузин А. А., Куликов В. Е.* Применение аналитического синтеза режима стабилизации угла наклона траектории полета самолета по результатам идентификации динамических параметров углового движения. // Навигация и управление летательными аппаратами. – М.: МИЭА, 2023. – Вып. 42, – С. 45–62.
17. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – С. 768.
18. *Ерофеев А. А.* Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 2003. – С. 302.

19. *Кориков А. М.* Основы теории управления: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – С. 392.
20. *Душин С. Е., Зотов Н. С., Имаев Д. Х.* и др. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. / Под ред. В. Б. Яковлева. – М.: Высшая школа, 2005. – С. 567.
21. *Красовский А. А., Поспелов Г. С.* Основы автоматики и технической кибернетики. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 600 с.
22. *Попов Е. П.* Динамика систем автоматического регулирования. – М.: Гостехиздат, 1954. – 798 с.
23. *Лэм Г.* Аналоговые и цифровые фильтры: расчет и реализация: пер. с англ. / Гарри Лэм; пер. В. Л. Левин, М. Н. Микшис, И. Н. Теплюк; ред. перевода И. Н. Теплюк. – Москва: Мир, 1982. – 592 с.
24. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов по специальности «Радиотехника». / С. И. Баскаков, 2003. – 462 с.
25. *Куликов В. Е.* Синтез траекторного управления тяжелого самолета в вертикальной плоскости по методу обратной задачи модального управления. // Навигация и управление летательными аппаратами. – М.: МИЭА. Вып. 42, 2023. – С. 29–44.
26. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 432 с.
27. *Макаров И. М., Менский Б. М.* Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.
28. *Иващенко Н. Н.* Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. Учебник для вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М., «Машиностроение», 1978. – 736 с.