УДК 629.7.05

ШЕСТНАДЦАТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА. МОДИФИКАЦИЯ 2

Юрий Павлович НИКОЛАЕВ, *д-р физ.-мат. наук,*
Николай Андреевич КОЗЕЛЬКО,
E-mail: aomiea@aviapribor.ru
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Рассматривается модификация нерешенной к настоящему времени шестнадцатой проблемы Гильберта. Предлагается простое необходимое и простое достаточное условия устойчивости, удобные для решения прикладных задач. Данные условия устойчивости применяются при исследовании геометрии многомерной области устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического полинома.

Ключевые слова: *Шестнадцатая проблема Гильберта, трактовка В.И. Арнольда, алгебраическая кривая, полиномы Эрмита – Билера, устойчивость линейных систем, критерий устойчивости Гурвица, многомерная область устойчивости, трехдиагональная матрица (матрица Якоби – Гурвица), линейные системы управления.*

HILBERT SIXTEENTH PROBLEM. MODIFICATION II

Yury P. NIKOLAEV, *D. Sc. in Phys and Math,*
Nikolay A. KOZELKO,
E-mail: aomiea@aviapribor.ru
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The article considers a modification of currently unsolved Hilbert sixteenth problem. It proposes simple necessary and sufficient stability conditions, convenient for applied problem solving. These stability conditions are applied during the study of the geometry of multivariable stability domain in characteristic polynomial coefficients space.

Keywords: *Hilbert sixteenth problem, V. I. Arnold interpretation, algebraic curve, Hermite-Biehler polynomials, stability of linear systems, Hurwitz stability criterion, multidimensional stability domain, tridiagonal matrix (Jacobian-Hurwitz matrix), linear control systems.*

1. Введение

Проблемы Гильберта [1, 2] — список из 23 кардинальных проблем математики, представленный Давидом Гильбертом на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Тогда эти проблемы (охватывающие основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, группы Ли, вещественный и комплексный анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и теорию вероятностей, а также вариационное исчисление) не были решены.

На данный момент решены 17 проблем из 23.

Шестнадцатая проблема Гильберта — одна из нерешенных к настоящему времени задач. Исходно проблема называлась «Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей» (*Problem der Topologie algebraischer Kurven und Fldchen*).

В настоящей работе используется следующая трактовка Шестнадцатой проблемы Гильберта [3].

Пусть f — полином (с вещественными коэффициентами) степени n от двух переменных x и y.

Вопрос Гильберта состоит в том, чтобы исследовать, какое топологическое строение может иметь алгебраическая кривая, заданная на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x и y уравнением $f(x, y) = 0$.

Определение. Алгебраическая кривая, или плоская алгебраическая кривая — это геометрическое место (множество) точек на плоскости (O; x, y), которое определяется как множество нулей полинома от двух переменных. Степенью (или порядком) n этой кривой называется степень этого полинома.

Частной, но важной для практики проектирования систем управления, является задача определения простых алгебраических условий устойчивости для полинома.

В статье рассматриваются два дополняющих друг друга варианта решения этой задачи: с использованием критерия Гурвица (необходимые условия устойчивости) и с применением результатов работ [16, 17] — (достаточные условия устойчивости).

2. Постановка задачи. Разработка простых необходимых (достаточных) условий устойчивости

Задача отыскания критерия устойчивости для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, была сформулирована Максвеллом в 1868 году.

Максвелл обратился к членам Лондонского королевского общества с предложением подыскать какой-то метод, который бы не требовал прямого нахождения всех корней характеристического полинома, но давал бы суждение только о знаке их вещественной части.

На просьбу Максвелла откликнулся коллега Максвелла по Кембриджскому университету, ставший профессором этого же университета, Эдвард Раус (*Edward Routh*). В 1873 г. он опубликовал знаменитый алгебраический критерий, носящий его имя.

В конце XIX века словацкий инженер, создатель теории регулирования турбин, А. Стодола, не зная работ Рауса, доказал необходимое условие устойчивости полиномов с вещественными коэффициентами [4, 5] и поставил задачу об отыскании необходимых и достаточных условий перед выдающимся немецким математиком А. Гурвицем (*Adolf Hurwitz*).

Гурвиц работал профессором Политехнической школы в Цюрихе. Среди его студентов в Цюрихе были Давид Гильберт и Альберт Эйнштейн.

Алгебраический критерий устойчивости системы любого порядка, предложенный Гурвицем в 1895 году, предполагает, как известно, следующую процедуру:

- По определенному правилу из коэффициентов характеристического полинома системы составляется прямоугольная матрица того же порядка.
- Находятся все диагональные миноры этой матрицы.
- Необходимым и достаточным условием отрицательности вещественных частей всех корней, а следовательно, и устойчивости системы является положительность всех этих миноров.

Примечание. Критерий Гурвица, как было установлено позднее (см. [6, 7]), тесно связан с более ранней статьей Эрмита, признанного лидера математиков Франции во второй половине XIX века. В этой работе [8] была установлена зависимость между числом корней комплексного полинома $f(z)$, расположенных внутри какой-либо полуплоскости (или даже внутри какого-либо прямоугольника), и сигнатурой некоторой квадратичной формы. Однако результаты Эрмита не были доведены до такого состояния, чтобы они могли быть использованы специалистами, работающими в прикладных областях. Поэтому работа Эрмита и не получила соответствующего распространения.

В данной работе предлагается модификация критерия Гурвица с целью получения простых необходимых (достаточных) условий устойчивости, удобных для решения прикладных задач, в частности, при исследовании геометрии многомерной области устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического полинома [9, 10].

3. Исходные данные. Критерий Гурвица

Критерий Гурвица

Метод работает с коэффициентами характеристического уравнения (полинома) системы. Пусть характеристический полином $P(s)$ представлен в виде:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n, \quad a_n > 0, \tag{3.1}$$

где s — оператор Лапласа.

Полином $P(s)$ называют устойчивым, если все корни уравнения $P(s) = 0$ имеют отрицательную вещественную часть.

В статье рассматриваются только полиномы с положительными коэффициентами.

Из коэффициентов характеристического полинома строится определитель Гурвица по алгоритму:

1) по главной диагонали слева направо выставляются коэффициенты характеристического полинома от a_0 до a_{n-1};

2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули.

Для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы все n главных диагональных миноров определителя Гурвица были положительны, при условии $a_n > 0$. Эти миноры называются определителями Гурвица.

Современный анализ критериев устойчивости Рауса−Гурвица — см., например, [11].

Примечание. Пусть дана квадратная матрица A, n-ого порядка. *Минором* некоторого элемента a_{ij}, *определителя матрицы* называется *определитель* $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij}. Обозначается M_{ij}.

Диагональным минором матрицы A называется минор, диагональные элементы которого являются диагональными элементами матрицы A.

Главным диагональным минором матрицы A порядка k называется минор, составленный из первых k строк и k столбцов матрицы A.

4. Трехдиагональная матрица и определитель Гурвица

Пусть для полинома $P(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n$, $a_n > 0$ задан определитель Гурвица.

$$Y = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_5 & a_7 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} \qquad (4.1)$$

Сформируем из определителя Гурвица трехдиагональную матрицу (матрицу Якоби [12, 13]):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & & \\ & a_1 & ... & ... & \\ & & ... & ... & a_n \\ & & & a_{n-3} & a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (4.2)$$

в которой во всех остальных местах, кроме главной диагонали и двух соседних с ней, стоят нули.

Элементами главной диагонали матрицы (4.2) являются коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Каждому элементу главной диагонали соответствует вспомогательный определитель второго порядка:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_k & a_{k+2} \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 1, ..., n-2. \qquad (4.3)$$

Теорема 4.1. Для устойчивости характеристического полинома (3.1) необходимо выполнение неравенств (неравенств Эрмита − Рауса − Гурвица):

$$\begin{vmatrix} a_k & a_{k+2} \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, ..., n-2, \qquad (4.4)$$

или в другой форме:

$$a_k < \frac{a_{k+1} a_{k+2}}{a_{k+3}}, \quad k = 0, ..., n-3. \qquad (4.5)$$

Для доказательства теоремы предварительно учтем, что в соответствии с критерием Гурвица для устойчивости характеристического полинома (3.1) необходима, в частности, положительность диагонального минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0. \tag{4.6}$$

Далее проанализируем необходимое условие для диагонального минора третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0. \tag{4.7}$$

Оно должно выполняться при всех неотрицательных значениях коэффициентов, в том числе и при $a_0 = 0$:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Используя метод математической индукции, убедимся в необходимости выполнения неравенства для устойчивости характеристического полинома (3.1):

$$\begin{vmatrix} a_k & a_{k+2} \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1,...,n-2.$$

Теорема 4.1 доказана.

Примечание. Доказательство неравенств (3.4) производится с использованием критерия устойчивости Эрмита−Билера — см. [14].

5. Многомерный алгебраический запас устойчивости

В условиях отработки (летные испытания) и эксплуатации параметры системы управления по тем или иным причинам могут отличаться от расчетных. Эти вариации параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости.

Поэтому стремятся спроектировать систему так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости.

Степень этого удаления называют *запасом устойчивости.*

Для исследования геометрии многомерных областей устойчивости динамических систем с обратной связью предлагается новое понятие (новый термин): *многомерный алгебраический запас устойчивости.*

Формула для многомерного алгебраического запаса устойчивости:

$$\mu = \mu(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{n-3}), \tag{5.1}$$

$$\mu_k = \frac{a_k a_{k+3}}{a_{k+1} a_{k+2}}, \quad \mu_k \in (0,1], \quad k = 0,...,n-3. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. Необходимым условием устойчивости полинома является выполнение неравенств:

$$a_k < \mu_k \frac{a_{k+1} a_{k+2}}{a_{k+3}}, ..., \; k = 0,1,..., n-3, \mu_k \in (0,1). \tag{5.3}$$

6. Достаточные условия устойчивости полинома

Полином

$$P(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n \tag{6.1}$$

называют устойчивым, если все корни уравнения $P(s) = 0$ имеют отрицательную вещественную часть. Ниже рассматриваются только полиномы с положительными коэффициентами.

Теорема 6.1.[16]. Если

$$\frac{a_0 a_3}{a_1 a_2} + \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3} + ... + \frac{a_{n-3} a_n}{a_{n-1} a_{n-2}} < 1, \tag{6.2а}$$

то полином (6.1) устойчив.

Условие (6.2а) можно представить в более компактном виде:

$$\mu_0 + \mu_1 + ... + \mu_{n-3} < 1, \tag{6.2б}$$

где обозначено $\mu_0 = \frac{a_0 a_3}{a_1 a_2}, \mu_1 = \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}, ..., \mu_{n-3} = \frac{a_{n-3} a_n}{a_{n-1} a_{n-2}}$.

Приводится положительное решение гипотезы, сформулированной в [17].

Полином (6.1) $P(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n$ называют устойчивым, если все корни уравнения $P(s) = 0$ имеют отрицательную вещественную часть.

Ниже рассматриваются только полиномы с положительными коэффициентами. Предварительно приведем следующую лемму.

Лемма 6.2.

Условие (6.2) при $n = 3$ необходимо и достаточно для устойчивости полинома (6.1), имеющего в данном случае вид $P(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n$.

Доказательство *Леммы 6.2* следует непосредственно из критерия Гурвица.

Перейдем к доказательству *Теоремы 6.1.*

Если утверждение теоремы неверно, найдется неустойчивый полином (6.1) минимальной степени $n > 4$ с положительными коэффициентами, удовлетворяющими условию (6.2).

Пусть (6.1) — такой полином минимальной степени. Построим вспомогательный полином

$$L_1(s) = b_0 s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}, \tag{6.3}$$

где

$$b_0 = a_1, b_1 = a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1}, b_2 = a_3, \quad b_3 = a_4 - \frac{a_0 a_5}{a_1}, \ldots . \tag{6.4}$$

Из (6.2) следует, что $\frac{a_0 a_3}{a_1 a_2} < 1; \frac{a_2 a_5}{a_3 a_4} < 1; \frac{a_4 a_7}{a_5 a_6} < 1; \ldots$.

Перемножая последовательно эти неравенства, получаем

$$\frac{a_0 a_3}{a_1 a_2} < 1; \quad \frac{a_0 a_5}{a_1 a_4} < 1; \quad \frac{a_0 a_7}{a_1 a_6} < 1; \ldots .$$

Отсюда вытекает, что все коэффициенты полинома (6.3) положительные. Так как полиномы (6.1) и (6.3) одновременно устойчивы или неустойчивы ([18], с. 43), то полином (6.3) неустойчив.

По предположению, полином (6.1) имеет минимальную степень среди неустойчивых полиномов с положительными коэффициентами, удовлетворяющими неравенству вида (6.2), а неустойчивый полином (6.3) с положительными коэффициентами имеет меньшую степень.

Поэтому его коэффициенты (6.4) удовлетворяют неравенству

$$\frac{b_0 b_3}{b_1 b_2} + \frac{b_1 b_4}{b_2 b_3} + \ldots + \frac{b_{n-4} b_{n-1}}{b_{n-2} b_{n-3}} \geq 1. \tag{6.5}$$

С другой стороны, ниже будет показано, что из неравенства (6.2) следует неравенство

$$\frac{b_0 b_3}{b_1 b_2} + \frac{b_1 b_4}{b_2 b_3} + \ldots + \frac{b_{n-4} b_{n-1}}{b_{n-2} b_{n-3}} < 1. \tag{6.6}$$

В самом деле, положим:

$$c_i = \frac{a_i a_{3+3}}{a_i a_{3+3}},\ i = 0,1,\ldots,n-3; \quad d_1 = \frac{1 - c_0 c_2}{1 - c_0}; \quad d_2 = \frac{1 - c_0 c_2 c_6}{1 - c_0 c_2 c_4}; \quad d_3 = \frac{1 - c_0 c_2 c_4 c_6}{1 - c_0 c_2 c_4}; \ldots .$$

Тогда неравенства (6.2) и (6.6) запишутся соответственно в виде

$$c_0 + c_1 + ... + c_{n-3} < 1, \tag{6.7}$$

$$c_1 d_1 + c_2 d_1^{-1} + c_3 d_2 + c_4 d_2^{-1} + c_5 d_3^{-1} + ... < 1. \tag{6.8}$$

Так как $0 < c_i < 1$, $i = 0, 1, ..., n-3$; (здесь [ν] означает целую часть числа ν), то, используя (6.7), получаем:

$$c_1 d_1 + c_2 d_1^{-1} + c_3 d_2 + c_4 d_2^{-1} + c_5 d_3 + c_6 d_3^{-1} + ... <$$

$$< (1 - c_0 - c_2 - c_3 - ...)d_1 + c_2 + c_3 d_2 + c_4 + c_5 d_3 + c_6 + ... =$$

$$= (1 - c_0)d_1 - c_2(d_1 - 1) + c_3(d_2 - d_1) - c_4(d_1 - 1) + c_5(d_3 - d_1) - c_6(d_1 - 1) + ... \le$$

$$\le (1 - c_0)d_1 + c_3(d_2 - d_1) + c_5(d_3 - d_1) + ... \le$$

$$\le (1 - c_0)d_1 + c_3((1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1) + c_5(1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1 + ... \le$$

$$\le 1 - c_0 c_2 + ((1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1)(c_3 + c_5 + ...).$$

Теперь для доказательства неравенства (6.8) достаточно показать, что

$$c_0 c_r > (1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1. \tag{6.9}$$

Подставляя вместо d_1 его выражение через c_0, c_2, умножая на знаменатель и приводя подобные члены, преобразуем неравенство (6.9) к виду

$$1 > c_2 + c_0 c_2 - (c_0 c_2)^2. \tag{6.10}$$

Неравенство (6.10) справедливо в силу соотношения

$$c_2 + c_0 c_2 - (c_0 c_2)^2 \le c_2 + (1 - c_2)c_2 - (c_0 c_2)^2 < 1 - (1 - c_2)^2.$$

Следовательно, неравенство (6.6) доказано. Но неравенство (6.6) противоречит неравенству (6.5).

Теорема доказана.

Литература

1. *Carlos M. Madrid Casado*. Наука. Величайшие теории: выпуск 34: Вначале была аксиома. Гильберт. Основания математики. ISSN 2409-0069. Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2015. – 176 с.

2. *Гильберт Д.* Избранные труды. Т.1, 2. М.: «Факториал», 1998.

3. *Арнольд В. И.* Вещественная алгебраическая геометрия. Москва. МЦНМО. 2009.

4. *Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А.* Избыточные системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение. 1978. – 144 с.

5. *Stodola A.* Über die Regulierung von Turbinen. // Schweizerische Bauzeitung. 1893. V.XXII. №17–20; 1894. V. XXVIII. №17–18.

6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, 5-е изд. М. : Физматлит, 2004.

7. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. М.: УРСС, 2004.

8. *Hermite C.* Sur le nombre des racinesd'une equation algebrique comprise entre des limitesdonnees. // J. ReineAngew. Math. 1852. Vol. 52. – P. 39–51.

9. *Николаев Ю. П.* Наибольшие значения основных параметров и условие ограниченности характеристической области устойчивости линейных систем. // АиТ. 1993. №12. – С. 33–43.
Yu. P. Nikolaev. Maximum values of the principal parameters and the boundedness condition for the characteristic domain of asymptotic stability of linear systems. // Automat and Remote Control, 1993, 54:12, 1751–1759.

10. *Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П.* Анализ геометрии многомерных областей устойчивости линейных систем управления с обратной связью. // Навигация и управление летательными аппаратами. 2018, № 22. – С. 2–9.

11. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: Наука, 1996.

12. *Филлипс Ч.*, *Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. Пер. с англ. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
Phillips C., *Harbor R.* Feedback Control Systems, 4th Edition. 2000. Prenticehall, Inc., 2000.

13. *El-Mikkawy, M. E. A.* On the inverse of a general tridiagonal matrix. // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – T. 150, № 3. – С. 669–679.

14. *Немировский А. С., Поляк Б. Т.* Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование. // АиТ. 1994. № 11. – С. 113–119.

15. *Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П.* Анализ геометрии многомерных областей устойчивости линейных систем с обратной связью // Навигация и управление летательными аппаратами. 2018. № 22. – С. 2–9.

16. *Клепцын А. Ф.* Об одном достаточном условии устойчивости многочлена. //АиТ. 1984. № 10. – С. 175–176.

17. *Масленников В. В.* Гипотеза о существовании простого аналитического достаточного условия устойчивости. // АиТ. 1984, № 2. – С. 160–161.

18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968.

19. *Biehler M.* Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. // J. Reine Angew. Math. 87 (1879). – P. 350–1352.

20. *Рахман Q. Я.*, *Шмайссер Г.* Аналитическая теория многочленов, том 26 монографий Лондонского математического общества. Новая серия. Пресса Оксфордского университета Clarendon Press, Оксфорд, 2002.

21. *Васильев О.* (*Grey Violet*). Геометрия задач *D*-устойчивости. Universitat Konstanz. Москва, 2017.