

УДК 517.977.5

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ПОСАДКЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ДВИЖУЩИЙСЯ КОРАБЛЬ

Михаил Борисович АЛЕСОВ, к. т. н., доцент

Раменское приборостроительное конструкторское бюро (филиал в г. Санкт-Петербург)

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru,

Алина Андреевна ПЛЯСКИНА,

*Раменское приборостроительное конструкторское бюро (филиал в г. Санкт-Петербург),
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
аспирант*

E-mail: aaplyaskina@spb.rpkb.ru

Рассматривается задача построения оптимальных траекторий при посадке летательного аппарата (ЛА) на движущийся корабль. В качестве модели относительного движения ЛА используется система нелинейных уравнений, учитывающая постоянное ветровое воздействие и переносное движение корабля. Поставлена и решена задача синтеза оптимального по критерию быстродействия траекторного управления и соответствующих траекторий выведения ЛА на предпосадочную прямую при заданных ограничениях на величину управляющего воздействия. Показано, что оптимальное управление кусочно-постоянно и имеет не более двух ступеней управления. Получены формулы для расчета моментов переключения ступеней управления, характерных точек траектории на фазовой плоскости и величины продольного перемещения ЛА. В работе представлены примеры численных расчетов оптимальных траекторий при различных типах начального положения ЛА, а также результаты моделирования движения ЛА при боковом наведении на предпосадочную прямую.

Ключевые слова: *траекторное управление летательными аппаратами, оптимальное программное управление, принцип максимума Понтрягина, нелинейные динамические системы, относительное движение.*

CONSTRUCTION OF THE OPTIMAL TRAJECTORIES DURING AIRCRAFT LANDING ON A MOVING SHIP

Mikhail B. ALESOV, PhD in Engineering

Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau (St. Petersburg Branch)

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru,

Alina A. PLYASKINA,

Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau (St. Petersburg Branch),

SUAI State University of Aerospace Instrumentation

E-mail: aaplyaskina@spb.rpkb.ru

The paper addresses the problem of constructing the optimal trajectories during aircraft landing on a moving ship. The system of nonlinear equations is used as a model of aircraft relative motion. This system considers constant wind and transient motion of the ship. The problem of synthesis of optimal by the minimum-time criterion trajectory control and the corresponding trajectories of the aircraft final approach under specified constraints on the control magnitude is formulated and solved. It is proved that optimal control is piecewise constant and has two control stages maximum. Formulas for calculating the control stages switching moments, trajectory characteristic points on the phase plane and longitudinal motion of the aircraft are obtained. The paper presents examples of numerical calculations of optimal trajectories for various types of the initial positions of the aircraft, as well as the results of modeling the motion of the aircraft during lateral guidance on the final approach track.

Keywords: *aircraft trajectory control, optimal programmed control, Pontryagin's maximum principle, nonlinear dynamical system, relative motion.*

Введение

Выполнение захода на посадку на движущийся корабль является одной из важных воздушных операций пилотажно-навигационного обеспечения беспилотных и пилотируемых летательных аппаратов (ЛА). Оперативное планирование такого вида маневра производится на основе построения траекторий, оптимальных по выбранному критерию качества.

Вопросы синтеза оптимального по критерию быстродействия управления и соответствующих траекторий при фиксированном конечном состоянии системы управления (координат и угла курса) рассмотрены в работах [1, 2]. В практике летной эксплуатации актуальной является задача синтеза программного управления при изменяющемся конечном положении, обусловленном движением корабля.

Данная статья посвящена решению задачи траекторного управления движением ЛА, описываемым нелинейной моделью, включающей учет значительных отклонений от предпосадочной прямой, больших величин относительного угла курса и крена, а также постоянного ветрового воздействия и равномерного движения корабля. Задача сводится к построению оптимальной по критерию быстродействия траектории ЛА, при этом в качестве управляющего воздействия используется ограниченное изменение угла крена ЛА.

Общие вопросы синтеза программного управления динамическими системами изложены в трудах Атанса Ж. и Фалба П. Л. [3], Афанасьева В. Н., Колмановского В. Б., Носова В. Р. [4]. Практические вопросы построения оптимальных траекторий ЛА на основе принципа Понтрягина Л. С. рассмотрены в работах ряда авторов [5, 6, 7].

1. Постановка задачи траекторного управления

Выполнение захода на посадку ЛА традиционно включает три этапа (участка): начальный этап, промежуточный этап и финальный участок (непосредственно участок глиссады). Каждый этап маневра начинается в соответствующей контрольной точке и имеет свое назначение, при этом во многих случаях начальный и промежуточный этапы (и соответствующие летные функции при их выполнении) могут быть объединены. С точки зрения горизонтальной навигации можно полагать, что движение на всех участках захода на посадку выполняется с одним и тем же путевым углом, задающим в плоскости ориентированную прямую линию в направлении точки посадки, назовем эту линию требуемого движения ЛА — предпосадочной прямой (ПП). Геометрически ПП проходит через точку посадки на корабле и при прямолинейном движении корабля плоскопараллельно перемещается вместе с ним.

Рассматриваемая задача заключается в построении оптимальной траектории выведения ЛА на участок предпосадочной прямой до точки окончания промежуточного этапа захода — точки входа в глиссаду (ТВГ) — из любой заданной точки навигационного пространства района посадки.

Скорость ЛА на предпосадочной прямой в топоцентрической системе координат района посадки удовлетворяет векторному соотношению

$$\bar{V} + \bar{U} = W'_\Pi \bar{i}_\Pi + \bar{W}_K, \quad (1)$$

где \bar{V} — вектор воздушной скорости ЛА; \bar{U} — вектор скорости ветра; W'_Π — модуль скорости ЛА относительно корабля; \bar{i}_Π — единичный вектор (орт), задающий направление предпосадочной прямой; \bar{W}_K — вектор путевой скорости корабля.

Предполагается, что путевая скорость корабля \bar{W}_K постоянна и задана, направление ПП и модуль скорости ЛА на ПП относительно корабля \bar{i}_Π , W'_Π также постоянны и заданы.

В результате требуемая воздушная скорость ЛА V и требуемый относительный курс ЛА на ПП (разность требуемого курса на ПП и направления ПП) ψ_Π определяются выражениями:

$$V = \left\| W'_\Pi \bar{i}_\Pi + \bar{W}_K - \bar{U} \right\|, \quad \text{tg } \psi_\Pi = \frac{W_{K,Z} - U_Z}{W'_\Pi + W_{K,X} - U_X}, \quad (2)$$

где $W_{K,X}$, $W_{K,Z}$ — проекции скорости корабля на ПП и ее боковую ось (направлена вправо от ПП) соответственно; U_X , U_Z — проекции постоянной скорости ветра на ПП и боковую ось соответственно (навигационное направление ветра).

По условиям задачи может быть задана воздушная скорость ЛА V , тогда требуемый относительный курс ψ_Π на ПП и относительная скорость ЛА вдоль ПП W'_Π определяются как:

$$\sin \psi_\Pi = \frac{W_{K,Z} - U_Z}{V}, \quad W'_\Pi = V \cos \psi_\Pi + U_X - W_{K,X}. \quad (3)$$

Движение ЛА в боковом направлении относительно ПП при траекторном «чистом» маневрировании описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния Z и ψ [8]:

$$\frac{dZ}{dt} = V \sin \psi + U_Z - W_{K,Z}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{g}{V} \text{tg } \gamma, \quad (4)$$

где Z — величина бокового отклонения ЛА от ПП (положительное значение — вправо от направления ПП), м; t — время, с; ψ — текущий относительный угол курса ЛА (угол продольной оси ЛА, отсчитываемый от направления ПП вправо), радианы; g — ускорение свободного падения, м/с²; γ — текущий угол крена ЛА, радианы.

Воздушная скорость ЛА и скорость ветра предполагаются заданными и постоянными при выполнении маневра. Замена переменных

$$\tau = t \frac{g}{V}, \quad z = Z \frac{g}{V^2}, \quad u_z = \frac{U_z}{V}, \quad w_z = \frac{W_{k,z}}{V} \quad (5)$$

приводит модель бокового движения (4) к следующей системе нормированных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = \sin \psi + u_z - w_z, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \operatorname{tg} \gamma, \quad (6)$$

где (z, ψ) — переменные состояния: нормированное боковое отклонение и относительный угол курса соответственно; τ — переменная времени; u_z — параметр бокового ветра; w_z — параметр бокового движения корабля; γ — функция управления.

Задача траекторного навигационного управления при боковом выведении ЛА на ПП формулируется следующим образом. При заданных начальных значениях переменных состояния

$$z(0) = z_0, \quad \psi(0) = \psi_0 \quad (7)$$

следует вывести ЛА на предпосадочную прямую, при этом значения переменных состояния должны быть равны

$$z(\tau_m) = 0, \quad \psi(\tau_m) = \psi_{\Pi}, \quad (8)$$

где τ_m — длительность маневрирования (не задана и подлежит расчету).

На угол крена, используемый в качестве функции управления, накладывается постоянное ограничение по величине

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma_0, \quad (9)$$

где γ_0 — заданное максимально допустимое значение угла.

Оптимальное управление определяется исходя из требования быстродействия, при этом функционал качества управления формально может быть записан как

$$J(\gamma) = \int_0^{\tau_m} 1 \, d\tau \rightarrow \min. \quad (10)$$

При малых значениях углов курса и крена поставленная задача (6...10) в определенной степени подобна задаче оптимального управления линейной системой, описываемой двойным интегратором, по указанному критерию быстродействия [5].

Кроме уравнений бокового движения (4) запишем дифференциальное уравнение для составляющей X перемещения ЛА вдоль ПП

$$\frac{dX}{dt} = V \cos \psi + U_X - W_{K,X}. \quad (11)$$

В нормированном виде аналогично (6) уравнение (11) запишется как:

$$\frac{dx}{d\tau} = \cos \psi + u_x - w_x, \quad (12)$$

где x — нормированное продольное смещение; u_x — параметр продольного ветра вдоль ПП; w_x — параметр продольного движения корабля; указанные нормированные параметры рассчитываются как

$$x = X \frac{g}{V^2}, \quad u_x = \frac{U_X}{V}, \quad w_x = \frac{W_{K,X}}{V}.$$

Дополнительно к сформулированным условиям задачи (7...10) при построении траектории требуется, чтобы по окончании маневрирования расчетное перемещение вдоль ПП $x_m = x(\tau_m)$, определяемое решением уравнения (12), не превышало заданного граничного значения x_r (положения точки входа в глиссаду), т. е. необходимо обеспечить выполнение условия

$$x_m = x_0 + \int_0^{\tau_m} \cos \psi(\tau) d\tau + u_x \tau_m - w_x \tau_m \leq x_r, \quad (13)$$

где x_0 — нормированное смещение ЛА по ПП в момент начала маневрирования ($\tau = 0$).

При построении оптимальной траектории захода на посадку решающим фактором является синтез программы вывода ЛА на ПП, поэтому вначале рассматривается боковое движение системы в переменных состояния (z, ψ), а затем по полученным параметрам траектории рассчитывается величина продольного перемещения. Если полученное расчетное значение перемещения x_m не больше требуемого x_r (т. е. выполняется условие (13)), то поставленная задача имеет решение, в противном случае решения нет и следует изменить параметры маневрирования.

На рисунке 1 показана горизонтальная траектория выведения ЛА на ПП и отмечены кинематические параметры маневра. Здесь

дополнительно к указанным ранее используются следующие обозначения: ИК — истинный курс ЛА; \vec{V}_{Π} — вектор воздушной скорости ЛА на ПП; A_{Π} — азимут ПП; ПУ — путевой угол корабля.

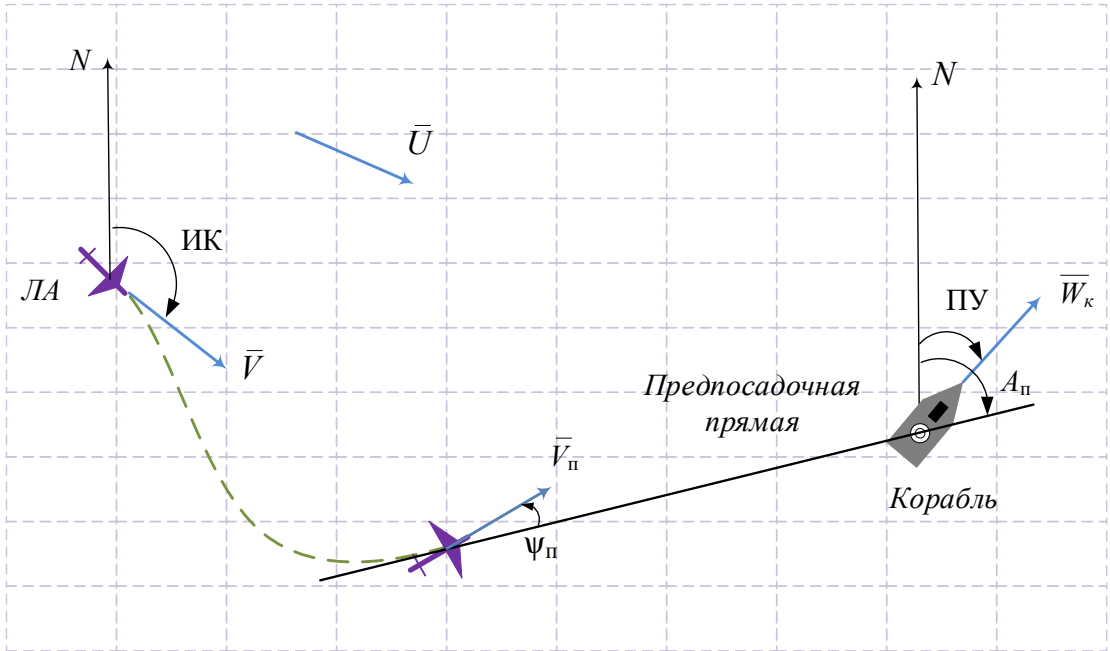


Рис. 1. Горизонтальная траектория выведения ЛА на ПП

Применение принципа Понтрягина Л. С. позволяет установить вид функции оптимального управления $\gamma(\tau)$. Из условия максимума гамильтониана следует, что функция управления $\gamma(\tau)$ должна иметь кусочно-постоянный вид [5]:

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_2(\tau) > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_2(\tau) = 0, \\ -1, & \text{если } \lambda_2(\tau) < 0, \end{cases} \quad (14)$$

при этом в вырожденном случае относительный угол курса равен

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2},$$

где $\lambda_2(\tau)$ — сопряженная функция системы (6).

На этом основании можно указать следующие свойства функции управления.

1) Функция оптимального управления $\gamma(\tau)$ содержит одну или две положительные и отрицательные ступени управления, с возможным участком свободного прямолинейного движения — отсутствия управления при $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, т. е. управление может переключаться (включаться и выключаться) не более четырех раз, с учетом первоначального включения и финального выключения.

2) Каждая ступень управления имеет «прямоугольную» форму с граничными значениями $\pm\gamma_0$.

3) Число неизвестных моментов переключения ступеней управления может быть равно: одному (одна ступень без участка свободного движения), двум (одна ступень с участком свободного движения или две ступени без участка свободного движения) и трем (две ступени с промежуточным участком свободного движения).

4) Функция управления $\gamma(\tau)$ дискретна и имеет три возможных значения: $+\gamma_0$ (правый крен), $-\gamma_0$ (левый крен), 0 (прямолинейное движение).

Символически возможные типы управления можно записать как множество из десяти элементов: $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{0, +1\}$, $\{0, -1\}$, $\{-1, +1\}$, $\{+1, -1\}$, $\{-1, 0, +1\}$, $\{+1, 0, -1\}$, $\{-1, 0, -1\}$, $\{+1, 0, +1\}$, где обозначение « -1 » соответствует отрицательной ступени $-\gamma_0$, « $+1$ » — положительной ступени $+\gamma_0$, « 0 » — прямолинейному движению без управляющего воздействия.

2. Синтез оптимального траекторного управления

2.1. Решение уравнений движения

Поскольку управление имеет только три возможных дискретных значения, запишем решения дифференциальных уравнений (6, 12) в этих частных случаях.

При движении с постоянным креном $\gamma(\tau) = \pm\gamma_0$ переменные состояния ψ , z , x изменяются как:

$$\psi - \psi_H = \pm \text{tg} \gamma_0 \tau, \quad (15)$$

$$z - z_H = (u_z - w_z) \tau \mp \frac{\cos \psi - \cos \psi_H}{\text{tg} \gamma_0}, \quad (16)$$

$$x - x_H = (u_x - w_x) \tau \pm \frac{\sin \psi - \sin \psi_H}{\text{tg} \gamma_0}, \quad (17)$$

где ψ_H , z_H , x_H — начальные значения переменных состояния для участка управления; знаки « \pm » соответствуют положительной или отрицательной ступени управления соответственно.

Относительно угла курса ψ функции бокового $z(\psi)$ и продольного $x(\psi)$ перемещения записываются как:

$$z - z_H = \pm(u_z - w_z) \frac{\psi - \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0} \mp \frac{\cos \psi - \cos \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \quad (18)$$

$$x - x_H = \pm(u_x - w_x) \frac{\psi - \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\sin \psi - \sin \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (19)$$

Длительность маневрирования на данном участке постоянного управления при заданном конечном значении курса $\psi = \psi_K$ равна

$$\Delta \tau_{\pm} = \pm \frac{\psi_K - \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (20)$$

Прямолинейное движение (при отсутствии крена) выполняется при курсе $\psi(\tau) = \mp \frac{\pi}{2}$, а переменные состояния z , x изменяются линейно

$$z - z_H = (u_z - w_z) \tau \mp \tau, \quad (21)$$

$$x - x_H = (u_x - w_x) \tau. \quad (22)$$

Длительность маневрирования на участке свободного движения при заданном конечном значении бокового отклонения $z = z_K$ равна

$$\Delta \tau_0 = \frac{z_K - z_H}{(u_z - w_z) \mp 1}. \quad (23)$$

Рассмотрим далее движение ЛА при возможных типах управления $\{\pm 1\}$, $\{\mp 1, \pm 1\}$, $\{\mp 1, 0, \pm 1\}$, $\{0, \pm 1\}$, $\{\pm 1, 0, \pm 1\}$, а затем укажем области фазовой плоскости (z, ψ) , где управление данных типов реализуется.

2.2. Одноступенчатое управление

При одноступенчатом управлении типа $\{\pm 1\}$ изменение переменных состояния описывается функциями (15...17) при начальных значениях $\psi_H = \psi_0$, $z_H = z_0$, $x_H = x_0$. Движение выполняется до граничных условий (8).

Выражение (18) при $\psi = \psi_H$, $z = 0$, $\psi_H = \psi_0$, $z_H = z_0$ описывает фазовую линию начальных значений одноступенчатого управления соответствующего знака $\Gamma_{\pm} = \{(z_0, \psi_0) \mid z_0 = z_{\pm}(\psi_0)\}$

$$z_0 = \pm(u_z - w_z) \frac{\psi_H - \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\cos \psi_H - \cos \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (24)$$

Как показано на фазовой плоскости $z(\psi)$ рисунка 2, линия имеет две ветви — для положительной Γ_+ (при $\psi_0 < \psi_{\Pi}$) и отрицательной Γ_- (при $\psi_0 > \psi_{\Pi}$) ступеней управления соответственно. Если начальные значения (z_0, ψ_0) принадлежат линии Γ_{\pm} , то возможно единственное оптимальное управление соответствующей полярности.

Длительность процесса управления $\tau_m = \Delta\tau_{\pm}$ определяется из формулы (20) при $\psi_K = \psi_{\Pi}$. Продольное перемещение $x_m = x$ за время управления в этом случае рассчитывается по формуле (19) при $\psi = \psi_{\Pi}$.

2.3. Двухступенчатое управление противоположного знака без участка свободного движения

Рассмотрим двухступенчатое управление вида $\{\mp 1, \pm 1\}$ и обозначим множество начальных значений (z_0, ψ_0) , из которых может быть реализован такой вид управления, как $\Omega_{\mp\pm}$. Характерные точки траектории определяются последовательным рассмотрением участков движения.

На первом участке (первой ступени управления) от начальных фазовых координат (z_0, ψ_0) до точки переключения управления $(z_{\mp\pm}, \psi_{\mp\pm})$ изменение фазовых координат описывается функциями (15...17) при начальных значениях $\psi_H = \psi_0, z_H = z_0, x_H = x_0$. На втором участке изменение фазовых координат описывается также функциями (15...17), но при начальных значениях $\psi_H = \psi_{\mp\pm}, z_H = z_{\mp\pm}, x_H = x_{\mp\pm}$ до конечного состояния (8).

Приравнявая выражения для $z_{\mp\pm}$ двух ступеней, получим следующее нелинейное уравнение относительно угла курса при переключении управления $\psi_{\mp\pm}$:

$$\pm \frac{\cos \psi_{\Pi} - 2 \cos \psi_{\mp\pm} + \cos \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \mp (u_z - w_z) \frac{\psi_{\Pi} - 2\psi_{\mp\pm} + \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} = z_0. \quad (25)$$

Уравнение (25) может быть решено численно при заданных границах изменения искомой переменной. Для начальных значений из области Ω_{-+} границы переменной ψ_{-+} следует выбирать как $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_{-+} < \psi_{\Pi}$, для области Ω_{+-} используется интервал $\psi_{\Pi} < \psi_{+-} \leq \frac{\pi}{2}$.

После расчета угла курса $\psi_{\mp\pm}$ длительности ступеней управления $\tau_1 = \tau_{\mp\pm}, \Delta\tau_2$ определяются по формуле (20) соответственно при начальных и конечных условиях $\psi_H = \psi_0, \psi_K = \psi_{\mp\pm}$ и $\psi_H = \psi_{\mp\pm}, \psi_K = \psi_{\Pi}$. Боковые и продольные смещения определяются по формулам (18, 19) при указанных начальных и конечных значениях курса на участках.

2.4. Двухступенчатое управление противоположных знаков с участком свободного движения

Рассмотрим двухступенчатое управление вида $\{\mp 1, 0, \pm 1\}$, которое содержит участок свободного движения в качестве промежуточного. Обозначим множество начальных значений (z_0, ψ_0) , из которых может быть реализован такой вид управления, как $\Omega_{\mp 0\pm}$. Характерные точки траектории определяются последовательным рассмотрением участков движения.

На первом участке (первой ступени управления) от начальных фазовых координат (z_0, ψ_0) до точки выключения управления $z_{\mp 0}, \mp \frac{\pi}{2}$ изменение фазовых координат описывается функциями (15...17) при начальных значениях $\psi_H = \psi_0, z_H = z_0, x_H = x_0$. Боковое отклонение в конце первого участка $z = z_{\mp 0}$ определяется уравнением (18) при $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$. Длительность первого участка $\tau_1 = \tau_{\mp 0}$ рассчитывается по формуле (20) при $\psi_K = \mp \frac{\pi}{2}$, а продольное смещение $x = x_{\mp 0}$ — по формуле (19) при $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$.

Движение на втором участке выполняется с изменением фазовых координат, определяемых формулами (21, 22) при начальных значениях $z_H = z_{\mp 0}, x_H = x_{\mp 0}$. Длительность свободного участка $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$ рассчитывается по формуле (23) при конечном боковом отклонении $z_K = z_{0\pm}$. Причем значение $z_{0\pm}$ бокового отклонения в момент завершения второй ступени (включение управления на последнем участке) рассчитывается по формуле (18) как

$$z_{0\pm} = \mp(u_z - w_z) \frac{\psi_{\Pi} \pm \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\cos \psi_{\Pi}}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (26)$$

Продольное смещение на втором участке $x_{0\pm}$ определяется по формуле (22) при известной длительности движения $\tau = \Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$.

На конечном (третьем) участке траектория описывается уравнениями (15...17) при начальных значениях $\psi_H = \mp \frac{\pi}{2}, z_H = z_{0\pm}, x_H = x_{0\pm}$. Длительность участка $\Delta\tau_3$ определяется по формуле (20) при $\psi_K = \psi_{\Pi}$, а продольное смещение $x = x_M$ — по формуле (19) при $\psi = \psi_{\Pi}$.

Линия $\Gamma_{\mp\pm} = \{(z_0, \psi_0) | z_0 = z_{\mp\pm}(\psi_0)\}$, отделяющая начальные условия двухступенчатого управления с участком свободного движения и при отсутствии оно, на фазовой плоскости задается функцией

$$z_0(\psi_0) = \mp(u_z - w_z) \frac{\pm\pi + \psi_{\Pi} + \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\cos \psi_{\Pi} + \cos \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (27)$$

2.5. Двухступенчатое управление одного знака с участком свободного движения

Рассмотрим двухступенчатое управление $\{\pm 1, 0, \pm 1\}$, которое содержит участок свободного движения в качестве промежуточного. Обозначим множество начальных значений (z_0, ψ_0) , из которых может быть реализован такой вид управления, как $\Omega_{\pm 0\pm}$. Характерные точки траектории определяются последовательным рассмотрением участков движения.

На первом участке (первой ступени управления) от начальных фазовых координат (z_0, ψ_0) до момента выключения управления $z_{\pm 0}, \mp \frac{\pi}{2}$ изменение фазовых координат описывается функциями (15...17) при начальных значениях $\psi_H = \psi_0, z_H = z_0, x_H = x_0$, причем $-\pi \leq \psi_0 < -\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} < \psi_0 \leq \pi$. Боковое отклонение в конце первого участка $z = z_{\pm 0}$ определяется уравнением (18) при $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$. Длительность первого участка $\tau_1 = \Delta\tau_{\pm 0}$ рассчитывается по формуле (20) при $\psi_K = \mp \frac{\pi}{2}$, а продольное смещение $x = x_{\pm 0}$ — по формуле (19) при $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$.

Движение на втором участке выполняется с изменением фазовых координат, определяемым формулами (21, 22) при начальных значениях $z_H = z_{\pm 0}, x_H = x_{\pm 0}$. Длительность свободного участка $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$ рассчитывается по формуле (23) при конечном боковом отклонении $z_K = z_{0\pm}$. Причем значение бокового отклонения в момент завершения второй ступени (включение управления на финальном участке) $z_{\pm 0} = z_H$ определяется по формуле (18) при $\psi_H = \mp \frac{\pi}{2}, \psi = \psi_{\Pi}, z = 0$. Продольное смещение в конце второго участка $x_{0\pm}$ рассчитывается по формуле (22) при известной длительности движения на участке $\tau = \Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$.

На конечном (третьем) участке траектория описывается уравнениями (15...17) при начальных значениях $\psi_H = \mp \frac{\pi}{2}, z_H = z_{0\pm}, x_H = x_{0\pm}$. Длительность участка $\Delta\tau_3$ определяется по формуле (20) при $\psi_K = \psi_{\Pi}$, а продольное смещение $x = x_M$ — по формуле (19) при $\psi = \psi_{\Pi}$.

Частным случаем рассмотренного типа управления является ситуация, когда начальный курс равен $\psi_0 = \mp \frac{\pi}{2}$, при этом реализуется управление $\{0, \pm 1\}$, соответствующее двум последним участкам рассмотренных ранее траекторий $\{\pm 1, 0, \pm 1\}, \{\mp 1, 0, \pm 1\}$.

2.6. Области начальных значений и типы управления

С учетом рассмотренных допустимых типов управления на фазовой плоскости (z, ψ) выделяются 6 областей начальных значений (z_0, ψ_0) , отделяемых линиями постоянного управления $\Gamma_{\pm} = \{(z_0, \psi_0) \mid z_0 = z_{\pm}(\psi_0)\}$, $\Gamma_{\mp\pm} = \{(z_0, \psi_0) \mid z_0 = z_{\mp\pm}(\psi_0)\}$ и свободного движения при $\psi_0 = \mp \frac{\pi}{2}$, откуда реализуются соответствующие типы управления. На рисунке 2 показаны соответствующие области $\Omega_{-+}, \Omega_{-0+}, \Omega_{+0+}, \Omega_{+-}, \Omega_{+0-}, \Omega_{-0-}$ и разделяющие их линии. В таблице 1 даны определения областей начальных значений (z_0, ψ_0) и соответствующие способы решения поставленной задачи.

Таблица 1. Типы управления и области начальных значений

Обозначение	Тип управления	Определение области $\{(z_0, \psi_0)\}$	Построение траектории
Ω_{-+}	Отрицательная и положительная ступени $\{-1, +1\}$	При $\psi_0 \in (\psi_{\Pi}, \pi)$ боковые отклонения $z_0 \in (z_{-}(\psi_0), z_{-+}(\psi_0))$. При $\psi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \psi_{\Pi}\right]$ боковые отклонения $z_0 \in (z_{+}(\psi_0), z_{-+}(\psi_0))$	П. 2.3
Ω_{+-}	Положительная и отрицательная ступени $\{+1, -1\}$	При $\psi_0 \in \left[\psi_{\Pi}, \frac{\pi}{2}\right]$ боковые отклонения $z_0 \in [z_{+-}(\psi_0), z_{+}(\psi_0))$. При $\psi_0 \in (-\pi, \psi_{\Pi})$ боковые отклонения $z_0 \in [z_{+-}(\psi_0), z_{+}(\psi_0))$	П. 2.3
Ω_{-0+}	Отрицательная и положительная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{-1, 0, +1\}$	При $\psi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (z_{-+}(\psi_0), +\infty)$	П. 2.4
Ω_{+0-}	Положительная и отрицательная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{+1, 0, -1\}$	При $\psi_0 \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (-\infty, z_{+-}(\psi_0))$	П. 2.4

Таблица 1 (продолжение). Типы управления и области начальных значений

Обозначение	Тип управления	Определение области $\{(\psi_0, z_0)\}$	Построение траектории
Ω_{+0+}	Положительная и положительная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{+1, 0, +1\}$	При $\psi_0 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (z_+(\psi_0), +\infty)$	П. 2.5
Ω_{-0-}	Отрицательная и отрицательная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{-1, 0, -1\}$	При $\psi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (-\infty, z(\psi_0))$	П. 2.5

3. Примеры построения оптимальных траекторий и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры синтеза управления и построения оптимальных траекторий выведения ЛА на ПП движущегося корабля.

Расчет проекций скорости корабля на ПП и ее боковую ось выполняется по матричной формуле

$$\begin{bmatrix} W_{K,X} \\ W_{K,Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A_{\Pi} & \sin A_{\Pi} \\ -\sin A_{\Pi} & \cos A_{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_K \cos \text{ПУ} \\ W_K \sin \text{ПУ} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где $A_{\Pi} = \psi_{\text{ко}} + \Delta\psi_{\Pi,K}$ — азимут ПП; $\psi_{\text{ко}}$ — курс корабля; $\Delta\psi_{\Pi,K}$ — курсовой угол ПП относительно диаметральной плоскости корабля; W_K — путевая скорость корабля; $\text{ПУ} = \psi_{\text{ко}} + \alpha$ — путевой угол корабля; α — угол дрейфа корабля.

Примем следующие числовые параметры модели движения: корабль движется в северо-восточном направлении с курсом $\psi_{\text{ко}} = 22,50^\circ$ (румб «NNE») со скоростью $W_K = 20$ узлов = 37 км/час = 10,3 м/с; курсовой угол ПП относительно диаметральной плоскости корабля $\Delta\psi_{\Pi,K} = 45^\circ$; тогда азимут ПП $A_{\Pi} = 67,50^\circ$. Угол дрейфа корабля α составляет 10° , тогда путевой угол корабля равен $\text{ПУ} = 32,50^\circ$. Составляющие путевой скорости корабля относительно ПП равны: $W_{K,X} = 8,4$ м/с; $W_{K,Z} = -5,9$ м/с.

Ветер дует со скоростью $U = 10$ м/с в юго-восточном направлении, навигационное направление ветра $\psi_B = 135^\circ$.

Расчет компонент скорости ветра относительно ПП и ее боковой оси выполняется по матричной формуле

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A_{\Pi} & \sin A_{\Pi} \\ -\sin A_{\Pi} & \cos A_{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \cos \psi_B \\ U \sin \psi_B \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Компоненты ветра относительно ПП равны: $U_x = 3,8$ м/с, $U_z = 9,2$ м/с.

При заданной относительной скорости ЛА $W'_{\Pi} = 300$ км/час = = 83,3 м/с согласно формуле (2) воздушная скорость ЛА на ПП равна $V = 89,2$ м/с, а требуемый относительный курс на ПП $\psi_{\Pi} = -9,8^{\circ} = = -0,17$ радиан. Максимально допустимое значение угла крена ЛА γ_0 принято 350° . Начальное значение продольного смещения на ПП в момент начала маневра без потери общности принято нулевым $x_0 = 0$.

Нормированные безразмерные значения переменных модели согласно (5) записываются как:

$$\tau = 0,11 t, \quad z = 1,23 Z, \quad x = 1,23 X, \quad u_z = 0,011 U_z, \quad u_x = 0,011 U_x, \\ w_z = 0,011 W_z, \quad w_x = 0,011 W_x,$$

где боковая и продольная координаты Z, X измеряются в километрах, а время t — в секундах.

На рисунке 2 показаны области начальных значений и разделяющие их линии на фазовой плоскости с координатами (z, ψ) для указанных числовых значений параметров задачи.

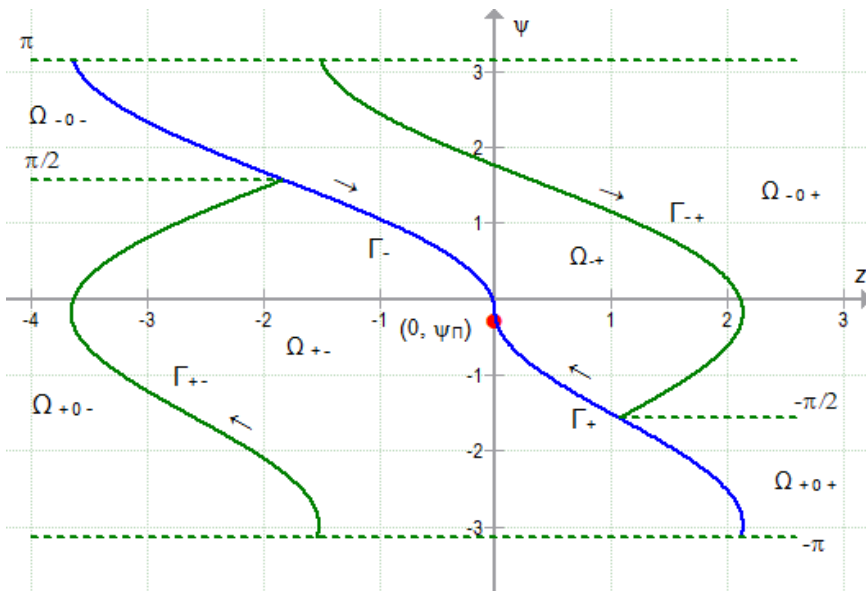


Рис. 2. Области начальных значений и граничные линии

Численные примеры расчета характерных точек траектории при различных типах управления (областей начальных условий на фазовой плоскости рисунка 2) представлены в таблице 2.

Таблица 2. Примеры синтеза управления и построения траекторий

№ примера	Начальные условия	Тип управления	Характерные точки траектории
1	Область Ω_{-+} : $z_0 = -1$; $\psi_0 = 100^\circ$	$\{-1, +1\}$	Точка переключения ступеней: $\tau_1 = 4,097$; $z_{-+} = 0,559$; $\psi_{-+} = -1,124$. Момент выключения управления: $\tau_M = 5,457$. Продольное смещение: $x_M = 3,457$
2	Область Ω_{-0+} : $z_0 = -1$; $\psi_0 = 100^\circ$	$\{-1, 0, +1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 4,736$; $z_{-0} = 2,048$; $\psi_{-0} = -1,571$. Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 5,917$; $z_{0+} = 1,069$; $\psi_{0+} = -1,571$. Момент выключения управления: $\tau_M = 7,916$. Продольное смещение: $x_M = 3,612$
3	Область Ω_{+0+} : $z_0 = 3,5$; $\psi_0 = -150^\circ$	$\{+1, 0, +1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 1,496$; $z_{+0} = 2,516$; $\psi_{+0} = -1,571$. Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 3,238$; $z_{0+} = 1,069$; $\psi_{0+} = -1,571$. Момент выключения управления: $\tau_M = 5,237$. Продольное смещение: $x_M = 0,201$
4	Область Ω_{+-} : $z_0 = 0$; $\psi_0 = -150^\circ$	$\{+1, 0, -1\}$	Точка переключения ступеней: $\tau_1 = 5,271$; $z_{+-} = -1,026$; $\psi_{+-} = -1,073$. Момент выключения управления: $\tau_M = 7,048$. Продольное смещение: $x_M = 3,104$
5	Область Ω_{+0-} : $z_0 = -3$; $\psi_0 = -150^\circ$	$\{+1, 0, -1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 5,982$; $z_{+0} = -3,224$; $\psi_{+0} = 1,571$. Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 7,1759$; $z_{0-} = -1,828$; $\psi_{0-} = 1,571$. Момент выключения управления: $\tau_M = 9,664$. Продольное смещение: $x_M = 3,315$

№ примера	Начальные условия	Тип управления	Характерные точки траектории
6	Область Ω_{-0-} : $z_0 = -5$; $\psi_0 = 150^\circ$	$\{-1, 0, -1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 1,496$; $z_{-0} = -3,510$; $\psi_{-0} = 1,571$. Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 2,934$; $z_{0-} = -1,828$; $\psi_{0-} = 1,571$. Момент выключения управления: $\tau_M = 5,421$. Продольное смещение: $x_M = 0,678$

Траектории движения динамической системы на фазовой плоскости (z, ψ) при положительном и отрицательном финальном управлении и условиях числовых примеров № 1, № 2, № 3 и № 4, № 5, № 6 таблицы 2 показаны на рисунках 3 и 5 соответственно. Точками обозначены характерные состояния системы управления, стрелками — направление движения.

Соответствующие траектории движения ЛА на горизонтальной плоскости в нормированных горизонтальных координатах примеров № 1, № 2, № 3 и № 4, № 5, № 6 таблицы 2 показаны на рисунках 4 и 6.

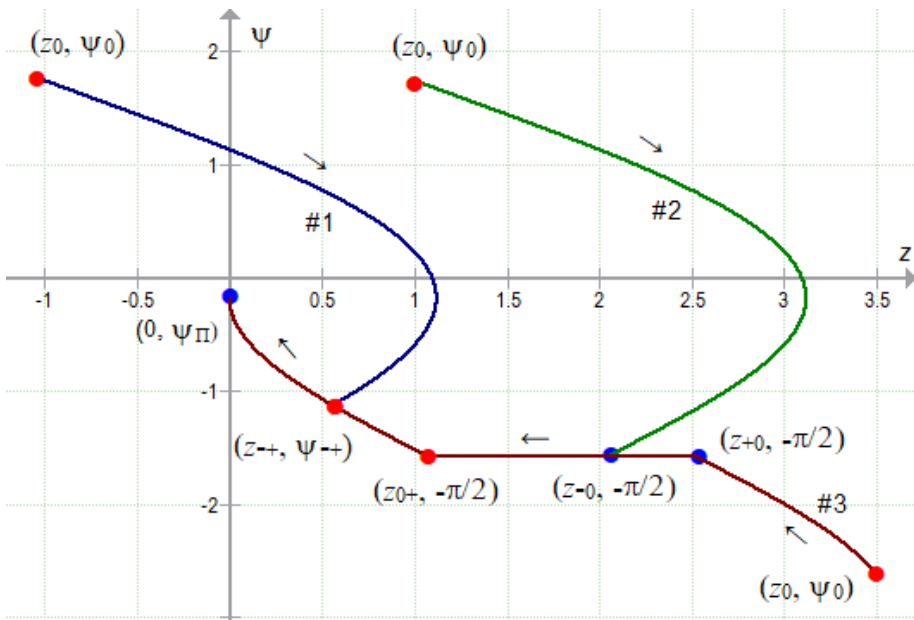


Рис. 3. Движение по фазовой плоскости при положительном финальном управлении

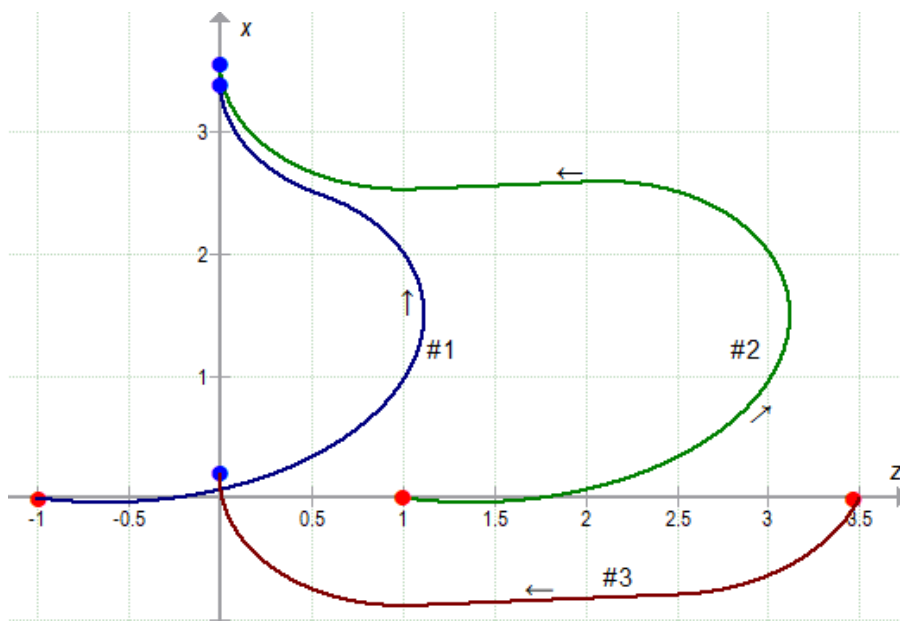


Рис. 4. Движение в горизонтальной плоскости при положительном финальном управлении

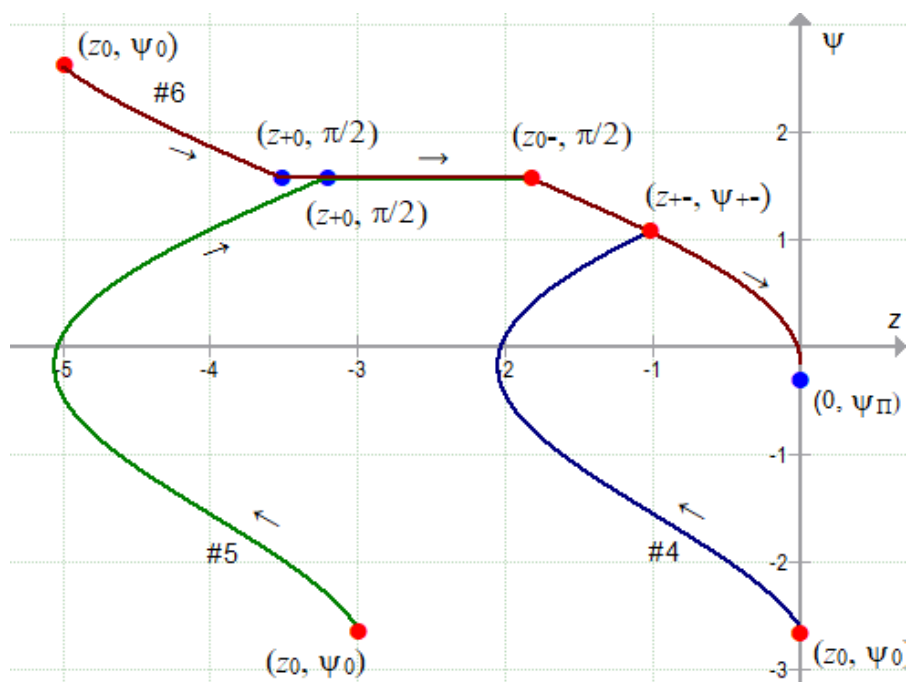


Рис. 5. Движение по фазовой плоскости при отрицательном финальном управлении

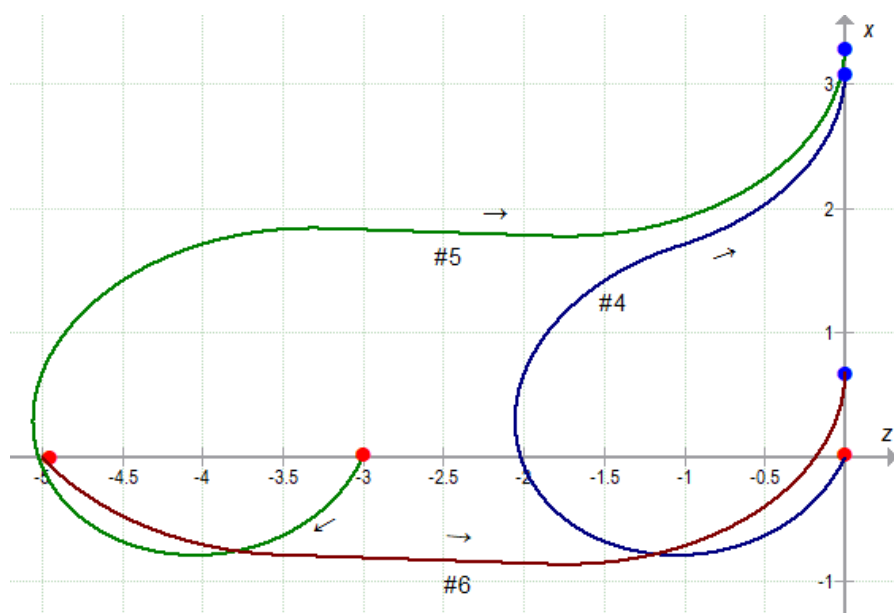


Рис. 6. Движение в горизонтальной плоскости при отрицательном финальном управлении

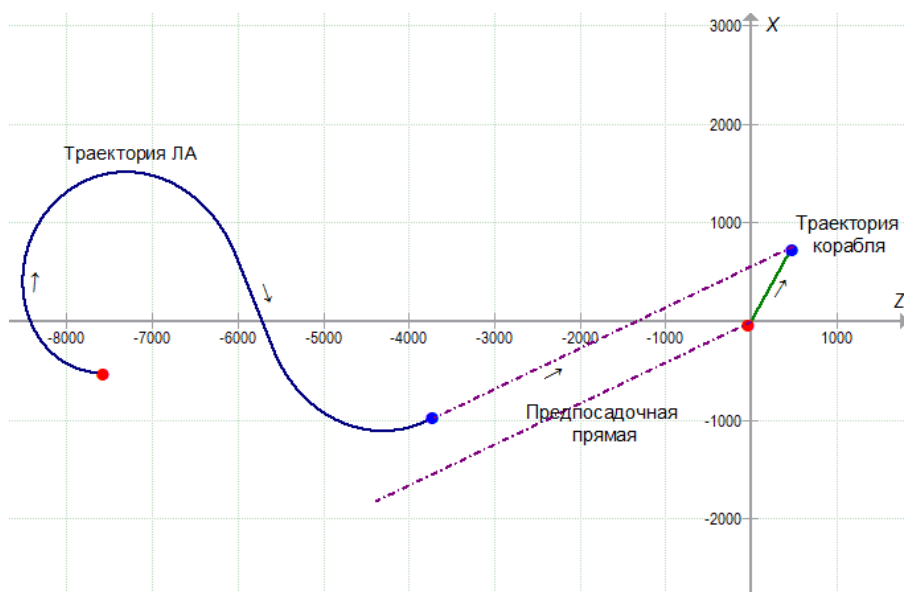


Рис. 7. Траектории ЛА и корабля при выведении ЛА на ПП

На рисунке 7 показана траектория выведения ЛА на ПП в топоцентрических координатах «восток-север» (Z, X) при начальных условиях примера № 5 таблицы 2 (координаты даны в метрах). Реализуется управление типа $\{+1, 0, -1\}$ с небольшим участком прямолинейного движения ЛА. Для «чистоты» моделирования использовалось численное интегрирование уравнений движения ЛА (4) и прямолинейного движения корабля с учетом дрейфа.

Заключение

Рассмотренный метод построения траекторий выведения ЛА на участок движущейся предпосадочной прямой, в основе которого лежит решение задачи оптимального по выбранному критерию управления, использует нелинейную модель движения, учитывающую большие значения углов курса и крена ЛА, постоянное воздействие ветровой нагрузки и прямолинейное движение корабля, выбранного для посадки ЛА. Полученные выражения для определения типов областей начальных условий и «структуры» безынерционного управления, формулы расчета моментов переключения ступеней управления и характерных точек траектории обеспечивают полное решение задачи синтеза оптимального наведения ЛА на ПП в соответствии с заданными начальными условиями, принятым критерием качества и ограничением на величину управления.

Представленная методика может служить основой для решения задач оптимального управления относительным движением летательных аппаратов, и задач, учитывающих ограничения на скорость изменения управляющего воздействия (инерционное управление), а также задач, использующих другие критерии оптимальности [9, 10].

Предложенный алгоритм практически может быть применен в составе многометодных пилотажно-навигационных комплексов летательных аппаратов и, в частности, при разработке математического обеспечения планово-пилотажных приборов, применяющихся при выполнении захода на посадку ЛА в указанных условиях.

Литература

1. *Dubins L. E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. // *Am. J. of Math.*, 79 (3), pp. 497–516. – DOI: 10.2307/2372560.
2. *Алесов М. Б., Пляскина А. А.* Оптимальное управление движением летательного аппарата при смене участка маршрута. // *Труды ГОСНИИАС. Серия: Вопросы авионики*, №1(56), 2022. – С. 22–36.
3. *Атанс Ж., Фалб П. Л.* Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
4. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
5. *Езерский В. В., Пляскина А. А.* К вопросу о математическом моделировании управления боковым траекторным движением летательного аппарата по критерию быстродействия. // *Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии. Сб. докл. Второй Междун. конф.* – СПб: СПбГУАП, 2021. – С. 206–210.
6. *Алесов М. Б., Пляскина А. А.* Задачи оптимального наведения при боковом траекторном маневрировании летательного аппарата. // *Авиационные системы в XXI веке. Сб. докл. Всеросс. научно-техн. конф.*, Москва, 2022. – С. 119–122.
7. *Алесов М. Б.* Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении продольного перемещения. // *Навигация и управление летательными аппаратами*, №4 (39), 2022. – С. 2–20.
8. *Козарук В. В., Ребо Я. Ю.* Навигационные эргатические комплексы самолетов. – М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.

9. *Алесов М. Б., Алесова И. М.* Оптимальное по гибричному критерию управление движением летательного аппарата при смене активного участка маршрута. // *Навигация и управление летательными аппаратами*, № 4 (35), 2021. – С. 16–31.

10. *Алесов М. Б.* Оптимальное управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении длительности маневрирования. // *Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки*, № 10, 2020. – С. 29–34.