

УДК 517.977.5

## ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ПОСАДКЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ДВИЖУЩИЙСЯ КОРАБЛЬ

*Михаил Борисович АЛЕСОВ, к. т. н., доцент*

*Раменское приборостроительное конструкторское бюро (филиал в г. Санкт-Петербург)*

*E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru,*

*Алина Андреевна ПЛЯСКИНА,*

*Раменское приборостроительное конструкторское бюро (филиал в г. Санкт-Петербург),  
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
аспирант*

*E-mail: aaplyaskina@spb.rpkb.ru*

*Рассматривается задача построения оптимальных траекторий при посадке летательного аппарата (ЛА) на движущийся корабль. В качестве модели относительного движения ЛА используется система нелинейных уравнений, учитывающая постоянное ветровое воздействие и переносное движение корабля. Поставлена и решена задача синтеза оптимального по критерию быстродействия траекторного управления и соответствующих траекторий выведения ЛА на предпосадочную прямую при заданных ограничениях на величину управляющего воздействия. Показано, что оптимальное управление кусочно-постоянно и имеет не более двух ступеней управления. Получены формулы для расчета моментов переключения ступеней управления, характерных точек траектории на фазовой плоскости и величины продольного перемещения ЛА. В работе представлены примеры численных расчетов оптимальных траекторий при различных типах начального положения ЛА, а также результаты моделирования движения ЛА при боковом наведении на предпосадочную прямую.*

**Ключевые слова:** *траекторное управление летательными аппаратами, оптимальное программное управление, принцип максимума Понтрягина, нелинейные динамические системы, относительное движение.*

## CONSTRUCTION OF THE OPTIMAL TRAJECTORIES DURING AIRCRAFT LANDING ON A MOVING SHIP

*Mikhail B. ALESOV, PhD in Engineering*

*Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau (St. Petersburg Branch)*

*E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru,*

*Alina A. PLYASKINA,*

*Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau (St. Petersburg Branch),*

*SUAI State University of Aerospace Instrumentation*

*E-mail: aaplyaskina@spb.rpkb.ru*

*The paper addresses the problem of constructing the optimal trajectories during aircraft landing on a moving ship. The system of nonlinear equations is used as a model of aircraft relative motion. This system considers constant wind and transient motion of the ship. The problem of synthesis of optimal by the minimum-time criterion trajectory control and the corresponding trajectories of the aircraft final approach under specified constraints on the control magnitude is formulated and solved. It is proved that optimal control is piecewise constant and has two control stages maximum. Formulas for calculating the control stages switching moments, trajectory characteristic points on the phase plane and longitudinal motion of the aircraft are obtained. The paper presents examples of numerical calculations of optimal trajectories for various types of the initial positions of the aircraft, as well as the results of modeling the motion of the aircraft during lateral guidance on the final approach track.*

**Keywords:** *aircraft trajectory control, optimal programmed control, Pontryagin's maximum principle, nonlinear dynamical system, relative motion.*

## Введение

Выполнение захода на посадку на движущийся корабль является одной из важных воздушных операций пилотажно-навигационного обеспечения беспилотных и пилотируемых летательных аппаратов (ЛА). Оперативное планирование такого вида маневра производится на основе построения траекторий, оптимальных по выбранному критерию качества.

Вопросы синтеза оптимального по критерию быстродействия управления и соответствующих траекторий при фиксированном конечном состоянии системы управления (координат и угла курса) рассмотрены в работах [1, 2]. В практике летной эксплуатации актуальной является задача синтеза программного управления при изменяющемся конечном положении, обусловленном движением корабля.

Данная статья посвящена решению задачи траекторного управления движением ЛА, описываемым нелинейной моделью, включающей учет значительных отклонений от предпосадочной прямой, больших величин относительного угла курса и крена, а также постоянного ветрового воздействия и равномерного движения корабля. Задача сводится к построению оптимальной по критерию быстродействия траектории ЛА, при этом в качестве управляющего воздействия используется ограниченное изменение угла крена ЛА.

Общие вопросы синтеза программного управления динамическими системами изложены в трудах Атанса Ж. и Фалба П. Л. [3], Афанасьева В. Н., Колмановского В. Б., Носова В. Р. [4]. Практические вопросы построения оптимальных траекторий ЛА на основе принципа Понтрягина Л. С. рассмотрены в работах ряда авторов [5, 6, 7].

### 1. Постановка задачи траекторного управления

Выполнение захода на посадку ЛА традиционно включает три этапа (участка): начальный этап, промежуточный этап и финальный участок (непосредственно участок глиссады). Каждый этап маневра начинается в соответствующей контрольной точке и имеет свое назначение, при этом во многих случаях начальный и промежуточный этапы (и соответствующие летные функции при их выполнении) могут быть объединены. С точки зрения горизонтальной навигации можно полагать, что движение на всех участках захода на посадку выполняется с одним и тем же путевым углом, задающим в плоскости ориентированную прямую линию в направлении точки посадки, назовем эту линию требуемого движения ЛА — предпосадочной прямой (ПП). Геометрически ПП проходит через точку посадки на корабле и при прямолинейном движении корабля плоскопараллельно перемещается вместе с ним.

Рассматриваемая задача заключается в построении оптимальной траектории выведения ЛА на участок предпосадочной прямой до точки окончания промежуточного этапа захода — точки входа в глиссаду (ТВГ) — из любой заданной точки навигационного пространства района посадки.

Скорость ЛА на предпосадочной прямой в топоцентрической системе координат района посадки удовлетворяет векторному соотношению

$$\vec{V} + \vec{U} = W'_\Pi \vec{i}_\Pi + \vec{W}_K, \quad (1)$$

где  $\vec{V}$  — вектор воздушной скорости ЛА;  $\vec{U}$  — вектор скорости ветра;  $W'_\Pi$  — модуль скорости ЛА относительно корабля;  $\vec{i}_\Pi$  — единичный вектор (орт), задающий направление предпосадочной прямой;  $\vec{W}_K$  — вектор путевой скорости корабля.

Предполагается, что путевая скорость корабля  $\vec{W}_K$  постоянна и задана, направление ПП и модуль скорости ЛА на ПП относительно корабля  $\vec{i}_\Pi$ ,  $W'_\Pi$  также постоянны и заданы.

В результате требуемая воздушная скорость ЛА  $V$  и требуемый относительный курс ЛА на ПП (разность требуемого курса на ПП и направления ПП)  $\psi_\Pi$  определяются выражениями:

$$V = \left\| W'_\Pi \vec{i}_\Pi + \vec{W}_K - \vec{U} \right\|, \quad \text{tg } \psi_\Pi = \frac{W_{K,Z} - U_Z}{W'_\Pi + W_{K,X} - U_X}, \quad (2)$$

где  $W_{K,X}$ ,  $W_{K,Z}$  — проекции скорости корабля на ПП и ее боковую ось (направлена вправо от ПП) соответственно;  $U_X$ ,  $U_Z$  — проекции постоянной скорости ветра на ПП и боковую ось соответственно (навигационное направление ветра).

По условиям задачи может быть задана воздушная скорость ЛА  $V$ , тогда требуемый относительный курс  $\psi_\Pi$  на ПП и относительная скорость ЛА вдоль ПП  $W'_\Pi$  определяются как:

$$\sin \psi_\Pi = \frac{W_{K,Z} - U_Z}{V}, \quad W'_\Pi = V \cos \psi_\Pi + U_X - W_{K,X}. \quad (3)$$

Движение ЛА в боковом направлении относительно ПП при траекторном «чистом» маневрировании описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния  $Z$  и  $\psi$  [8]:

$$\frac{dZ}{dt} = V \sin \psi + U_Z - W_{K,Z}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{g}{V} \text{tg } \gamma, \quad (4)$$

где  $Z$  — величина бокового отклонения ЛА от ПП (положительное значение — вправо от направления ПП), м;  $t$  — время, с;  $\psi$  — текущий относительный угол курса ЛА (угол продольной оси ЛА, отсчитываемый от направления ПП вправо), радианы;  $g$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\gamma$  — текущий угол крена ЛА, радианы.

Воздушная скорость ЛА и скорость ветра предполагаются заданными и постоянными при выполнении маневра. Замена переменных

$$\tau = t \frac{g}{V}, \quad z = Z \frac{g}{V^2}, \quad u_z = \frac{U_z}{V}, \quad w_z = \frac{W_{k,z}}{V} \quad (5)$$

приводит модель бокового движения (4) к следующей системе нормированных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = \sin \psi + u_z - w_z, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \operatorname{tg} \gamma, \quad (6)$$

где  $(z, \psi)$  — переменные состояния: нормированное боковое отклонение и относительный угол курса соответственно;  $\tau$  — переменная времени;  $u_z$  — параметр бокового ветра;  $w_z$  — параметр бокового движения корабля;  $\gamma$  — функция управления.

Задача траекторного навигационного управления при боковом выведении ЛА на ПП формулируется следующим образом. При заданных начальных значениях переменных состояния

$$z(0) = z_0, \quad \psi(0) = \psi_0 \quad (7)$$

следует вывести ЛА на предпосадочную прямую, при этом значения переменных состояния должны быть равны

$$z(\tau_m) = 0, \quad \psi(\tau_m) = \psi_{\Pi}, \quad (8)$$

где  $\tau_m$  — длительность маневрирования (не задана и подлежит расчету).

На угол крена, используемый в качестве функции управления, накладывается постоянное ограничение по величине

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma_0, \quad (9)$$

где  $\gamma_0$  — заданное максимально допустимое значение угла.

Оптимальное управление определяется исходя из требования быстродействия, при этом функционал качества управления формально может быть записан как

$$J(\gamma) = \int_0^{\tau_m} 1 \, d\tau \rightarrow \min. \quad (10)$$

При малых значениях углов курса и крена поставленная задача (6...10) в определенной степени подобна задаче оптимального управления линейной системой, описываемой двойным интегратором, по указанному критерию быстродействия [5].

Кроме уравнений бокового движения (4) запишем дифференциальное уравнение для составляющей  $X$  перемещения ЛА вдоль ПП

$$\frac{dX}{dt} = V \cos \psi + U_X - W_{K,X}. \quad (11)$$

В нормированном виде аналогично (6) уравнение (11) запишется как:

$$\frac{dx}{d\tau} = \cos \psi + u_x - w_x, \quad (12)$$

где  $x$  — нормированное продольное смещение;  $u_x$  — параметр продольного ветра вдоль ПП;  $w_x$  — параметр продольного движения корабля; указанные нормированные параметры рассчитываются как

$$x = X \frac{g}{V^2}, \quad u_x = \frac{U_X}{V}, \quad w_x = \frac{W_{K,X}}{V}.$$

Дополнительно к сформулированным условиям задачи (7...10) при построении траектории требуется, чтобы по окончании маневрирования расчетное перемещение вдоль ПП  $x_m = x(\tau_m)$ , определяемое решением уравнения (12), не превышало заданного граничного значения  $x_r$  (положения точки входа в глиссаду), т. е. необходимо обеспечить выполнение условия

$$x_m = x_0 + \int_0^{\tau_m} \cos \psi(\tau) d\tau + u_x \tau_m - w_x \tau_m \leq x_r, \quad (13)$$

где  $x_0$  — нормированное смещение ЛА по ПП в момент начала маневрирования ( $\tau = 0$ ).

При построении оптимальной траектории захода на посадку решающим фактором является синтез программы вывода ЛА на ПП, поэтому вначале рассматривается боковое движение системы в переменных состояния ( $z, \psi$ ), а затем по полученным параметрам траектории рассчитывается величина продольного перемещения. Если полученное расчетное значение перемещения  $x_m$  не больше требуемого  $x_r$  (т. е. выполняется условие (13)), то поставленная задача имеет решение, в противном случае решения нет и следует изменить параметры маневрирования.

На рисунке 1 показана горизонтальная траектория выведения ЛА на ПП и отмечены кинематические параметры маневра. Здесь

дополнительно к указанным ранее используются следующие обозначения: ИК — истинный курс ЛА;  $\vec{V}_{\Pi}$  — вектор воздушной скорости ЛА на ПП;  $A_{\Pi}$  — азимут ПП; ПУ — путевой угол корабля.

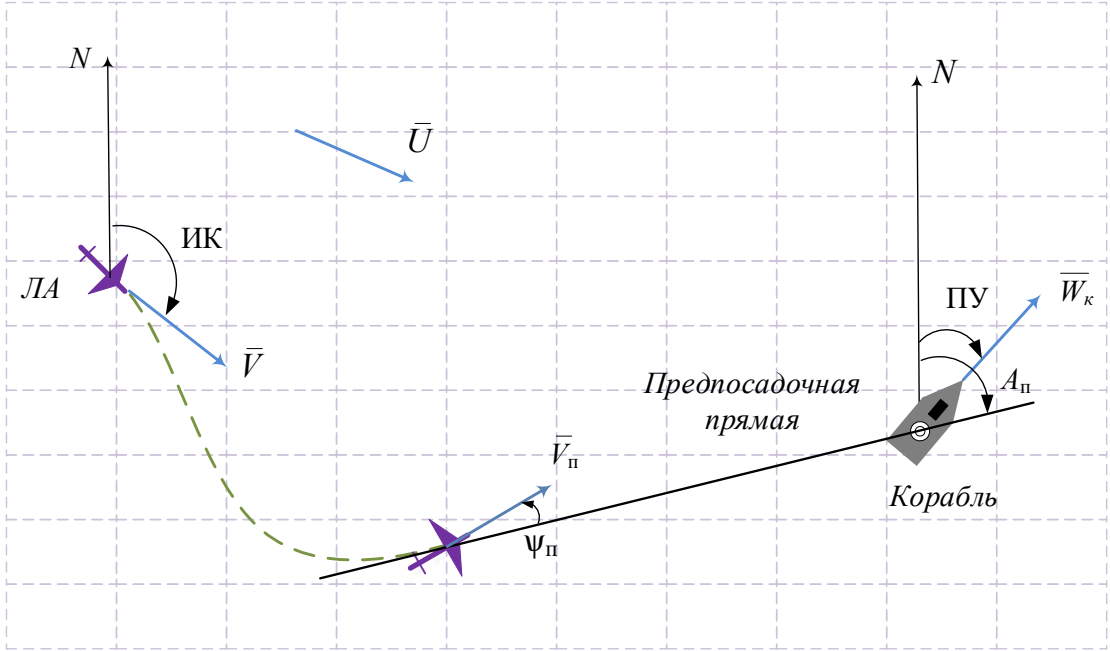


Рис. 1. Горизонтальная траектория выведения ЛА на ПП

Применение принципа Понтрягина Л. С. позволяет установить вид функции оптимального управления  $\gamma(\tau)$ . Из условия максимума гамильтониана следует, что функция управления  $\gamma(\tau)$  должна иметь кусочно-постоянный вид [5]:

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_2(\tau) > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_2(\tau) = 0, \\ -1, & \text{если } \lambda_2(\tau) < 0, \end{cases} \quad (14)$$

при этом в вырожденном случае относительный угол курса равен

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2},$$

где  $\lambda_2(\tau)$  — сопряженная функция системы (6).

На этом основании можно указать следующие свойства функции управления.

1) Функция оптимального управления  $\gamma(\tau)$  содержит одну или две положительные и отрицательные ступени управления, с возможным участком свободного прямолинейного движения — отсутствия управления при  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ , т. е. управление может переключаться (включаться и выключаться) не более четырех раз, с учетом первоначального включения и финального выключения.

2) Каждая ступень управления имеет «прямоугольную» форму с граничными значениями  $\pm\gamma_0$ .

3) Число неизвестных моментов переключения ступеней управления может быть равно: одному (одна ступень без участка свободного движения), двум (одна ступень с участком свободного движения или две ступени без участка свободного движения) и трем (две ступени с промежуточным участком свободного движения).

4) Функция управления  $\gamma(\tau)$  дискретна и имеет три возможных значения:  $+\gamma_0$  (правый крен),  $-\gamma_0$  (левый крен),  $0$  (прямолинейное движение).

Символически возможные типы управления можно записать как множество из десяти элементов:  $\{+1\}$ ,  $\{-1\}$ ,  $\{0, +1\}$ ,  $\{0, -1\}$ ,  $\{-1, +1\}$ ,  $\{+1, -1\}$ ,  $\{-1, 0, +1\}$ ,  $\{+1, 0, -1\}$ ,  $\{-1, 0, -1\}$ ,  $\{+1, 0, +1\}$ , где обозначение « $-1$ » соответствует отрицательной ступени  $-\gamma_0$ , « $+1$ » — положительной ступени  $+\gamma_0$ , « $0$ » — прямолинейному движению без управляющего воздействия.

## 2. Синтез оптимального траекторного управления

### 2.1. Решение уравнений движения

Поскольку управление имеет только три возможных дискретных значения, запишем решения дифференциальных уравнений (6, 12) в этих частных случаях.

При движении с постоянным креном  $\gamma(\tau) = \pm\gamma_0$  переменные состояния  $\psi$ ,  $z$ ,  $x$  изменяются как:

$$\psi - \psi_H = \pm \text{tg} \gamma_0 \tau, \quad (15)$$

$$z - z_H = (u_z - w_z) \tau \mp \frac{\cos \psi - \cos \psi_H}{\text{tg} \gamma_0}, \quad (16)$$

$$x - x_H = (u_x - w_x) \tau \pm \frac{\sin \psi - \sin \psi_H}{\text{tg} \gamma_0}, \quad (17)$$

где  $\psi_H$ ,  $z_H$ ,  $x_H$  — начальные значения переменных состояния для участка управления; знаки « $\pm$ » соответствуют положительной или отрицательной ступени управления соответственно.



Относительно угла курса  $\psi$  функции бокового  $z(\psi)$  и продольного  $x(\psi)$  перемещения записываются как:

$$z - z_H = \pm(u_z - w_z) \frac{\psi - \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0} \mp \frac{\cos \psi - \cos \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \quad (18)$$

$$x - x_H = \pm(u_x - w_x) \frac{\psi - \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\sin \psi - \sin \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (19)$$

Длительность маневрирования на данном участке постоянного управления при заданном конечном значении курса  $\psi = \psi_K$  равна

$$\Delta \tau_{\pm} = \pm \frac{\psi_K - \psi_H}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (20)$$

Прямолинейное движение (при отсутствии крена) выполняется при курсе  $\psi(\tau) = \mp \frac{\pi}{2}$ , а переменные состояния  $z$ ,  $x$  изменяются линейно

$$z - z_H = (u_z - w_z) \tau \mp \tau, \quad (21)$$

$$x - x_H = (u_x - w_x) \tau. \quad (22)$$

Длительность маневрирования на участке свободного движения при заданном конечном значении бокового отклонения  $z = z_K$  равна

$$\Delta \tau_0 = \frac{z_K - z_H}{(u_z - w_z) \mp 1}. \quad (23)$$

Рассмотрим далее движение ЛА при возможных типах управления  $\{\pm 1\}$ ,  $\{\mp 1, \pm 1\}$ ,  $\{\mp 1, 0, \pm 1\}$ ,  $\{0, \pm 1\}$ ,  $\{\pm 1, 0, \pm 1\}$ , а затем укажем области фазовой плоскости  $(z, \psi)$ , где управление данных типов реализуется.

## 2.2. Одноступенчатое управление

При одноступенчатом управлении типа  $\{\pm 1\}$  изменение переменных состояния описывается функциями (15...17) при начальных значениях  $\psi_H = \psi_0$ ,  $z_H = z_0$ ,  $x_H = x_0$ . Движение выполняется до граничных условий (8).

Выражение (18) при  $\psi = \psi_H$ ,  $z = 0$ ,  $\psi_H = \psi_0$ ,  $z_H = z_0$  описывает фазовую линию начальных значений одноступенчатого управления соответствующего знака  $\Gamma_{\pm} = \{(z_0, \psi_0) \mid z_0 = z_{\pm}(\psi_0)\}$

$$z_0 = \pm(u_z - w_z) \frac{\psi_H - \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\cos \psi_H - \cos \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (24)$$

Как показано на фазовой плоскости  $z(\psi)$  рисунка 2, линия имеет две ветви — для положительной  $\Gamma_+$  (при  $\psi_0 < \psi_{\Pi}$ ) и отрицательной  $\Gamma_-$  (при  $\psi_0 > \psi_{\Pi}$ ) ступеней управления соответственно. Если начальные значения  $(z_0, \psi_0)$  принадлежат линии  $\Gamma_{\pm}$ , то возможно единственное оптимальное управление соответствующей полярности.

Длительность процесса управления  $\tau_m = \Delta\tau_{\pm}$  определяется из формулы (20) при  $\psi_K = \psi_{\Pi}$ . Продольное перемещение  $x_m = x$  за время управления в этом случае рассчитывается по формуле (19) при  $\psi = \psi_{\Pi}$ .

### 2.3. Двухступенчатое управление противоположного знака без участка свободного движения

Рассмотрим двухступенчатое управление вида  $\{\mp 1, \pm 1\}$  и обозначим множество начальных значений  $(z_0, \psi_0)$ , из которых может быть реализован такой вид управления, как  $\Omega_{\mp\pm}$ . Характерные точки траектории определяются последовательным рассмотрением участков движения.

На первом участке (первой ступени управления) от начальных фазовых координат  $(z_0, \psi_0)$  до точки переключения управления  $(z_{\mp\pm}, \psi_{\mp\pm})$  изменение фазовых координат описывается функциями (15...17) при начальных значениях  $\psi_H = \psi_0, z_H = z_0, x_H = x_0$ . На втором участке изменение фазовых координат описывается также функциями (15...17), но при начальных значениях  $\psi_H = \psi_{\mp\pm}, z_H = z_{\mp\pm}, x_H = x_{\mp\pm}$  до конечного состояния (8).

Приравнявая выражения для  $z_{\mp\pm}$  двух ступеней, получим следующее нелинейное уравнение относительно угла курса при переключении управления  $\psi_{\mp\pm}$ :

$$\pm \frac{\cos \psi_{\Pi} - 2 \cos \psi_{\mp\pm} + \cos \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \mp (u_z - w_z) \frac{\psi_{\Pi} - 2\psi_{\mp\pm} + \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} = z_0. \quad (25)$$

Уравнение (25) может быть решено численно при заданных границах изменения искомой переменной. Для начальных значений из области  $\Omega_{-+}$  границы переменной  $\psi_{-+}$  следует выбирать как  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_{-+} < \psi_{\Pi}$ , для области  $\Omega_{+-}$  используется интервал  $\psi_{\Pi} < \psi_{+-} \leq \frac{\pi}{2}$ .

После расчета угла курса  $\psi_{\mp\pm}$  длительности ступеней управления  $\tau_1 = \tau_{\mp\pm}, \Delta\tau_2$  определяются по формуле (20) соответственно при начальных и конечных условиях  $\psi_H = \psi_0, \psi_K = \psi_{\mp\pm}$  и  $\psi_H = \psi_{\mp\pm}, \psi_K = \psi_{\Pi}$ . Боковые и продольные смещения определяются по формулам (18, 19) при указанных начальных и конечных значениях курса на участках.

#### 2.4. Двухступенчатое управление противоположных знаков с участком свободного движения

Рассмотрим двухступенчатое управление вида  $\{\mp 1, 0, \pm 1\}$ , которое содержит участок свободного движения в качестве промежуточного. Обозначим множество начальных значений  $(z_0, \psi_0)$ , из которых может быть реализован такой вид управления, как  $\Omega_{\mp 0\pm}$ . Характерные точки траектории определяются последовательным рассмотрением участков движения.

На первом участке (первой ступени управления) от начальных фазовых координат  $(z_0, \psi_0)$  до точки выключения управления  $z_{\mp 0}, \mp \frac{\pi}{2}$  изменение фазовых координат описывается функциями (15...17) при начальных значениях  $\psi_H = \psi_0, z_H = z_0, x_H = x_0$ . Боковое отклонение в конце первого участка  $z = z_{\mp 0}$  определяется уравнением (18) при  $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$ . Длительность первого участка  $\tau_1 = \tau_{\mp 0}$  рассчитывается по формуле (20) при  $\psi_K = \mp \frac{\pi}{2}$ , а продольное смещение  $x = x_{\mp 0}$  — по формуле (19) при  $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$ .

Движение на втором участке выполняется с изменением фазовых координат, определяемых формулами (21, 22) при начальных значениях  $z_H = z_{\mp 0}, x_H = x_{\mp 0}$ . Длительность свободного участка  $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$  рассчитывается по формуле (23) при конечном боковом отклонении  $z_K = z_{0\pm}$ . Причем значение  $z_{0\pm}$  бокового отклонения в момент завершения второй ступени (включение управления на последнем участке) рассчитывается по формуле (18) как

$$z_{0\pm} = \mp(u_z - w_z) \frac{\psi_{\Pi} \pm \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\cos \psi_{\Pi}}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (26)$$

Продольное смещение на втором участке  $x_{0\pm}$  определяется по формуле (22) при известной длительности движения  $\tau = \Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$ .

На конечном (третьем) участке траектория описывается уравнениями (15...17) при начальных значениях  $\psi_H = \mp \frac{\pi}{2}, z_H = z_{0\pm}, x_H = x_{0\pm}$ . Длительность участка  $\Delta\tau_3$  определяется по формуле (20) при  $\psi_K = \psi_{\Pi}$ , а продольное смещение  $x = x_M$  — по формуле (19) при  $\psi = \psi_{\Pi}$ .

Линия  $\Gamma_{\mp\pm} = \{(z_0, \psi_0) | z_0 = z_{\mp\pm}(\psi_0)\}$ , отделяющая начальные условия двухступенчатого управления с участком свободного движения и при отсутствии оно, на фазовой плоскости задается функцией

$$z_0(\psi_0) = \mp(u_z - w_z) \frac{\pm\pi + \psi_{\Pi} + \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm \frac{\cos \psi_{\Pi} + \cos \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (27)$$

## 2.5. Двухступенчатое управление одного знака с участком свободного движения

Рассмотрим двухступенчатое управление  $\{\pm 1, 0, \pm 1\}$ , которое содержит участок свободного движения в качестве промежуточного. Обозначим множество начальных значений  $(z_0, \psi_0)$ , из которых может быть реализован такой вид управления, как  $\Omega_{\pm 0\pm}$ . Характерные точки траектории определяются последовательным рассмотрением участков движения.

На первом участке (первой ступени управления) от начальных фазовых координат  $(z_0, \psi_0)$  до момента выключения управления  $z_{\pm 0}, \mp \frac{\pi}{2}$  изменение фазовых координат описывается функциями (15...17) при начальных значениях  $\psi_H = \psi_0, z_H = z_0, x_H = x_0$ , причем  $-\pi \leq \psi_0 < -\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{\pi}{2} < \psi_0 \leq \pi$ . Боковое отклонение в конце первого участка  $z = z_{\pm 0}$  определяется уравнением (18) при  $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$ . Длительность первого участка  $\tau_1 = \Delta\tau_{\pm 0}$  рассчитывается по формуле (20) при  $\psi_K = \mp \frac{\pi}{2}$ , а продольное смещение  $x = x_{\pm 0}$  — по формуле (19) при  $\psi = \mp \frac{\pi}{2}$ .

Движение на втором участке выполняется с изменением фазовых координат, определяемым формулами (21, 22) при начальных значениях  $z_H = z_{\pm 0}, x_H = x_{\pm 0}$ . Длительность свободного участка  $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$  рассчитывается по формуле (23) при конечном боковом отклонении  $z_K = z_{0\pm}$ . Причем значение бокового отклонения в момент завершения второй ступени (включение управления на финальном участке)  $z_{\pm 0} = z_H$  определяется по формуле (18) при  $\psi_H = \mp \frac{\pi}{2}, \psi = \psi_{\Pi}, z = 0$ . Продольное смещение в конце второго участка  $x_{0\pm}$  рассчитывается по формуле (22) при известной длительности движения на участке  $\tau = \Delta\tau_2 = \Delta\tau_0$ .

На конечном (третьем) участке траектория описывается уравнениями (15...17) при начальных значениях  $\psi_H = \mp \frac{\pi}{2}, z_H = z_{0\pm}, x_H = x_{0\pm}$ . Длительность участка  $\Delta\tau_3$  определяется по формуле (20) при  $\psi_K = \psi_{\Pi}$ , а продольное смещение  $x = x_M$  — по формуле (19) при  $\psi = \psi_{\Pi}$ .

Частным случаем рассмотренного типа управления является ситуация, когда начальный курс равен  $\psi_0 = \mp \frac{\pi}{2}$ , при этом реализуется управление  $\{0, \pm 1\}$ , соответствующее двум последним участкам рассмотренных ранее траекторий  $\{\pm 1, 0, \pm 1\}, \{\mp 1, 0, \pm 1\}$ .

## 2.6. Области начальных значений и типы управления

С учетом рассмотренных допустимых типов управления на фазовой плоскости  $(z, \psi)$  выделяются 6 областей начальных значений  $(z_0, \psi_0)$ , отделяемых линиями постоянного управления  $\Gamma_{\pm} = \{(z_0, \psi_0) \mid z_0 = z_{\pm}(\psi_0)\}$ ,  $\Gamma_{\mp\pm} = \{(z_0, \psi_0) \mid z_0 = z_{\mp\pm}(\psi_0)\}$  и свободного движения при  $\psi_0 = \mp \frac{\pi}{2}$ , откуда реализуются соответствующие типы управления. На рисунке 2 показаны соответствующие области  $\Omega_{-+}, \Omega_{-0+}, \Omega_{+0+}, \Omega_{+-}, \Omega_{+0-}, \Omega_{-0-}$  и разделяющие их линии. В таблице 1 даны определения областей начальных значений  $(z_0, \psi_0)$  и соответствующие способы решения поставленной задачи.

Таблица 1. Типы управления и области начальных значений

Обозначение	Тип управления	Определение области $\{(z_0, \psi_0)\}$	Построение траектории
$\Omega_{-+}$	Отрицательная и положительная ступени $\{-1, +1\}$	При $\psi_0 \in (\psi_{\Pi}, \pi)$ боковые отклонения $z_0 \in (z_{-}(\psi_0), z_{-+}(\psi_0))$ . При $\psi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \psi_{\Pi}\right]$ боковые отклонения $z_0 \in (z_{+}(\psi_0), z_{-+}(\psi_0))$	П. 2.3
$\Omega_{+-}$	Положительная и отрицательная ступени $\{+1, -1\}$	При $\psi_0 \in \left[\psi_{\Pi}, \frac{\pi}{2}\right]$ боковые отклонения $z_0 \in [z_{+-}(\psi_0), z_{+}(\psi_0))$ . При $\psi_0 \in (-\pi, \psi_{\Pi})$ боковые отклонения $z_0 \in [z_{+-}(\psi_0), z_{+}(\psi_0))$	П. 2.3
$\Omega_{-0+}$	Отрицательная и положительная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{-1, 0, +1\}$	При $\psi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (z_{-+}(\psi_0), +\infty)$	П. 2.4
$\Omega_{+0-}$	Положительная и отрицательная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{+1, 0, -1\}$	При $\psi_0 \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (-\infty, z_{+-}(\psi_0))$	П. 2.4

Таблица 1 (продолжение). Типы управления и области начальных значений

Обозначение	Тип управления	Определение области $\{(\psi_0, z_0)\}$	Построение траектории
$\Omega_{+0+}$	Положительная и положительная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{+1, 0, +1\}$	При $\psi_0 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (z_+(\psi_0), +\infty)$	П. 2.5
$\Omega_{-0-}$	Отрицательная и отрицательная ступени с промежуточным участком свободного движения $\{-1, 0, -1\}$	При $\psi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ боковые отклонения $z_0 \in (-\infty, z(\psi_0))$	П. 2.5

### 3. Примеры построения оптимальных траекторий и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры синтеза управления и построения оптимальных траекторий выведения ЛА на ПП движущегося корабля.

Расчет проекций скорости корабля на ПП и ее боковую ось выполняется по матричной формуле

$$\begin{bmatrix} W_{K,X} \\ W_{K,Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A_{\Pi} & \sin A_{\Pi} \\ -\sin A_{\Pi} & \cos A_{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_K \cos \text{ПУ} \\ W_K \sin \text{ПУ} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где  $A_{\Pi} = \psi_{\text{ко}} + \Delta\psi_{\Pi,K}$  — азимут ПП;  $\psi_{\text{ко}}$  — курс корабля;  $\Delta\psi_{\Pi,K}$  — курсовой угол ПП относительно диаметральной плоскости корабля;  $W_K$  — путевая скорость корабля;  $\text{ПУ} = \psi_{\text{ко}} + \alpha$  — путевой угол корабля;  $\alpha$  — угол дрейфа корабля.

Примем следующие числовые параметры модели движения: корабль движется в северо-восточном направлении с курсом  $\psi_{\text{ко}} = 22,50^\circ$  (румб «NNE») со скоростью  $W_K = 20$  узлов = 37 км/час = 10,3 м/с; курсовой угол ПП относительно диаметральной плоскости корабля  $\Delta\psi_{\Pi,K} = 45^\circ$ ; тогда азимут ПП  $A_{\Pi} = 67,50^\circ$ . Угол дрейфа корабля  $\alpha$  составляет  $10^\circ$ , тогда путевой угол корабля равен  $\text{ПУ} = 32,50^\circ$ . Составляющие путевой скорости корабля относительно ПП равны:  $W_{K,X} = 8,4$  м/с;  $W_{K,Z} = -5,9$  м/с.

Ветер дует со скоростью  $U = 10$  м/с в юго-восточном направлении, навигационное направление ветра  $\psi_B = 135^\circ$ .

Расчет компонент скорости ветра относительно ПП и ее боковой оси выполняется по матричной формуле

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A_{\Pi} & \sin A_{\Pi} \\ -\sin A_{\Pi} & \cos A_{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \cos \psi_B \\ U \sin \psi_B \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Компоненты ветра относительно ПП равны:  $U_x = 3,8$  м/с,  $U_z = 9,2$  м/с.

При заданной относительной скорости ЛА  $W'_{\Pi} = 300$  км/час = = 83,3 м/с согласно формуле (2) воздушная скорость ЛА на ПП равна  $V = 89,2$  м/с, а требуемый относительный курс на ПП  $\psi_{\Pi} = -9,8^{\circ} = = -0,17$  радиан. Максимально допустимое значение угла крена ЛА  $\gamma_0$  принято  $350^{\circ}$ . Начальное значение продольного смещения на ПП в момент начала маневра без потери общности принято нулевым  $x_0 = 0$ .

Нормированные безразмерные значения переменных модели согласно (5) записываются как:

$$\begin{aligned} \tau &= 0,11 t, \quad z = 1,23 Z, \quad x = 1,23 X, \quad u_z = 0,011 U_z, \quad u_x = 0,011 U_x, \\ w_z &= 0,011 W_z, \quad w_x = 0,011 W_x, \end{aligned}$$

где боковая и продольная координаты  $Z, X$  измеряются в километрах, а время  $t$  — в секундах.

На рисунке 2 показаны области начальных значений и разделяющие их линии на фазовой плоскости с координатами  $(z, \psi)$  для указанных числовых значений параметров задачи.

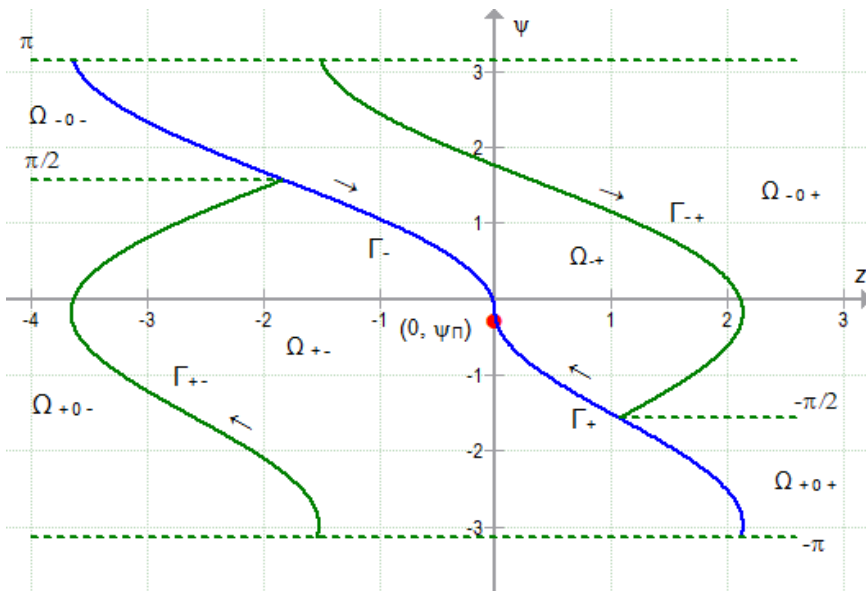


Рис. 2. Области начальных значений и граничные линии

Численные примеры расчета характерных точек траектории при различных типах управления (областей начальных условий на фазовой плоскости рисунка 2) представлены в таблице 2.

Таблица 2. Примеры синтеза управления и построения траекторий

№ примера	Начальные условия	Тип управления	Характерные точки траектории
1	Область $\Omega_{-+}$ : $z_0 = -1$ ; $\psi_0 = 100^\circ$	$\{-1, +1\}$	Точка переключения ступеней: $\tau_1 = 4,097$ ; $z_{-+} = 0,559$ ; $\psi_{-+} = -1,124$ . Момент выключения управления: $\tau_M = 5,457$ . Продольное смещение: $x_M = 3,457$
2	Область $\Omega_{-0+}$ : $z_0 = -1$ ; $\psi_0 = 100^\circ$	$\{-1, 0, +1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 4,736$ ; $z_{-0} = 2,048$ ; $\psi_{-0} = -1,571$ . Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 5,917$ ; $z_{0+} = 1,069$ ; $\psi_{0+} = -1,571$ . Момент выключения управления: $\tau_M = 7,916$ . Продольное смещение: $x_M = 3,612$
3	Область $\Omega_{+0+}$ : $z_0 = 3,5$ ; $\psi_0 = -150^\circ$	$\{+1, 0, +1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 1,496$ ; $z_{+0} = 2,516$ ; $\psi_{+0} = -1,571$ . Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 3,238$ ; $z_{0+} = 1,069$ ; $\psi_{0+} = -1,571$ . Момент выключения управления: $\tau_M = 5,237$ . Продольное смещение: $x_M = 0,201$
4	Область $\Omega_{+-}$ : $z_0 = 0$ ; $\psi_0 = -150^\circ$	$\{+1, 0, -1\}$	Точка переключения ступеней: $\tau_1 = 5,271$ ; $z_{+-} = -1,026$ ; $\psi_{+-} = -1,073$ . Момент выключения управления: $\tau_M = 7,048$ . Продольное смещение: $x_M = 3,104$
5	Область $\Omega_{+0-}$ : $z_0 = -3$ ; $\psi_0 = -150^\circ$	$\{+1, 0, -1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 5,982$ ; $z_{+0} = -3,224$ ; $\psi_{+0} = 1,571$ . Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 7,1759$ ; $z_{0-} = -1,828$ ; $\psi_{0-} = 1,571$ . Момент выключения управления: $\tau_M = 9,664$ . Продольное смещение: $x_M = 3,315$



№ примера	Начальные условия	Тип управления	Характерные точки траектории
6	Область $\Omega_{-0-}$ : $z_0 = -5$ ; $\psi_0 = 150^\circ$	$\{-1, 0, -1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 1,496$ ; $z_{-0} = -3,510$ ; $\psi_{-0} = 1,571$ . Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 2,934$ ; $z_{0-} = -1,828$ ; $\psi_{0-} = 1,571$ . Момент выключения управления: $\tau_M = 5,421$ . Продольное смещение: $x_M = 0,678$

Траектории движения динамической системы на фазовой плоскости  $(z, \psi)$  при положительном и отрицательном финальном управлении и условиях числовых примеров № 1, № 2, № 3 и № 4, № 5, № 6 таблицы 2 показаны на рисунках 3 и 5 соответственно. Точками обозначены характерные состояния системы управления, стрелками — направление движения.

Соответствующие траектории движения ЛА на горизонтальной плоскости в нормированных горизонтальных координатах примеров № 1, № 2, № 3 и № 4, № 5, № 6 таблицы 2 показаны на рисунках 4 и 6.

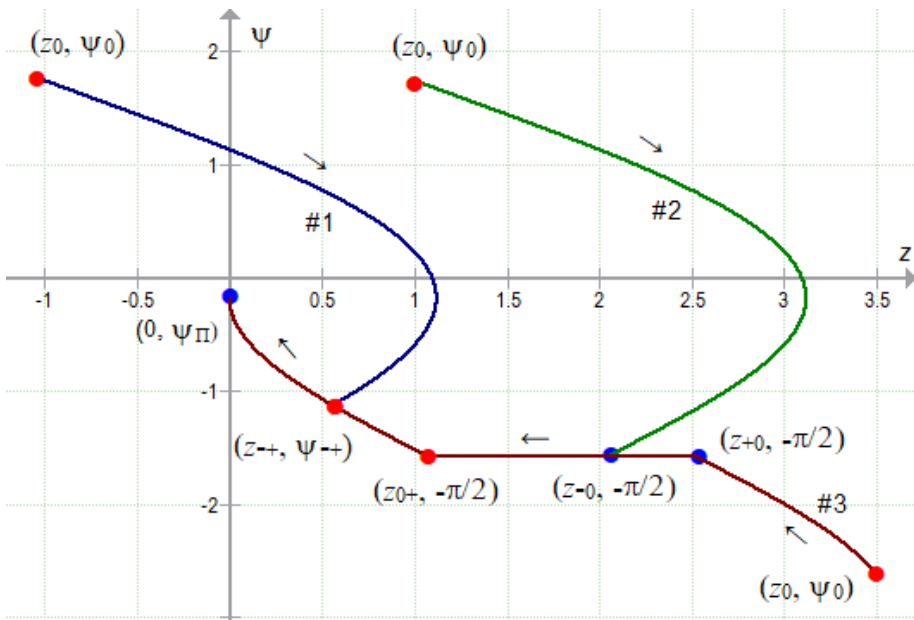


Рис. 3. Движение по фазовой плоскости при положительном финальном управлении

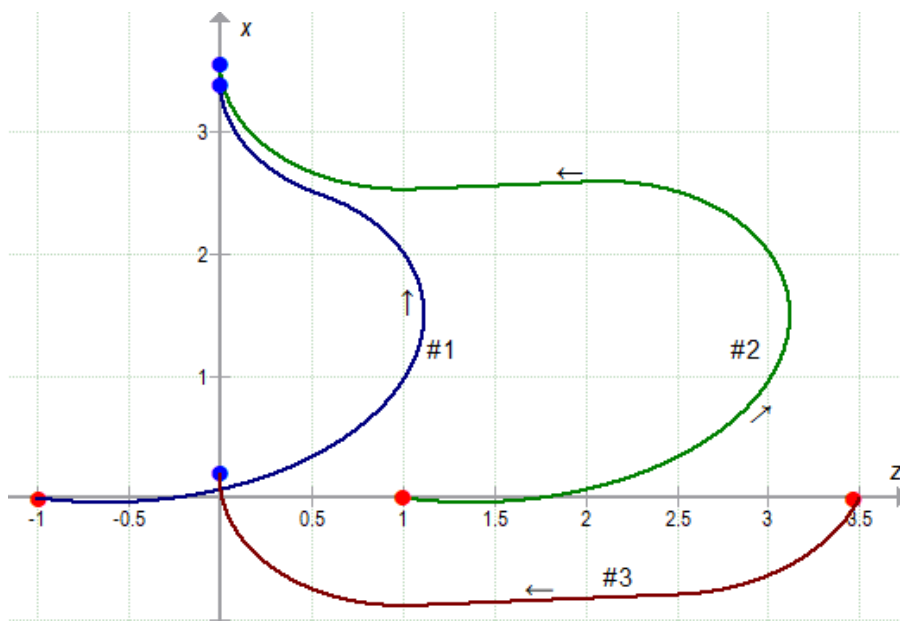


Рис. 4. Движение в горизонтальной плоскости при положительном финальном управлении

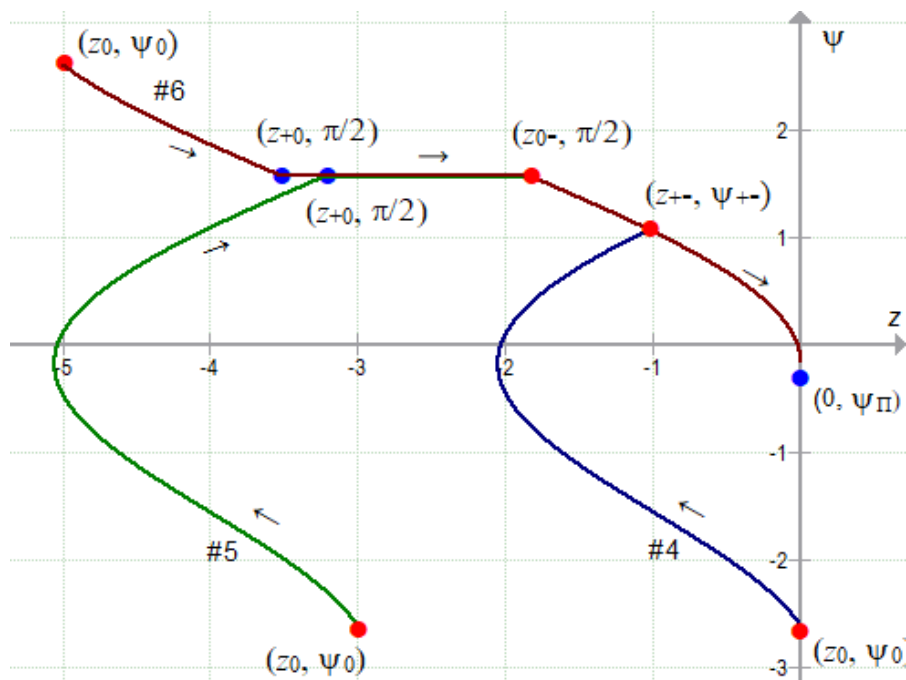


Рис. 5. Движение по фазовой плоскости при отрицательном финальном управлении

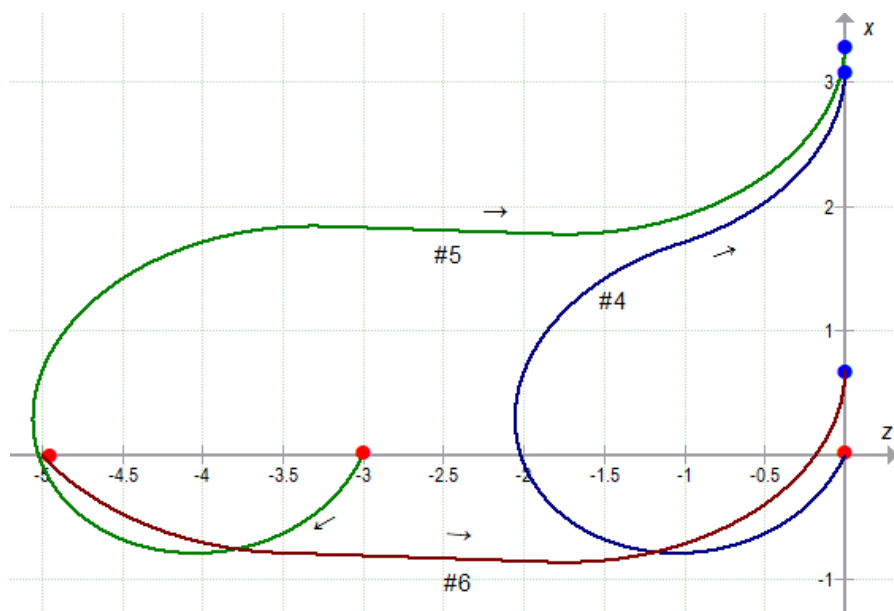


Рис. 6. Движение в горизонтальной плоскости при отрицательном финальном управлении

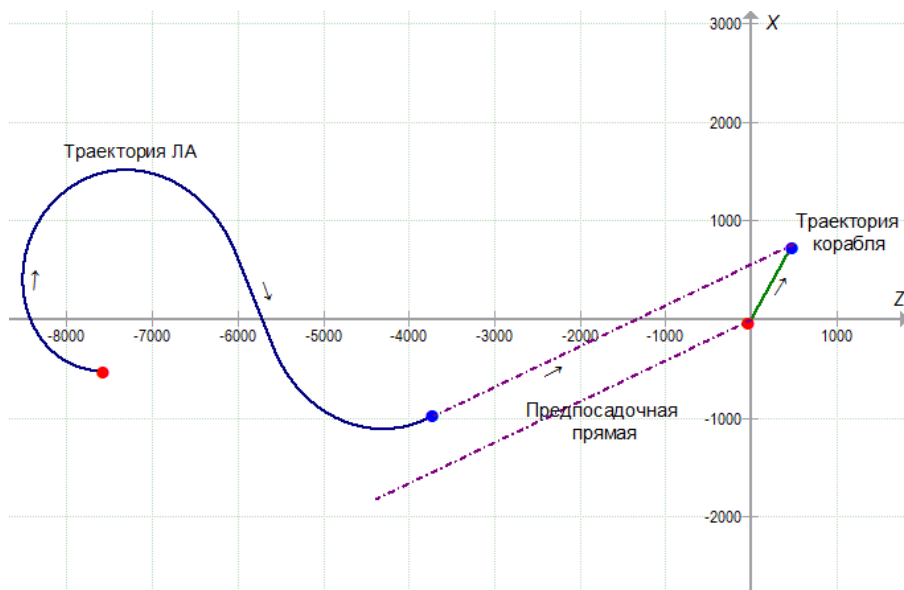


Рис. 7. Траектории ЛА и корабля при выведении ЛА на ПП

На рисунке 7 показана траектория выведения ЛА на ПП в топоцентрических координатах «восток-север» ( $Z, X$ ) при начальных условиях примера № 5 таблицы 2 (координаты даны в метрах). Реализуется управление типа  $\{+1, 0, -1\}$  с небольшим участком прямолинейного движения ЛА. Для «чистоты» моделирования использовалось численное интегрирование уравнений движения ЛА (4) и прямолинейного движения корабля с учетом дрейфа.

### **Заключение**

Рассмотренный метод построения траекторий выведения ЛА на участок движущейся предпосадочной прямой, в основе которого лежит решение задачи оптимального по выбранному критерию управления, использует нелинейную модель движения, учитывающую большие значения углов курса и крена ЛА, постоянное воздействие ветровой нагрузки и прямолинейное движение корабля, выбранного для посадки ЛА. Полученные выражения для определения типов областей начальных условий и «структуры» безынерционного управления, формулы расчета моментов переключения ступеней управления и характерных точек траектории обеспечивают полное решение задачи синтеза оптимального наведения ЛА на ПП в соответствии с заданными начальными условиями, принятым критерием качества и ограничением на величину управления.

Представленная методика может служить основой для решения задач оптимального управления относительным движением летательных аппаратов, и задач, учитывающих ограничения на скорость изменения управляющего воздействия (инерционное управление), а также задач, использующих другие критерии оптимальности [9, 10].

Предложенный алгоритм практически может быть применен в составе многометодных пилотажно-навигационных комплексов летательных аппаратов и, в частности, при разработке математического обеспечения планово-пилотажных приборов, применяющихся при выполнении захода на посадку ЛА в указанных условиях.

## Литература

1. *Dubins L. E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. // *Am. J. of Math.*, 79 (3), pp. 497–516. – DOI: 10.2307/2372560.
2. *Алесов М. Б., Пляскина А. А.* Оптимальное управление движением летательного аппарата при смене участка маршрута. // *Труды ГОСНИИАС. Серия: Вопросы авионики*, №1(56), 2022. – С. 22–36.
3. *Атанс Ж., Фалб П. Л.* Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
4. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
5. *Езерский В. В., Пляскина А. А.* К вопросу о математическом моделировании управления боковым траекторным движением летательного аппарата по критерию быстродействия. // *Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии. Сб. докл. Второй Междун. конф.* – СПб: СПбГУАП, 2021. – С. 206–210.
6. *Алесов М. Б., Пляскина А. А.* Задачи оптимального наведения при боковом траекторном маневрировании летательного аппарата. // *Авиационные системы в XXI веке. Сб. докл. Всеросс. научно-техн. конф., Москва, 2022.* – С. 119–122.
7. *Алесов М. Б.* Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении продольного перемещения. // *Навигация и управление летательными аппаратами*, №4 (39), 2022. – С. 2–20.
8. *Козарук В. В., Ребо Я. Ю.* Навигационные эргатические комплексы самолетов. – М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.

9. *Алесов М. Б., Алесова И. М.* Оптимальное по гибричному критерию управление движением летательного аппарата при смене активного участка маршрута. // *Навигация и управление летательными аппаратами*, № 4 (35), 2021. – С. 16–31.

10. *Алесов М. Б.* Оптимальное управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении длительности маневрирования. // *Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки*, № 10, 2020. – С. 29–34.

УДК 629.7.05

## ШЕСТНАДЦАТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА. МОДИФИКАЦИЯ 2

**Юрий Павлович НИКОЛАЕВ**, д-р физ.-мат. наук,

**Николай Андреевич КОЗЕЛЬКО**,

E-mail: aomiea@aviapribor.ru

ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Рассматривается модификация нерешенной к настоящему времени шестнадцатой проблемы Гильберта. Предлагается простое необходимое и простое достаточное условия устойчивости, удобные для решения прикладных задач. Данные условия устойчивости применяются при исследовании геометрии многомерной области устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического полинома.

**Ключевые слова:** Шестнадцатая проблема Гильберта, трактовка В.И. Арнольда, алгебраическая кривая, полиномы Эрмита – Билера, устойчивость линейных систем, критерий устойчивости Гурвица, многомерная область устойчивости, трехдиагональная матрица (матрица Якоби – Гурвица), линейные системы управления.

## HILBERT SIXTEENTH PROBLEM. MODIFICATION II

**Yury P. NIKOLAEV**, D. Sc. in Phys and Math,

**Nikolay A. KOZELKO**,

E-mail: aomiea@aviapribor.ru

‘Moscow Institute of Electromechanics and Automatics’ PJSC

The article considers a modification of currently unsolved Hilbert sixteenth problem. It proposes simple necessary and sufficient stability conditions, convenient for applied problem solving. These stability conditions are applied during the study of the geometry of multivariable stability domain in characteristic polynomial coefficients space.

**Keywords:** Hilbert sixteenth problem, V. I. Arnold interpretation, algebraic curve, Hermite-Biehler polynomials, stability of linear systems, Hurwitz stability criterion, multidimensional stability domain, tridiagonal matrix (Jacobian-Hurwitz matrix), linear control systems.

## 1. Введение

Проблемы Гильберта [1, 2] — список из 23 кардинальных проблем математики, представленный Давидом Гильбертом на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Тогда эти проблемы (охватывающие основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, группы Ли, вещественный и комплексный анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и теорию вероятностей, а также вариационное исчисление) не были решены.

На данный момент решены 17 проблем из 23.

Шестнадцатая проблема Гильберта — одна из нерешенных к настоящему времени задач. Исходно проблема называлась «Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей» (*Problem der Topologie algebraischer Kurven und Fldchen*).

В настоящей работе используется следующая трактовка Шестнадцатой проблемы Гильберта [3].

Пусть  $f$  — полином (с вещественными коэффициентами) степени  $n$  от двух переменных  $x$  и  $y$ .

Вопрос Гильберта состоит в том, чтобы исследовать, какое топологическое строение может иметь алгебраическая кривая, заданная на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $x$  и  $y$  уравнением  $f(x, y) = 0$ .

*Определение.* Алгебраическая кривая, или плоская алгебраическая кривая — это геометрическое место (множество) точек на плоскости ( $O; x, y$ ), которое определяется как множество нулей полинома от двух переменных. Степенью (или порядком)  $n$  этой кривой называется степень этого полинома.

Частной, но важной для практики проектирования систем управления, является задача определения простых алгебраических условий устойчивости для полинома.

В статье рассматриваются два дополняющих друг друга варианта решения этой задачи: с использованием критерия Гурвица (необходимые условия устойчивости) и с применением результатов работ [16, 17] — (достаточные условия устойчивости).

## 2. Постановка задачи. Разработка простых необходимых (достаточных) условий устойчивости

Задача отыскания критерия устойчивости для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, была сформулирована Максвеллом в 1868 году.



Максвелл обратился к членам Лондонского королевского общества с предложением подыскать какой-то метод, который бы не требовал прямого нахождения всех корней характеристического полинома, но давал бы суждение только о знаке их вещественной части.

На просьбу Максвелла откликнулся коллега Максвелла по Кембриджскому университету, ставший профессором этого же университета, Эдвард Раус (*Edward Routh*). В 1873 г. он опубликовал знаменитый алгебраический критерий, носящий его имя.

В конце XIX века словацкий инженер, создатель теории регулирования турбин, А. Стодола, не зная работ Рауса, доказал необходимое условие устойчивости полиномов с вещественными коэффициентами [4, 5] и поставил задачу об отыскании необходимых и достаточных условий перед выдающимся немецким математиком А. Гурвицем (*Adolf Hurwitz*).

Гурвиц работал профессором Политехнической школы в Цюрихе. Среди его студентов в Цюрихе были Давид Гильберт и Альберт Эйнштейн.

Алгебраический критерий устойчивости системы любого порядка, предложенный Гурвицем в 1895 году, предполагает, как известно, следующую процедуру:

- По определенному правилу из коэффициентов характеристического полинома системы составляется прямоугольная матрица того же порядка.
- Находятся все диагональные миноры этой матрицы.
- Необходимым и достаточным условием отрицательности вещественных частей всех корней, а следовательно, и устойчивости системы является положительность всех этих миноров.

*Примечание.* Критерий Гурвица, как было установлено позднее (см. [6, 7]), тесно связан с более ранней статьей Эрмита, признанного лидера математиков Франции во второй половине XIX века. В этой работе [8] была установлена зависимость между числом корней комплексного полинома  $f(z)$ , расположенных внутри какой-либо полуплоскости (или даже внутри какого-либо прямоугольника), и сигнатурой некоторой квадратичной формы. Однако результаты Эрмита не были доведены до такого состояния, чтобы они могли быть использованы специалистами, работающими в прикладных областях. Поэтому работа Эрмита и не получила соответствующего распространения.

В данной работе предлагается модификация критерия Гурвица с целью получения простых необходимых (достаточных) условий устойчивости, удобных для решения прикладных задач, в частности, при исследовании геометрии многомерной области устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического полинома [9, 10].

### 3. Исходные данные. Критерий Гурвица

#### *Критерий Гурвица*

Метод работает с коэффициентами характеристического уравнения (полинома) системы. Пусть характеристический полином  $P(s)$  представлен в виде:

$$P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n, \quad a_n > 0, \quad (3.1)$$

где  $s$  — оператор Лапласа.

Полином  $P(s)$  называют устойчивым, если все корни уравнения  $P(s) = 0$  имеют отрицательную вещественную часть.

В статье рассматриваются только полиномы с положительными коэффициентами.

Из коэффициентов характеристического полинома строится определитель Гурвица по алгоритму:

- 1) по главной диагонали слева направо выставляются коэффициенты характеристического полинома от  $a_0$  до  $a_{n-1}$ ;
- 2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;
- 3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше  $n$  ставятся нули.

Для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы все  $n$  главных диагональных миноров определителя Гурвица были положительны, при условии  $a_n > 0$ . Эти миноры называются определителями Гурвица.

Современный анализ критериев устойчивости Рауса – Гурвица — см., например, [11].

*Примечание.* Пусть дана квадратная матрица  $A$ ,  $n$ -ого порядка. *Минором* некоторого элемента  $a_{ij}$ , *опредетителя матрицы* называется *опредетель*  $(n-1)$ -го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент  $a_{ij}$ . Обозначается  $M_{ij}$ .

*Диагональным минором матрицы  $A$*  называется минор, диагональные элементы которого являются диагональными элементами матрицы  $A$ .

*Главным диагональным минором матрицы  $A$*  порядка  $k$  называется минор, составленный из первых  $k$  строк и  $k$  столбцов матрицы  $A$ .

#### 4. Трехдиагональная матрица и определитель Гурвица

Пусть для полинома  $P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n$ ,  $a_n > 0$  задан определитель Гурвица.

$$Y = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Сформируем из определителя Гурвица трехдиагональную матрицу (матрицу Якоби [12, 13]):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & & & & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \\ & a_1 & \dots & \dots & & & \\ & & \dots & \dots & a_n & & \\ & & & a_{n-3} & a_{n-1} & & \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

в которой во всех остальных местах, кроме главной диагонали и двух соседних с ней, стоят нули.

Элементами главной диагонали матрицы (4.2) являются коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Каждому элементу главной диагонали соответствует вспомогательный определитель второго порядка:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_k & a_{k+2} \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (4.3)$$

**Теорема 4.1.** Для устойчивости характеристического полинома (3.1) необходимо выполнение неравенств (неравенств Эрмита – Рауса – Гурвица):

$$\begin{vmatrix} a_k & a_{k+2} \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n-2, \quad (4.4)$$

или в другой форме:

$$a_k < \frac{a_{k+1}a_{k+2}}{a_{k+3}}, \quad k = 0, \dots, n-3. \quad (4.5)$$

Для доказательства теоремы предварительно учтем, что в соответствии с критерием Гурвица для устойчивости характеристического полинома (3.1) необходима, в частности, положительность диагонального минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0. \quad (4.6)$$

Далее проанализируем необходимое условие для диагонального минора третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0. \quad (4.7)$$

Оно должно выполняться при всех неотрицательных значениях коэффициентов, в том числе и при  $a_0 = 0$ :

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Используя метод математической индукции, убедимся в необходимости выполнения неравенства для устойчивости характеристического полинома (3.1):

$$\begin{vmatrix} a_k & a_{k+2} \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

Теорема 4.1 доказана.

*Примечание.* Доказательство неравенств (3.4) производится с использованием критерия устойчивости Эрмита – Билера — см. [14].

## 5. Многомерный алгебраический запас устойчивости

В условиях отработки (летные испытания) и эксплуатации параметры системы управления по тем или иным причинам могут отличаться от расчетных. Эти вариации параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости.

Поэтому стремятся спроектировать систему так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости.

Степень этого удаления называют *запасом устойчивости*.

Для исследования геометрии многомерных областей устойчивости динамических систем с обратной связью предлагается новое понятие (новый термин): *многомерный алгебраический запас устойчивости*.

Формула для многомерного алгебраического запаса устойчивости:

$$\mu = \mu(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-3}), \quad (5.1)$$

$$\mu_k = \frac{a_k a_{k+3}}{a_{k+1} a_{k+2}}, \quad \mu_k \in (0, 1], \quad k = 0, \dots, n-3. \quad (5.2)$$

*Теорема 5.1.* Необходимым условием устойчивости полинома является выполнение неравенств:

$$a_k < \mu_k \frac{a_{k+1} a_{k+2}}{a_{k+3}}, \quad \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n-3, \quad \mu_k \in (0, 1). \quad (5.3)$$

## 6. Достаточные условия устойчивости полинома

Полином

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n \quad (6.1)$$

называют устойчивым, если все корни уравнения  $P(s) = 0$  имеют отрицательную вещественную часть. Ниже рассматриваются только полиномы с положительными коэффициентами.

*Теорема 6.1.*[16]. Если

$$\frac{a_0 a_3}{a_1 a_2} + \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3} + \dots + \frac{a_{n-3} a_n}{a_{n-1} a_{n-2}} < 1, \quad (6.2a)$$

то полином (6.1) устойчив.

Условие (6.2a) можно представить в более компактном виде:

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{n-3} < 1, \quad (6.2b)$$

где обозначено  $\mu_0 = \frac{a_0 a_3}{a_1 a_2}, \mu_1 = \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}, \dots, \mu_{n-3} = \frac{a_{n-3} a_n}{a_{n-1} a_{n-2}}$ .

Приводится положительное решение гипотезы, сформулированной в [17].

Полином (6.1)  $P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n$  называют устойчивым, если все корни уравнения  $P(s) = 0$  имеют отрицательную вещественную часть.

Ниже рассматриваются только полиномы с положительными коэффициентами. Предварительно приведем следующую лемму.

*Лемма 6.2.*

Условие (6.2) при  $n = 3$  необходимо и достаточно для устойчивости полинома (6.1), имеющего в данном случае вид  $P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n$ .

Доказательство *Леммы 6.2* следует непосредственно из критерия Гурвица.

Перейдем к доказательству *Теоремы 6.1*.

Если утверждение теоремы неверно, найдется неустойчивый полином (6.1) минимальной степени  $n > 4$  с положительными коэффициентами, удовлетворяющими условию (6.2).

Пусть (6.1) — такой полином минимальной степени. Построим вспомогательный полином

$$L_1(s) = b_0 s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + \dots + b_{n-1}, \quad (6.3)$$

где

$$b_0 = a_1, b_1 = a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1}, b_2 = a_3, \quad b_3 = a_4 - \frac{a_0 a_5}{a_1}, \dots \quad (6.4)$$

Из (6.2) следует, что  $\frac{a_0 a_3}{a_1 a_2} < 1; \frac{a_2 a_5}{a_3 a_4} < 1; \frac{a_4 a_7}{a_5 a_6} < 1; \dots$

Перемножая последовательно эти неравенства, получаем

$$\frac{a_0 a_3}{a_1 a_2} < 1; \quad \frac{a_0 a_5}{a_1 a_4} < 1; \quad \frac{a_0 a_7}{a_1 a_6} < 1; \dots$$

Отсюда вытекает, что все коэффициенты полинома (6.3) положительные. Так как полиномы (6.1) и (6.3) одновременно устойчивы или неустойчивы ([18], с. 43), то полином (6.3) неустойчив.

По предположению, полином (6.1) имеет минимальную степень среди неустойчивых полиномов с положительными коэффициентами, удовлетворяющими неравенству вида (6.2), а неустойчивый полином (6.3) с положительными коэффициентами имеет меньшую степень.

Поэтому его коэффициенты (6.4) удовлетворяют неравенству

$$\frac{b_0 b_3}{b_1 b_2} + \frac{b_1 b_4}{b_2 b_3} + \dots + \frac{b_{n-4} b_{n-1}}{b_{n-2} b_{n-3}} \geq 1. \quad (6.5)$$

С другой стороны, ниже будет показано, что из неравенства (6.2) следует неравенство

$$\frac{b_0 b_3}{b_1 b_2} + \frac{b_1 b_4}{b_2 b_3} + \dots + \frac{b_{n-4} b_{n-1}}{b_{n-2} b_{n-3}} < 1. \quad (6.6)$$

В самом деле, положим:

$$c_i = \frac{a_i a_{3+i}}{a_i a_{3+i}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-3; \quad d_1 = \frac{1-c_0 c_2}{1-c_0}; \quad d_2 = \frac{1-c_0 c_2 c_6}{1-c_0 c_2 c_4}; \quad d_3 = \frac{1-c_0 c_2 c_4 c_6}{1-c_0 c_2 c_4}; \dots$$

Тогда неравенства (6.2) и (6.6) запишутся соответственно в виде

$$c_0 + c_1 + \dots + c_{n-3} < 1, \quad (6.7)$$

$$c_1 d_1 + c_2 d_1^{-1} + c_3 d_2 + c_4 d_2^{-1} + c_5 d_3^{-1} + \dots < 1. \quad (6.8)$$

Так как  $0 < c_i < 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-3$ ; (здесь  $[v]$  означает целую часть числа  $v$ ), то, используя (6.7), получаем:

$$\begin{aligned} & c_1 d_1 + c_2 d_1^{-1} + c_3 d_2 + c_4 d_2^{-1} + c_5 d_3 + c_6 d_3^{-1} + \dots < \\ & < (1 - c_0 - c_2 - c_3 - \dots) d_1 + c_2 + c_3 d_2 + c_4 + c_5 d_3 + c_6 + \dots = \\ & = (1 - c_0) d_1 - c_2 (d_1 - 1) + c_3 (d_2 - d_1) - c_4 (d_1 - 1) + c_5 (d_3 - d_1) - c_6 (d_1 - 1) + \dots \leq \\ & \leq (1 - c_0) d_1 + c_3 (d_2 - d_1) + c_5 (d_3 - d_1) + \dots \leq \\ & \leq (1 - c_0) d_1 + c_3 ((1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1) + c_5 (1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1 + \dots \leq \\ & \leq 1 - c_0 c_2 + ((1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1) (c_3 + c_5 + \dots). \end{aligned}$$

Теперь для доказательства неравенства (6.8) достаточно показать, что

$$c_0 c_r > (1 - c_0 c_2)^{-1} - d_1. \quad (6.9)$$

Подставляя вместо  $d_1$  его выражение через  $c_0$ ,  $c_2$ , умножая на знаменатель и приводя подобные члены, преобразуем неравенство (6.9) к виду

$$1 > c_2 + c_0 c_2 - (c_0 c_2)^2. \quad (6.10)$$

Неравенство (6.10) справедливо в силу соотношения

$$c_2 + c_0 c_2 - (c_0 c_2)^2 \leq c_2 + (1 - c_2) c_2 - (c_0 c_2)^2 < 1 - (1 - c_2)^2.$$

Следовательно, неравенство (6.6) доказано. Но неравенство (6.6) противоречит неравенству (6.5).

Теорема доказана.

## Литература

1. *Carlos M. Madrid Casado*. Наука. Величайшие теории: выпуск 34: Вначале была аксиома. Гильберт. Основания математики. ISSN 2409-0069. Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2015. – 176 с.
2. *Гильберт Д.* Избранные труды. Т.1, 2. М.: «Факториал», 1998.
3. *Арнольд В. И.* Вещественная алгебраическая геометрия. Москва. МЦНМО. 2009.
4. *Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А.* Избыточные системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение. 1978. – 144 с.
5. *Stodola A.* Über die Regulierung von Turbinen. // Schweizerische Bauzeitung. 1893. V.XXII. №17–20; 1894. V. XXVIII. №17–18.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, 5-е изд. М.: Физматлит, 2004.
7. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. М.: УРСС, 2004.
8. *Hermite C.* Sur le nombre des racines d'une equation algebrigue comprise entre des limites donnees. // J. Reine Angew. Math. 1852. Vol. 52. – P. 39–51.
9. *Николаев Ю. П.* Наибольшие значения основных параметров и условие ограниченности характеристической области устойчивости линейных систем. // АиТ. 1993. №12. – С. 33–43.  
*Yu. P. Nikolaev.* Maximum values of the principal parameters and the boundedness condition for the characteristic domain of asymptotic stability of linear systems. // Automat and Remote Control, 1993, 54:12, 1751–1759.
10. *Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П.* Анализ геометрии многомерных областей устойчивости линейных систем управления с обратной связью. // Навигация и управление летательными аппаратами. 2018, № 22. – С. 2–9.
11. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: Наука, 1996.



12. *Филлипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. Пер. с англ. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.  
*Phillips C., Harbor R.* Feedback Control Systems, 4<sup>th</sup> Edition. 2000. Prenticehall, Inc., 2000.
13. *El-Mikkawy, M. E. A.* On the inverse of a general tridiagonal matrix. // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – Т. 150, № 3. – С. 669–679.
14. *Немировский А. С., Поляк Б. Т.* Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование. // АиТ. 1994. № 11. – С. 113–119.
15. *Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П.* Анализ геометрии многомерных областей устойчивости линейных систем с обратной связью // Навигация и управление летательными аппаратами. 2018. № 22. – С. 2–9.
16. *Клепцын А. Ф.* Об одном достаточном условии устойчивости многочлена. // АиТ. 1984. № 10. – С. 175–176.
17. *Масленников В. В.* Гипотеза о существовании простого аналитического достаточного условия устойчивости. // АиТ. 1984, № 2. – С. 160–161.
18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
19. *Biehler M.* Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. // J. Reine Angew. Math. 87 (1879). – P. 350–1352.
20. *Рахман Q. Я., Шмайссер Г.* Аналитическая теория многочленов, том 26 монографий Лондонского математического общества. Новая серия. Пресса Оксфордского университета Clarendon Press, Оксфорд, 2002.
21. *Васильев О. (Grey Violet).* Геометрия задач  $D$ -устойчивости. Universitat Konstanz. Москва, 2017.

УДК 629.7.015

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ВЫХОДА НА ЛИНИЮ КУРСА ПОД УПРАВЛЕНИЕМ САУ

*Сусанна Вагинаковна ХЛГАТЯН, к. т. н.,  
Ольга Борисовна КЕРБЕР, к. т. н., с. н. с.,  
Анастасия Дмитриевна ЗАЛЕТКИНА,*

*E-mail: aomiea@aviapribor.ru*

*ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»*

*В статье рассматривается способ улучшения динамики захода на посадку, предполагающий использование дополнительной информации о боковом отклонении от оси ВПП ( $Z$ ), формируемой навигационной системой. Приводятся результаты моделирования, подтверждающие эффективность использования координаты  $Z$ .*

*Ключевые слова:* заход на посадку, векторение, равносигнальная зона.

## USE OF NAVIGATION PARAMETERS TO IMPROVE THE QUALITY OF HEADING CAPTURE UNDER AFCS CONTROL

*Susanna V. HLGATYAN, Ph D in Engineering,*

*Olga B. KERBER, Ph D in Engineering,*

*Anastasiya D. ZALYOTKINA*

*E-mail: aomiea@aviapribor.ru*

*'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC*

*The article considers a method of improving the dynamics of approach. The method involves the use of additional information on lateral deviation from the runway axis ( $Z$ ), generated by the navigation system. Simulation results that confirm the effectiveness of using the  $Z$  coordinate are presented.*

*Keywords:* approach, vectoring, bi-signal zone.

При выполнении заходов на посадку для сокращения дальностей начала разворота к курсовой линии целесообразно использовать метод векторения вместо традиционной схемы «коробочка».

Схема полета по «коробочке» позволяет достаточно просто и с достаточной точностью выйти на предпосадочную прямую. Однако из-за сильно возросшей в наши дни нагрузки на аэродромы классический полет по «коробочке» встречается реже, оставаясь возможным лишь при наличии достаточного аэродромного пространства.

При ограниченном пространстве при заходах на малых удалениях от торца ВПП (10 км ÷ 15 км) выход на линию курса может выполняться с перерегулированием, особенно, если самолет к 4-ому развороту находится перпендикулярно полосе, т. е. с углом подхода  $\Delta\varphi = 90^\circ$ . К тому же в современных схемах заходов на посадку скорости в зоне аэродрома достаточно большие, для транспортной и военно-транспортной авиации  $V_{пр} = 300 \div 380$  км/ч, что тоже приводит к увеличению перерегулирования [1].

В связи с вышесказанным, в настоящее время используется так называемое векторение, т. е. выведение воздушных судов на траекторию захода на посадку посредством указаний экипажу определенных курсов. При векторении для захода на посадку задачей диспетчера является вывод воздушного судна на траекторию, которая обеспечит выход на предпосадочную прямую за 2—3 км до точки входа в глиссаду, под углом не более 45 градусов (согласно ICAO DOC 4444), а на практике желательно не более 30 градусов.

Следует отметить, что векторение является наиболее действенным способом решения проблемы высокой загрузки воздушного пространства, поскольку позволяет использовать его более эффективно, начиная маневр разворота из различных точек воздушного пространства.

Для сокращения времени пребывания в зоне аэродрома, а также уменьшения дальностей начала маневра разворота к ВПП и расширения области включения режима «Посадка» необходимо найти наиболее благоприятную точку начала разворота при заранее известном промежуточном угле подхода. В данном случае под промежуточным углом подхода понимается угол, на который диспетчер «векторит» направление движения самолета относительно его первоначального положения перед выполнением выхода на линию курса. Это означает, что самолет разворачивается на угол векторения, меньший первоначального угла подхода относительно ВПП.

Методика векторения с переходом на промежуточный угол подхода обеспечивает выполнение разворотов с допустимым перерегулированием практически во всем диапазоне дальностей при различных начальных курсах к ВПП, что существенно облегчает пилотирование летчику при выполнении сложных маневров.

Однако для получения аperiodических плавных процессов вписывания в курсовую зону практически без перерегулирования следует точно определять точку начала разворота в зависимости от угла подхода к ВПП и скорости полета.

Реализованный в настоящее время алгоритм захода на посадку использует в качестве основного сигнала для управления сигнал  $\varepsilon_k$  — отклонение от линии курса по ИЛС, который является гарантированным только в линейной зоне, т. е. в зоне  $\varepsilon_k = \pm 2,4^\circ$  или  $0,2$  ргм (разность глубин модуляции), в нелинейной же зоне сигнал искаженный и использовать его для расчета точки начала разворота некорректно.

Для того чтобы точно рассчитать точку начала разворота, можно использовать координату  $Z$  — боковое удаление от оси ВПП, которую выдает навигационная система. Расчетная точка начала разворота будет зависеть от курса подхода к ВПП и скорости выполнения маневра разворота к линии курса ВПП.

К качеству процесса выхода на курсовую зону предъявляются следующие требования:

1. Должен обеспечиваться выход на равносигнальную зону курса по  $\varepsilon_k$  с перерегулированием не более чем  $0,1$  ргм (в штилевых условиях) с углом подхода не более  $115^\circ$ ;
2. В процессе выхода на равносигнальную зону курса по  $\varepsilon_k$  угол крена  $\gamma$ , угловая скорость крена  $\omega_x$  и угловое ускорение  $\omega'_x$  не должны превышать (по модулю) следующих величин:

$$\gamma \leq [\gamma_{\text{доп.}} = F(H^*)],$$

$$F(H^*) = \begin{cases} (0,28 H^*) + 2, & \text{при } 15 \leq H^* \leq 100 \text{ м} \\ 30^\circ, & \text{при } H^* > 100 \text{ м} \end{cases},$$

где  $H^*$  — высота в метрах по радиовысотомеру (РВ) или,  $H_{\text{отн}}$  при отказе РВ,

$$\omega_x \leq 6^\circ/\text{с},$$

$$\omega'_x \leq 3^\circ/\text{с}^2.$$

3. Переходный процесс выхода на линию курса должен заканчиваться до момента захвата глиссады.

Как было сказано выше, при векторении выполняется переход на различные заранее известные углы подхода, с которыми диспетчер «векторит» траекторию движения самолета ( $\Delta\varphi = 30 \div 45^\circ$ ).

– при нахождении самолета *за пределами линейной зоны КРМ* ( $|\varepsilon_{к_0}| \geq 2,4^\circ$ ) промежуточные углы подхода формируются следующим образом:

- переход на  $\Delta\varphi_{\text{вект}}$  при начальном угле подхода ( $\Delta\varphi = 30^\circ \div 45^\circ$ )  $< |\Delta\varphi_0| \leq 115^\circ$ ;
- переход на  $30^\circ$  при начальном угле подхода  $|\Delta\varphi_0| < 30^\circ$  для обеспечения более эффективного вписывания в курсовую зону при малых углах подхода к ВПП ( $\Delta\varphi_0 = 20^\circ, 10^\circ, 0^\circ$ );

– при включении режима «Посадка» *в линейной зоне КРМ* ( $|\varepsilon_{к_0}| < 2,4^\circ$ ) самолет разворачивается к линии курса *без выхода на промежуточный угол подхода*.

Сокращение времени разворота особенно важно при малых удалениях от торца ВПП (12–10 км), т. к. для выполнения захвата глиссады необходимо нахождение боковых параметров в пределах: по сигналу отклонения от линии курса  $|\varepsilon_{к}| \leq 0,2$  ргм и по отклонению путевого угла  $|\Delta\varphi_0| < 30^\circ$  — что препятствует захвату «ложных» глиссид.

### Методика выполнения режима «Посадка» с использованием координаты $Z$

Для обеспечения более точного вписывания в курсовую зону магистрального самолета необходимо определять момент начала доворота в сторону ВПП по боковому отклонению от оси ВПП ( $Z$ ), рассчитанному в навигационном комплексе.

Первоначально самолет переходит на промежуточный угол подхода, указанный диспетчером, так называемый угол векторения, в режиме стабилизации углового положения (Заданный курс / Заданный путевой угол).

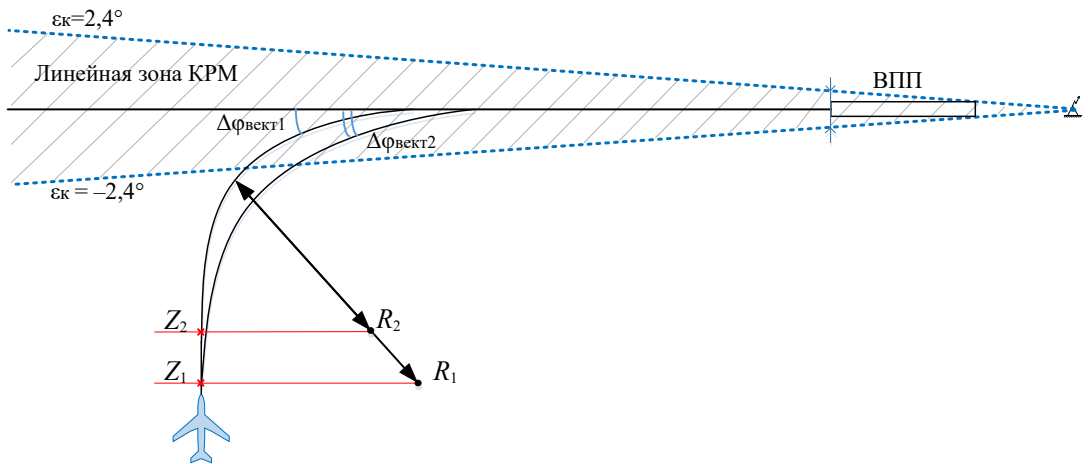


Рис.1. Выполнение выхода на линию курса методом векторения

На рис. 1 показано, как меняется радиус разворота и точка начала разворота в зависимости от угла векторения, на который разворачивается самолет при выходе на линию курса ВПП.

Известно, что радиус разворота самолета зависит от скорости разворота и угла крена, с которым выполняется разворот:

$$R = \frac{(V_{\text{пут}})^2}{g \operatorname{tg} \gamma_{\text{max}}},$$

где  $\gamma_{\text{max}} = 30^\circ$  — постоянный угол крена для автоматической посадки,

$V_{\text{пут}}$  — путевая скорость [км/ч],

$g = 9,81$  — ускорение свободного падения [м/с<sup>2</sup>].

Момент начала разворота можно рассчитать по координате  $Z$ , используя модуль разности заданного угла векторения и курса ВПП  $|\Delta\varphi_{\text{вект}}|$  в соответствии со следующей зависимостью:

$$Z_{\text{зад}} = 0,177(V_{\text{пут}})^2(1 - S_{\text{корр}}) + 0,140(V_{\text{пут}})^2 \sin(|\Delta\varphi_{\text{вект}}| - S_{\text{корр}}) + Z_{\text{упр}},$$

где  $S_{\text{корр}} = \sin(90^\circ - \Delta\varphi_{\text{вект}} + \varphi_{\text{корр}})$ .

$\varphi_{\text{корр}} = 33,6 - 0,184 V_{\text{пут}} / 3,6$  — корректирующая составляющая угла подхода, зависящая от скорости разворота.

При воздействии неблагоприятного бокового ветра [2] разворот следует начинать несколько раньше, т. е. с некоторым упреждением, зависящим от разницы между приборной скоростью  $V_{\text{пр}}$  и путевой скоростью  $V_{\text{пут}}$ , определяющей силу ветра.

$Z_{\text{упр}}$  — упреждение по боковому отклонению при наличии ветра (м), которое пропорционально выражению  $(V_{\text{пр}} - V_{\text{пут}})K_{\text{VETR}}$ , где  $K_{\text{VETR}}$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от модуля разности заданного угла векторения и курса ВПП.

Таким образом, при боковом отклонении самолета  $Z$  менее  $Z_{\text{зад}}$  начинается маневр разворота к линии курса с заданным углом векторения, подключение же алгоритма «Посадка» выполняется в линейной зоне КРМ для дальнейшего доворота в сторону ВПП по сигналам  $\varepsilon_k$  и  $\Delta\varphi$ .

Для углов векторения  $\Delta\varphi_{\text{вект}}$  менее  $30^\circ$  следует подключать алгоритм «Посадка» сразу после нажатия кнопки «ПОС», что должно обеспечивать выход самолета на угол подхода  $\Delta\varphi = 30^\circ$  на малых удалениях от ВПП  $D = 10 \div 15$  км.

Следует также отметить, что координата  $Z$  от навигационного комплекса используется только для расчета начальной точки выполнения разворота к оси ВПП, после включения алгоритма «Посадка» информация от навигационного комплекса не используется [3].

Особенно важно знать точку начала разворота на аэродромах с повышенной крутизной курсовой зоны ( $S_{\text{КК}_{\text{max}}}^{\prime}$ ), т. е. на аэродромах с увеличенной длиной ВПП (4 ÷ 5 км) с узкой курсовой зоной, где величина перерегулирования по сигналу  $\varepsilon_{\text{к}}$  будет больше.

На некоторых аэродромах в связи с особенностями рельефа местности предусмотрено сохранение первоначального угла подхода, например  $\Delta\varphi = 90^\circ, 70^\circ, 60^\circ$ , и векторение выполняется без перехода на некоторый меньший промежуточный угол. В таблице 1 показано, что при расчете точки начала разворота  $Z_{\text{зад}}$ , даже на малых дальностях ( $D = 15 \div 12$  км от торца ВПП), перерегулирование в этих случаях не превышает по  $\varepsilon_{\text{к}} = 0,058$  ргм при допуске  $\varepsilon_{\text{к}} = 0,1$  ргм.

Таблица 1.

Угол подхода	$\varepsilon_{\text{к}}$ (ргм)	$Z$ (м)
90°	-0,03	56
90° с ветром	-0,058	177
60°	-0,008	19

Без расчета координаты  $Z$  в таких случаях на тех же дальностях перерегулирование по  $\varepsilon_{\text{к}}$  превышает 0,2 ргм, т. е. практически достигает границы линейной зоны КРМ, что недопустимо.

На графиках сравнения выполнения маневра доворота к ВПП из расчетной точки  $Z_{\text{зад}}$  и без расчета (рис. 2) представлены заходы на посадку с различными начальными условиями (дальности от ВПП, скорости разворота, крутизна зоны, ветровые возмущения), которые демонстрируют явное преимущество качества переходных процессов выхода на линию курса ВПП, выполненных с предварительным расчетом точки начала разворота по координате  $Z$ .

Таким образом, использование информации от навигационного комплекса о боковом удалении от оси ВПП  $Z$ , позволяет рассчитать точку начала разворота так, чтобы все выходы на линию курса выполнялись без перерегулирования или с минимальным перерегулированием, что особенно важно в условиях ограниченного воздушного пространства в зоне аэродрома при плотной загруженности аэропорта посадки.

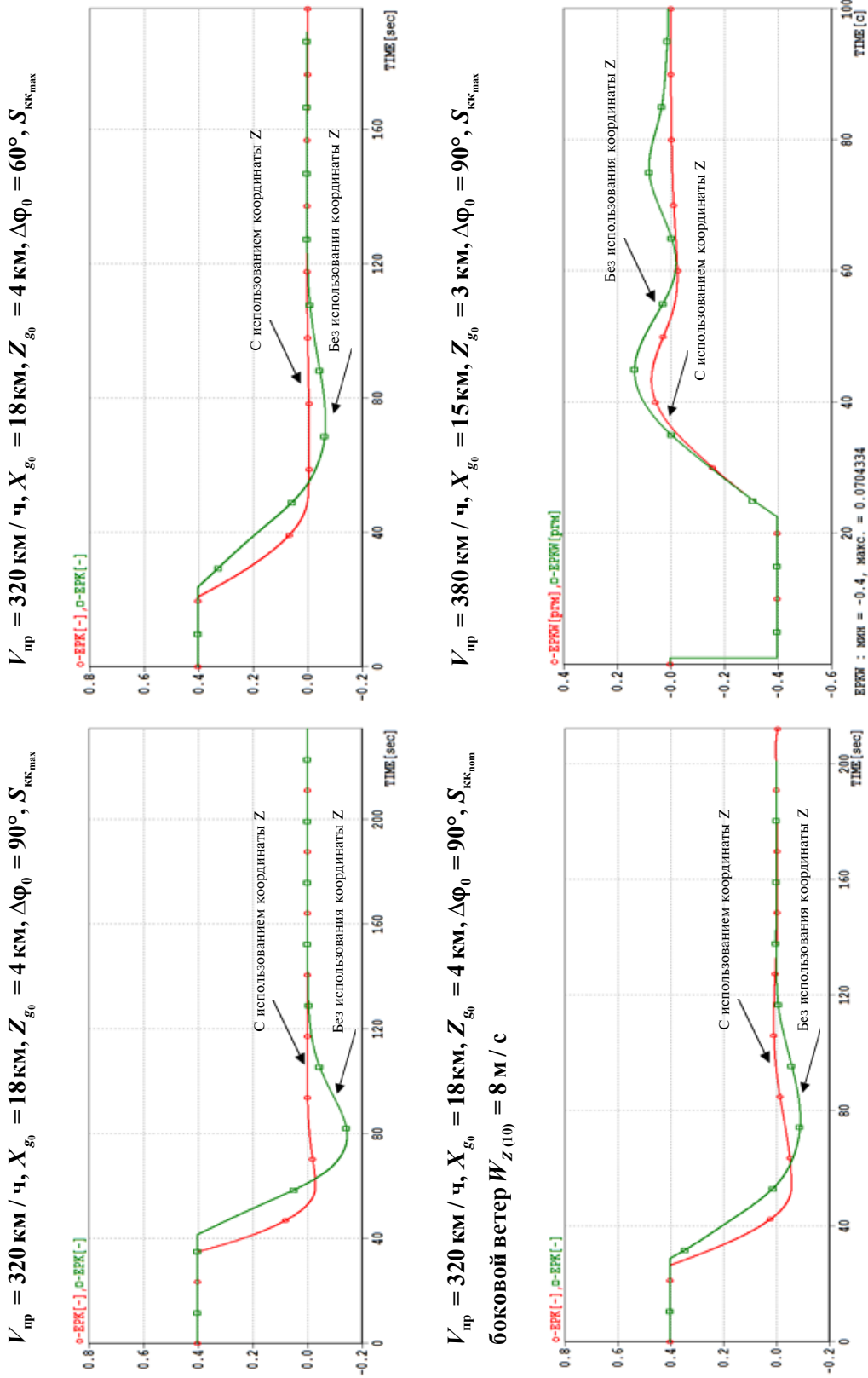


Рис. 2. Сравнение переходных процессов с использованием координаты Z и без использования



## Литература

1. *Гребёнкин А. В.* Способ стабилизации заданной высоты полета. Патент на изобретение № 2588174. Заявка № 2015120724.
2. *Хлгатян С. В., Володина Л. А.* Способ автоматического формирования вспомогательных сигналов на наземном участке движения самолета. Патент на изобретение № 2733666. Заявка № 2019133195. Приоритет изобретения 18.10.19 г. Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации 06.10.20 г.
3. *Гребёнкин А. В.* Реализация универсального способа траекторного управления в вертикальной плоскости применительно к режимам САУ «Автоматический взлет», «Смена эшелона», «Стабилизация высоты», «Посадка». II Всероссийская научно-техническая конференция «Моделирование авиационных систем». Сборник тезисов докладов. – М: ФГУП «ГосНИИАС», 2013. – 69–70 с.

УДК 629.7.05

## ТРАЕКТОРНЫЙ АВТОПИЛОТ С АСТАТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ В ПРОДОЛЬНОМ КАНАЛЕ УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТА

*Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, д. т. н., профессор  
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*В статье рассмотрен подход формирования системы автоматического управления самолета в вертикальной плоскости, объединяющий классический автопилот и систему траекторного управления. Метод объединения основан на построении вложенных систем по принципу подчиненных контуров регулирования. Каждый внутренний контур управления без изменения используется во внешнем контуре. Синтез системы осуществляется по методу обратной задачи модального управления с использованием редукации динамических систем, оптимизации амплитудно-частотных характеристик замкнутого контура, интегральной квадратичной оценки для минимизации невязки движения системы и эталонного аналога. Получен траекторный автопилот с оптимальными характеристиками качества и быстродействия с минимальным числом параметров регулятора.*

*Ключевые слова:* траекторное движение самолета, замкнутый контур, система управления амплитудно-частотная характеристика, передаточная функция, оптимизация настроек, перерегулирование.

## AUTOMATIC FLIGHT CONTROL SYSTEM WITH TRAJECTORY CONTROL IN LONGITUDINAL CHANNEL INVOLVING ASTATIC CONTROLLER

*Vladimir E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor  
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*The article discusses an approach to developing an automatic flight control system with trajectory control in a vertical plane, combining a classic autopilot and a trajectory control system. The integration method is based on the construction of nested systems according to principle of subordinate control loops. Each inner control loop is used unchanged in the outer loop. The system synthesis is carried out by the method of modal control inverse problem with the use of dynamical systems reduction, closed loop amplitude-frequency characteristics optimization, integral quadratic estimation for minimizing the residual between system movement and the reference analogue. The automatic flight control system with trajectory control in longitudinal channel is obtained, that has optimal quality and high speed response characteristics with a minimum number of controller parameters.*

*Keywords:* aircraft trajectory, closed loop, flight control system, amplitude-frequency characteristic, transfer function, settings optimization, overshoot.

Создание систем автоматического управления (САУ) прошло ряд этапов становления от простейших демпферов, автопилотов (АП) и систем траекторного управления (СТУ) к комплексным системам управления (КСУ). Развитие подходов к построению САУ определялось в основном уровнем развития электронной техники, аппаратной реализацией датчиков и вычислителей бортовых систем. Методические подходы к синтезу законов управления традиционно опережали возможности бортовой автоматики, которая долгое время оставалась аналогового типа и была основой автоматизации управления полетом самолетов [1].

Реализация математических зависимостей законов управления с помощью аналоговых схем и блочная конструкция САУ (АП + СТУ) оказали свое влияние на структурную организацию алгоритмов управления цифровых систем, пришедших на смену аналоговой технике.

На сегодняшний день, несмотря на применение единого цифрового вычислителя в КСУ, продолжает сохраняться относительная независимость алгоритмов, обеспечивающих раздельное решение автопилотных и траекторных задач. Так, траекторный алгоритм в вертикальной плоскости формирует заданную нормальную перегрузку  $n_{у,зад}$ , а автопилотный закон управления ее «отрабатывает». Относительная независимость такого разделения функций оправдана известными [2] свойствами длиннопериодического и короткопериодического движений самолета, различающихся по времени их выполнения. Критерием допустимости изолированного исследования короткопериодического и длиннопериодического движений самолета является устойчивость короткопериодического движения, которое трактуется как устойчивость движения самолета по перегрузке [3, стр. 38, 52]. Поэтому сложилась система проектирования САУ с независимым синтезом углового (быстрого) контура автоматического управления и траекторного (медленного) контура без учета влияния уравнений равновесия моментов относительно центра масс. При этом для каждого из режимов траекторного управления: стабилизации высоты, скорости, угла наклона траектории, — от разработчика САУ требовалось выполнение условия о сохранении разнесенности корней траекторного и углового движений в целях обеспечения относительной независимости положения корней друг относительно друга при замыкании контура управления «самолет — АП — СТУ».

В целом, условное разделение продольного движения самолета на угловое и траекторное потребовало решения ряда вопросов при разработке САУ в траекторных режимах управления. К ним следует отнести: сопряжение каждого режима траекторного управления в отдельности с контуром автопилота, совместная параметрическая настройка двух контуров для достижения заданного качества управления

регулируемой траекторной координаты, дополнительное внесение специальных способов обеспечения астатизма траекторного контура управления и его инвариантности к действующим возмущениям.

В настоящей статье изложен подход к созданию целостной системы автоматизации траекторного управления самолета — траекторного автопилота, алгоритмически объединяющего взаимосвязанные алгоритмы углового и траекторного движений в единый алгоритм «автопилотного» типа как полного автомата траекторного управления самолета.

Согласно фундаментальному закону механики движения твердого тела, обоснованным способом анализа структуры траекторного движения самолета является рассмотрение последовательности «сила → скорость → смещение». Тогда для синтеза траекторных режимов математическое описание линеаризованного объекта управления в преобразовании Лапласа будет представлять собой последовательное соединение звеньев: для синтеза системы стабилизации высоты (рис. 1), для синтеза системы стабилизации скорости полета через руль высоты (рис. 2):

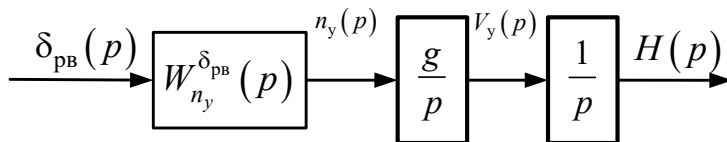


Рис. 1. Объект управления для стабилизации высоты полета

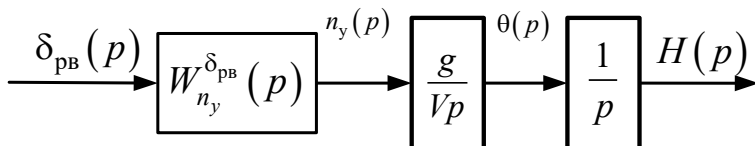


Рис. 2. Объект управления для стабилизации скорости полета

Здесь для синтеза управления скоростью и высотой исходным считается установившийся режим полета при постоянной балансировочной тяге двигателей. Привода руля высоты приняты безынерционными, а приращения перегрузки — относительно балансировочного значения перегрузки.

Как видно из рассмотрения рис. 1 и рис. 2, объекты управления для синтеза траекторных режимов управления структурно одинаковы и отличаются только одним параметром — коэффициентом прямого усиления. Это дает объективные основания для формирования единой структуры траекторного управления самолетом в вертикальной плоскости с использованием канала руля высоты. Основной вопрос состоит в организации контуров обратных связей по регулируемым параметрам.

Из всего разнообразия способов синтеза систем автоматического управления остановим свое внимание на способе формирования многоконтурной системы с вложенными контурами управления, основанного на принципе построения подчиненных контуров регулирования [4, стр. 47], впервые примененного при конструировании систем управления электроприводом. Основанный на этом принципе метод синтеза многоконтурной САУ состоит в последовательном построении регулятора внешнего контура для управления внутренним контуром, выступающим в роли объекта управления, многоконтурной системы подчиненного регулирования [5, стр. 80], Применяя этот метод построения многоконтурной системы для траекторного автопилота получим следующую обобщенную структуру последовательно замыкаемых контуров, вложенных друг в друга, как показано на рис. 3 для задачи управления высотой полета.

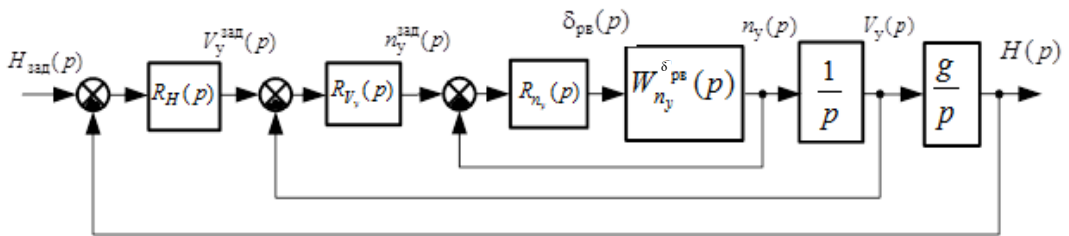


Рис. 3. Обобщенная структурная схема многоконтурной системы траекторного автопилота

На рис. 3 обозначены:  $R_{n_y}(p)$ ,  $R_{V_y}(p)$  и  $R_H(p)$  — регуляторы контуров перегрузки  $n_y$ , вертикальной скорости  $V_y$  и высоты  $H$  соответственно. Процесс синтеза многоконтурной системы регулирования [6] состоит из нескольких последовательных этапов с настройкой каждой системы регулирования с одной единичной обратной связью, начиная с внутреннего контура. Возникает эффект подчиненного регулирования координат с последовательной коррекцией входного сигнала для смежного внутреннего контура управления.

Каждый из контуров подсистем стабилизации перегрузки, вертикальной скорости и высоты представляет собой следящую систему по параметрам движения  $n_y$ ,  $V_y$  и  $H$ .

Заданные сигналы  $n_y^{\text{зад}}$  и  $V_y^{\text{зад}}$  вырабатывается внешним замыкающим контуром управления. Сигнал заданной высоты  $H^{\text{зад}}$  стандартно формируется с пульта управления САУ. При таком подходе каждый контур можно синтезировать по очереди, сначала внутренний контур перегрузки, включающий в себя некомпенсируемую часть объекта управления, затем контур вертикальной скорости и завершающим этапом (на основании ранее разработанных регуляторов контуров  $n_y$  и  $V_y$ ) — внешний контур стабилизации высоты.

Такое чередование разработки автопилота самолета в [7] названо «последовательными замыканиями контуров обратной связи». В качестве регуляторов контуров могут быть использованы ПИД-регуляторы [8].

На основе метода последовательного замыкания вложенных контуров рассмотрим синтез системы автоматизации траекторного движения в варианте траекторного автопилота с одним астатическим регулятором для всех стабилизируемых параметров движения.

Сложившаяся система формирования астатических контуров стабилизации предполагала введение интеграла в контур для каждого регулируемого параметра [3, 9, 10]. Известно [11, стр. 158], что для обеспечения астатизма первого порядка замкнутой следящей системы по отношению к входному (заданному) сигналу достаточно иметь одно интегрирующее звено ее разомкнутой системы. Из структуры многоконтурного траекторного автопилота (рис. 3) следует, что астатизм первого порядка по входу имеют контур отработки вертикальной скорости и контур стабилизации высоты. Для обеспечения в установившемся движении свойства невозмущаемости контура  $V_y$ , например, по перегрузке, необходимо выполнить условие структурного признака астатизма для возмущения [12, стр. 160]: «между входом возмущения и выходом системы против хода сигнала» (против хода стрелок на рис. 3) должно находиться одно интегрирующее звено. Это же условие невозмущаемости относится и к контуру стабилизации высоты. Тогда для внешних контуров по  $V_y$  и  $H$  достаточно наличия одного интегратора во внутреннем контуре нормальной перегрузки. Это же интегрирующее звено будет обеспечивать, находясь в прямой цепи, и астатизм контура перегрузки по входному заданному сигналу.

Таким образом, синтез траекторного автопилота следует начинать с формирования замкнутого контура по перегрузке в варианте как минимум ПИ-регулятора. Остановимся на этом минимально необходимом виде закона управления перегрузкой. Соответствующая структурная схема замкнутого контура управления перегрузкой представлена на рис. 4.

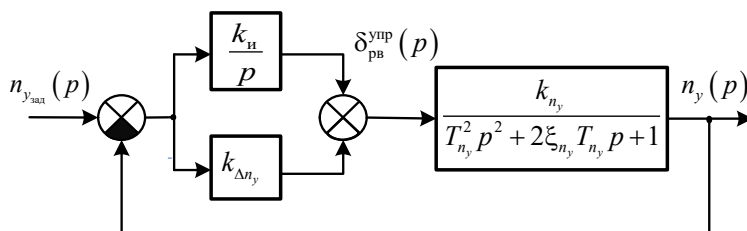


Рис. 4. Структурная схема астатического контура перегрузки

Передаточная функция по перегрузке, изображенная на рис. 4 имеет выражение

$$W_{n_y}^{\delta_{\text{PB}}} (p) = \frac{k_{n_y}}{T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p + 1}, \quad (1)$$

где  $T_{n_y}$  и  $\xi_{n_y}$  — постоянная времени и относительный коэффициент затухания свободной системы выхода на перегрузку,  $k_{n_y}$  — коэффициент усиления тракта «руль высоты — нормальная перегрузка», пропорциональный эффективности  $\delta_{\text{PB}}$ . С учетом введенного ПИ-регулятора передаточная функция замкнутого астатического контура перегрузки примет вид

$$W_{n_y}^{n_y^{\text{зад}}} (p) = \frac{k_{n_y} k_{\Delta n_y} p + k_{n_y} k_{\text{и}}}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (k_{n_y} k_{\Delta n_y} + 1) p + k_{n_y} k_{\text{и}}}, \quad (2)$$

где  $k_{\Delta n_y}$ ,  $k_{\text{и}}$  — искомые передаточные коэффициенты регулятора по отклонению и интегралу отклонения перегрузки от заданного значения для закона управления

$$\delta_{\text{PB}}^{\text{упр}} (t) = k_{\Delta n_y} \cdot \Delta n_y (t) + \int_{t_{\text{вкл}}}^t \Delta n_y (\tau) d\tau, \quad \Delta n_y (t) = n_y^{\text{зад}} - n_y (t). \quad (3)$$

В законе управления рулем высоты (3), записанном во временной области, обозначено:  $t_{\text{вкл}}$  — момент времени включения режима отработки заданной перегрузки,  $n_y^{\text{зад}}$  — заданная перегрузка, принятая для проведения процедуры синтеза за постоянное значение.

Так как в передаточной функции (2) коэффициент  $k_{n_y}$  является общим коэффициентом системы (рис. 4), выделим для упрощения структуры соответствующий общий коэффициент усиления  $k_{\text{yc}}$  в (3) и запишем в преобразовании Лапласа закон управления в обновленном виде

$$\delta_{\text{PB}}^{\text{упр}} (p) = k_{\text{yc}} \left( \frac{\bar{k}_{\Delta n_y}}{k_{n_y}} + \frac{\bar{k}_{\text{и}}}{p} \right) \Delta n_y (p), \quad k_{\text{yc}} = \frac{1}{k_{n_y}}. \quad (4)$$

Тогда передаточная функция (2) с учетом (4) может быть записана в виде

$$W_{n_y}^{n_y^{\text{зад}}} (p) = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} p + \bar{k}_{\text{и}}}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1) p + \bar{k}_{\text{и}}}, \quad \bar{k}_{\Delta n_y} = k_{n_y} k_{\Delta n_y}, \quad \bar{k}_{\text{и}} = k_{n_y} k_{\text{и}}. \quad (5)$$

Передаточная функция замкнутого контура перегрузки (5) не относится к классу простых динамических систем [13], числитель которых является полиномом нулевой степени, то есть с постоянным коэффициентом. Для простых динамических систем достаточно обеспечить с помощью коэффициентов регулятора только распределение корней характеристического полинома, соответствующее требуемому быстродействию и точности [14].

Найдем условия приведения системы (рис. 4) с передаточной функцией (5) третьего порядка к системе простого вида, что возможно с помощью деления нацело полинома знаменателя в выражении (5) на полином числителя. В результате такого деления получим характеристический полином пониженного порядка

$$\frac{T_{n_y}^2}{\bar{k}_{\Delta n_y}} p^2 + \frac{1}{\bar{k}_{\Delta n_y}} \left( 2\xi_{n_y} T_{n_y} - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} T_{n_y}^2 \right) p + 1, \quad (6)$$

существующий при выполнении условия нулевого остатка от деления

$$1 - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} \left( 2\xi_{n_y} T_{n_y} - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} T_{n_y}^2 \right) = 0. \quad (7)$$

В итоге на основании (6) и (7) получаем простую систему второго порядка с передаточной функцией

$$\bar{W}_{n_y}^{зад}(p) = \frac{1}{\bar{T}_{n_y}^2 p^2 + 2\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} p + 1}, \quad (8)$$

где постоянная времени системы (8) равна

$$\bar{T}_{n_y} = \frac{T_{n_y}}{\sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}}}, \quad (9)$$

а относительный коэффициент затухания  $\bar{\xi}_{n_y}$  находится из уравнения

$$2\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} = \frac{1}{\bar{k}_{\Delta n_y}} \left( 2\xi_{n_y} T_{n_y} - \frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} T_{n_y}^2 \right). \quad (10)$$

С учетом (9) и (7)  $\bar{\xi}_{n_y}$  из (10) определится формулой

$$\bar{\xi}_{n_y} = \frac{\sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}}}{2T_{n_y} \bar{k}_и}. \quad (11)$$



Задавая для полученной системы (8) желаемый относительный коэффициент затухания  $\bar{\xi}_{n_y}$ , из (11) найдем выражение для коэффициента при интеграле

$$\bar{k}_и = \frac{\sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}}}{2T_{n_y} \bar{\xi}_{n_y}}. \quad (12)$$

Подставим (12) в (7) и получим уравнение относительно неизвестного коэффициента  $k_{\Delta n_y}$ :

$$4\bar{k}_{\Delta n_y} \bar{\xi}_{n_y}^2 - 4\xi_{n_y} \bar{\xi}_{n_y} \sqrt{\bar{k}_{\Delta n_y}} + 1 = 0,$$

которое имеет одно из двух решений, дающее большую величину коэффициента прямого усиления для получения максимального быстродействия системы

$$\bar{k}_{\Delta n_y} = \frac{\left(\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}\right)^2}{4\bar{\xi}_{n_y}^2}. \quad (13)$$

Соответствующее решение для коэффициента при интеграле после подстановки (7) в (6) равно

$$\bar{k}_и = \frac{\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{4\bar{\xi}_{n_y}^2 T_{n_y}}. \quad (14)$$

Выражение (13) показывает, что найденные коэффициенты ПИ-регулятора (13) и (14) существуют только при условии

$$\xi_{n_y} \geq 1 \quad (15)$$

для исходного описания движения свободного самолета по перегрузке (1).

Интересно отметить, что соотношение коэффициентов закона управления (3) не зависит от назначения желаемого относительного коэффициента затухания редуцированной простой системы (8)

$$\frac{\bar{k}_и}{\bar{k}_{\Delta n_y}} = \frac{\xi_{n_y} - \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{T_{n_y}}, \quad (16)$$

а зависит, как следует из (16), только от постоянной времени  $T_{n_y}$  и относительного коэффициента затухания  $\xi_{n_y}$  объекта управления, что объясняется условием деления многочленов передаточной функции (5) нацело.

Несмотря на проведенную математическую редукцию системы третьего порядка (2) до простой системы второго порядка (8), физически система не изменила исходной структуры, при этом отметим два важных момента:

1) полученная простая система также имеет астатизм первого порядка по входу, что показывает равенство единичного свободного члена знаменателя единичному коэффициенту числителя, обеспечивающее нулевую ошибку стабилизации в установившемся состоянии;

2) система в целом обеспечивает астатизм по возмущению благодаря физическому сохранению структуры и порядка исходной замкнутой системы, покажем это ниже.

Точкой входа возмущения будем считать дополнительное изменение положения руля высоты, например, при перебалансировке или при развитии фугоидного движения самолета. Тогда имеем

$$\delta_{рв}(p) = \delta_{рв}^{упр}(p) + \delta_{рв}^{возм}(p). \quad (17)$$

Проведем замыкание контура прохождения возмущения  $\delta_{рв}^{возм}(p) \Rightarrow n_y(p)$ , введем обозначения передаточных функций, полученных с учетом прямой цепи  $A(p)$  и цепи обратной связи  $B(p)$  для этого способа замыкания контура с точкой входа через руль высоты:

$$A(p) = \frac{1}{T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p + 1}, \quad B(p) = \frac{\bar{k}_{n_y} p + \bar{k}_и}{p}. \quad (18)$$

По правилам структурных преобразований получаем следующую передаточную функцию по возмущению

$$W_{n_y}^{\delta_{рв}^{возм}}(p) = \frac{A(p)}{1 + B(p)A(p)} = \frac{p}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1)p + \bar{k}_и}. \quad (19)$$

Передаточная функция (19) делится на  $p$ , поэтому система (рис. 4) имеет первый порядок астатизма [15, стр. 178] по отношению к возмущению. Это означает, что постоянное возмущение в установившемся движении не проходит в контур перегрузки, то есть на перегрузку не влияет. Астатизм проявляется еще и в том, что тракт прохождения сигнала  $\delta_{рв}^{возм}(p) \Rightarrow \delta_{рв}^{упр}(p)$  с учетом инвертирования знака (см. рис. 4) описывается передаточной функцией

$$W_{\delta_{рв}^{упр}}^{\delta_{рв}^{возм}}(p) = -\frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{-(\bar{k}_{\Delta n_y} p + \bar{k}_и)}{T_{n_y}^2 p^3 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^2 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1)p + \bar{k}_и}. \quad (20)$$

Таким образом, после переходного процесса вмешательства возмущения в управление перегрузкой возникает, согласно (20), равновесное состояние в виде  $\delta_{рв}^{упр} = -\delta_{рв}^{возм}$ , в результате на вход динамического звена отработки перегрузки поступает нулевой сигнал — произошла перебалансировка самолета. Применение изодромного звена типа  $B(p)$  (18) нашло широкое применение для балансировки самолета [10] в законах траекторных режимов систем автоматического управления.

Основным ограничением при нахождении параметров синтезируемого астатического закона управления (4) изложенным способом является довольно жесткое условие (15) — требование практически аperiодического движения по перегрузке свободного самолета. Как правило, это условие не выполняется и относительный коэффициент затухания у самолета по перегрузке составляет менее единицы

$$\xi_{n_y} < 1. \tag{21}$$

Коррекция  $\xi_{n_y}$  в сторону увеличения осуществляется по требованиям устойчивости и управляемости для ручных режимов управления обычно с помощью статического демпфера, входящего в систему управления самолета. Для современных самолетов эта функция сосредоточена в системе дистанционного управления (СДУ), входящей в состав КСУ. В работе [16] с помощью найденных коэффициентов производных аэродинамических сил и моментов показан способ определения коэффициента демпфирования контура угловой скорости вращательного движения по тангажу, имеющего одинаковый характеристический полином с контуром перегрузки. Покажем способ нахождения коэффициента демпфирования по известным динамическим параметрам свободного движения самолета. Контур по перегрузке свободного самолета с демпфером примет вид, показанный на рис. 5.

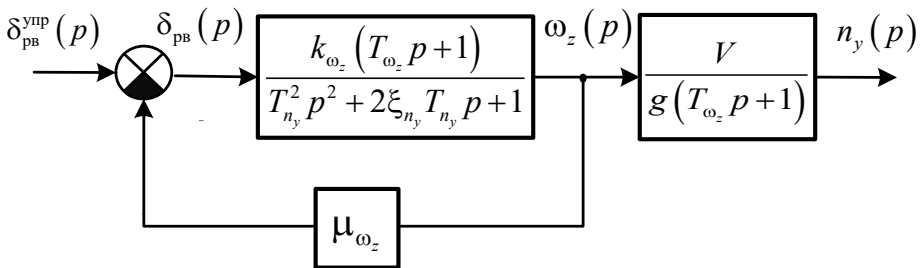


Рис. 5. Структура контура перегрузки с демпфером тангажа

На рис. 5 обозначены:  $k_{\omega_z}$  и  $T_{\omega_z}$  — модуль коэффициента усиления и постоянная времени форсирующего звена системы выхода самолета на угловую скорость вращения  $\omega_z$ ,  $\mu_{\omega_z}$  — передаточный коэффициент

демпфера тангажа. Объект управления с демпфером (рис. 5) для последующего замыкания контура перегрузки ПИ-регулятором будет иметь следующую передаточную функцию

$$W_{n_y, \delta}^{\delta_{PB}^{упр}}(p) = \frac{V}{g} \cdot \frac{k_{\omega_z}}{T_{n_y}^2 p^2 + (2\xi_{n_y} T_{n_y} + k_{\omega_z} T_{\omega_z} \mu_{\omega_z}) p + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z} + 1}$$

или

$$W_{n_y, \delta}^{\delta_{PB}^{упр}}(p) = \frac{V}{g} \cdot \frac{k_{\omega_z}^D}{(T_{n_y}^D)^2 p^2 + 2\xi_{n_y}^D T_{n_y}^D p + 1}, k_{\omega_z}^D = \frac{k_{\omega_z}}{1 + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}, T_{n_y}^D = \frac{T_{n_y}}{\sqrt{1 + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}},$$

$$\xi_{n_y}^D = \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y} + k_{\omega_z} T_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}{2T_{n_y} \sqrt{1 + k_{\omega_z} \mu_{\omega_z}}}, \xi_{n_y}^D > \xi_{n_y}. \quad (22)$$

Здесь имеют место следующие обозначения:  $V$  – истинная скорость полета,  $g$  – ускорение свободного падения,  $k_{\omega_z}^D$  – модуль коэффициента усиления динамического звена угловой скорости  $\omega_z$  с демпфером, и  $T_{n_y}^D$  – постоянная времени контуров угловой скорости и перегрузки с демпфером,  $\xi_{n_y}^D$  – относительный коэффициент затухания контура с демпфером. Из формулы для  $\xi_{n_y}^D$  (22) определяем выражение для физически значимого коэффициента демпфирования

$$\mu_{\omega_z} = \frac{2T_{n_y} \left[ T_{n_y} (\xi_{n_y}^D)^2 + \xi_{n_y}^D \sqrt{T_{n_y}^2 (\xi_{n_y}^D)^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_{\omega_z} + T_{\omega_z}^2} - \xi_{n_y} T_{\omega_z} \right]}{k_{\omega_z} T_{\omega_z}^2}. \quad (23)$$

При недостаточном затухании колебательного движения по перегрузке можно с помощью формулы (23) для заданного желаемого значения  $\xi_{n_y}^D \geq 1$  всегда найти соответствующий коэффициент демпфера тангажа для применения предложенной методики расчета коэффициентов (13) и (14) ПИ-регулятора.

Получение простой системы (4) при условии ее существования (15) позволяет применить подход к дальнейшему построению замкнутых систем траекторного управления по типу структур (рис. 3) с использованием методов оптимизации переходного движения по длительности и перерегулированию [7, 18, 19, 20]. Известен метод оптимизации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) [21, 22] для определения параметров регулирования быстродействующей системы, которая по своим частотным свойствам приближалась бы к идеальному фильтру низкой частоты [23]. Для этого АЧХ системы должна быть невозрастающей функция частоты и не иметь всплеска на частоте среза системы.

Для динамического звена второго порядка этому условию соответствует относительный коэффициент затухания, равный  $1/\sqrt{2}$ .

Этот результат был получен следующим образом. Пусть дана система с передаточной функцией стандартного вида

$$W(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (24)$$

Постоянная времени  $T$  — неизменяемый параметр, а относительный коэффициент затухания  $\xi$  — регулируемая величина. Используя правила работы с комплексными функциями, найдем квадрат модуля АЧХ системы (24):

$$|W(j\omega)|^2 = W(j\omega) \cdot W(-j\omega) = \frac{1}{T^4 \omega^4 + 2T^2(2\xi^2 - 1)\omega^2 + 1} = A^2(\omega), \quad (25)$$

где  $A(\omega)$  — вещественная функция круговой частоты  $\omega$ , собственно АЧХ системы (24). Исследуем функцию (25) на монотонность убывания и на наличие экстремума при равенстве нулю ее производной

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{\omega T^2(1 - 2\xi^2) - 2\omega^3 T^4}{\sqrt{[T^4 \omega^4 + 2T^2(2\xi^2 - 1)\omega^2 + 1]^3}} = 0. \quad (26)$$

Равенство нулю производной (26) обеспечивает уравнение

$$\omega T^2(1 - 2\xi^2) - 2\omega^3 T^4 = 0,$$

имеющее в особых точках решения при положительных значениях  $\omega$ , а именно

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_{\text{экстр}} = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{T}. \quad (27)$$

Первая точка  $\omega_0$  — начало координатной оси аргумента, вторая точка  $\omega_{\text{экстр}}$  есть экстремум в окрестности частоты среза  $\omega_{\text{ср}} = 1/T$ . При увеличении  $\xi$  от нуля до величины  $1/\sqrt{2}$  точка экстремума сдвигается от  $\omega_{\text{ср}}$  до нуля. Таким образом, экстремум АЧХ при  $\xi = 1/\sqrt{2}$  всегда будет находиться в точке нулевой частоты  $\omega_{\text{экстр}} = \omega_0 = 0$ :

$$\max A(\omega) = A(0), \quad (28)$$

а график АЧХ как невозрастающей функции частоты будет монотонно убывать при увеличении угловой частоты от нуля в точке (28) до бесконечности  $\omega \rightarrow \infty$ .

Тогда система (24) превращается в фильтр Баттерворта, имеющий «плоскую» амплитудно-частотную характеристику в области низких собственных частот, а на частотах выше частоты среза обладающий резким спадом характеристики. В общем случае для фильтра Баттерворта порядка  $n$  темп снижения АЧХ определяется свойствами функции гиперболы порядка  $2n$ , которая описывает функцию квадрата АЧХ, в нашем случае

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{1}{T^{2n}\omega^{2n} + 1} \Big|_{n=2} = \frac{1}{T^4\omega^4 + 1}. \quad (29)$$

Результат (29), как следует из (25), получается при  $\xi = 1/\sqrt{2}$ . Известно [24], что системы в варианте структуры и параметров Баттерворта имеют максимальное быстродействие.

Проведем далее замыкание полученного контура перегрузки (8) внешним контуром по сигналу  $V_y$  в структуре вложенных контуров (рис. 3), получим передаточную функцию контура отработки заданной вертикальной скорости полета стабилизации  $V_y^{\text{зад}}$ :

$$W_{V_y}^{V_y^{\text{зад}}}(p) = \frac{gk_{V_y}}{\bar{T}_{n_y}^2 p^3 + 2\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} p^2 + p + gk_{V_y}}. \quad (30)$$

По методике (25...27) отыскания «плоской» без экстремумов АЧХ замкнутой системы с высоким быстродействием получим следующий результат

$$A_{V_y}(\omega) = \sqrt{\left| W_{V_y}^{V_y^{\text{зад}}}(j\omega) \right|^2} = \frac{gk_{V_y}}{\sqrt{\bar{T}_{n_y}^4 \omega^6 + 2\bar{T}_{n_y}^2 (2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1) \omega^4 + (1 - 4\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y}) + g^2 k_{V_y}^2}},$$

$$\frac{dA_{V_y}(\omega)}{d\omega} = \frac{-gk_{V_y} \left[ 3\bar{T}_{n_y}^4 \omega^5 + 4\bar{T}_{n_y}^2 (2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1) \omega^3 + (1 - 4\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y}) \omega \right]}{\sqrt{\left[ \bar{T}_{n_y}^4 \omega^6 + 2\bar{T}_{n_y}^2 (2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1) \omega^4 + (1 - 4\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y}) + g^2 k_{V_y}^2 \right]^3}} = 0,$$

$$\omega_0 = 0, \omega_{\text{экстр}} = \frac{\sqrt{\sqrt{16\bar{\xi}_{n_y}^4 - 16\bar{\xi}_{n_y}^2 + 12\bar{\xi}_{n_y} \bar{T}_{n_y} gk_{V_y} + 1} - 2\bar{\xi}_{n_y}^2 + 2}}{\sqrt{3} \cdot \bar{T}_{n_y}}. \quad (31)$$

Для условия существования экстремума АЧХ только при нулевой частоте  $\omega_{\text{экстр}} = 0$  на основании (31) имеет место единственное решение

по коэффициенту  $k_{V_y}$

$$k_{V_y} = \frac{1}{4g\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}}, \quad (32)$$

которое определяет коэффициент  $k_{V_y}$  настройки контура вертикальной скорости в функции только параметров контура перегрузки  $\bar{T}_{n_y}$  и  $\bar{\xi}_{n_y}$ . Заметим, что при полученном выражении для  $k_{V_y}$  (32) и при значении  $\bar{\xi}_{n_y} = 1/\sqrt{2}$  в знаменателе модуля АЧХ (19) останется полином только с максимальной (шестой) степенью  $\omega^6$  в структуре (29) и система (30) превращается в фильтр Баттерворта третьей степени.

Продолжим замыкание полученного траекторного контура  $V_y$  внешним контуром стабилизации высоты полета, передаточная функция которого, с учетом (32), примет вид:

$$W_H^{H^{3ад}}(p) = \frac{k_H}{4\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 p^4 + 8\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^2 p^3 + 4\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} p^2 + p + k_H}. \quad (33)$$

Соответствующий (27) квадрат АЧХ будет иметь выражение

$$A_H^2(\omega) = \frac{k_H^2}{16\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6\omega^8 + 32\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^4(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)\omega^6 + 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H\omega^4 + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H)\omega^2 + k_H^2}, \quad (34)$$

а производная АЧХ, с учетом (34), примет вид

$$\frac{dA_H(\omega)}{d\omega} = \frac{-k_H \left[ 64\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6\omega^7 + 96\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^4(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)\omega^5 + 16\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H\omega^3 + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H)\omega \right]}{\sqrt{\left[ 16\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6\omega^8 + 32\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^4(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)\omega^6 + 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H\omega^4 + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H)\omega^2 + k_H^2 \right]^3}}. \quad (35)$$

Нетривиальное равенство нулю производной АЧХ (35) обеспечивается решением кубического уравнения

$$64\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^6 y^3 + 96\bar{\xi}_{n_y}^2\bar{T}_{n_y}^4(2\bar{\xi}_{n_y}^2 - 1)y^2 + 16\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}^3 k_H y + (1 - 8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y} k_H) = 0, \quad y = \omega^2. \quad (36)$$

Единственный действительный корень  $y_1(k_H, \bar{T}_{n_y}, \bar{\xi}_{n_y})$  уравнения (36) является сложной функцией входящих в нее параметров (не показана в силу громоздкости формул).

Для обеспечения максимума АЧХ только в одной точке  $\omega = 0$  достаточно найти решение относительно настраиваемого коэффициента  $k_H$  из уравнения

$$y_1(k_H, \bar{T}_{n_y}, \bar{\xi}_{n_y}) = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) имеет единственное аналитическое решение относительно аргумента  $k_H$ :

$$k_H = \frac{1}{8\bar{\xi}_{n_y}\bar{T}_{n_y}}. \quad (38)$$

Заметим, что найденные формулы (32) и (38) справедливы при любых значениях относительного коэффициента затухания  $\xi_{n_y}$  и постоянной времени  $T_{n_y}$  контура перегрузки устойчивого свободного самолета, а не только при выполнении условия (15). Главным основанием справедливости полученных общих решений (32) и (38) является простая структура исходного контура перегрузки, к которой была приведена замкнутая система с пропорционально-интегральным регулятором (4) перегрузки.

Покажем графики переходных процессов контуров  $V_y$  (рис. 6) и  $H$  (рис. 7) с найденными коэффициентами настроек (32) и (38) для исходных параметров  $\xi_{n_y} = 1$  и  $T_{n_y} = 0,7$  с при подаче на вход единичных ступенек.

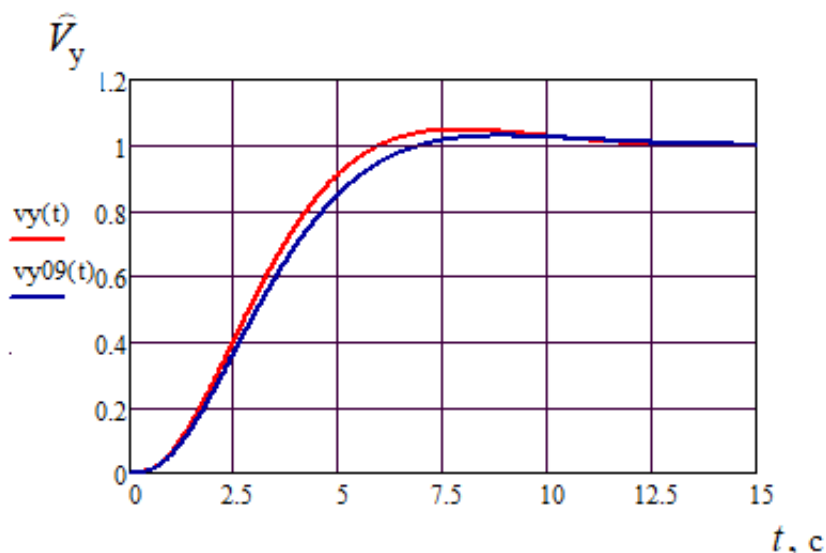


Рис. 6. Переходный процесс по вертикальной скорости полета



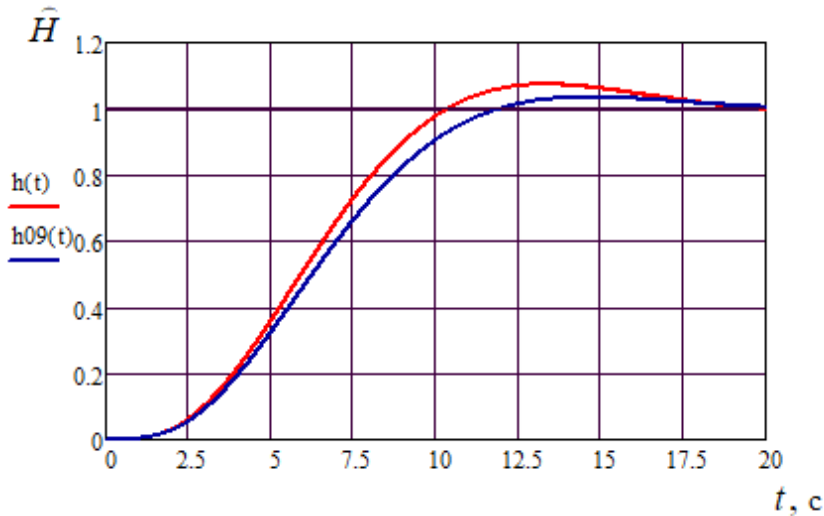


Рис. 7. Переходный процесс по высоте полета

На рис. 6, 7 красным цветом обозначены кривые переходных движений при настройках по формулам (26) и (32), соответственно перерегулирование по  $V_y$  составляет 4,7%, а по высоте 7,3%. В работе [25] по методу корневого годографа показано влияние уменьшения коэффициента прямого усиления на снижение колебательности движения и, как следствие, уменьшения перерегулирования. Для рассматриваемого варианта объединения контуров траекторных систем достаточно уменьшить соответствующие коэффициенты усиления  $k_{V_y}$  и  $k_H$  на 10% с получением перерегулирований 2,8% по  $V_y$  и 3,4% по  $H$ . Эти графики на рис. 6, 7 показаны синим цветом. При этом время регулирования несущественно возрастает на 1,0 – 1,5 секунды.

Метод построения гладкой амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы управления, не имеющей максимумов на своем спадающем участке, позволяет найти наиболее быстрое переходное движение по вертикальной скорости и высоте полета самолета без расчета кривой переходного процесса. Фактически этот метод является методом оптимизации АЧХ систем с простыми структурами, который позволяет обеспечивать высокое качество и быстродействие процессов, в нашем случае, процессов траекторного управления.

В целях получения общего подхода к формированию управления внутренним контуром перегрузки с астатизмом по возмущению в варианте (2), (5), в том числе при  $\xi_{n_y} < 1$ , предложим методику корневого анализа качества переходного процесса по перегрузке.

Начнем с рассмотрения полученного результата редукции интегрального контура перегрузки при условии (15). Представим передаточную функцию замкнутого контура перегрузки (5) в виде, удобном для исследования ее корней: нулей и полюсов.

$$W_{n_y}^{n_{y\text{зад}}} (p) = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y}}{T_{n_y}^2} \bar{W}(p), \quad \bar{W}(p) = \frac{p + \frac{\bar{k}_u}{\bar{k}_{\Delta n_y}}}{p^3 + \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}} p^2 + \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2} p + \frac{\bar{k}_u}{T_{n_y}^2}}. \quad (39)$$

Нормированную с точностью до постоянного множителя передаточную функцию  $\bar{W}(p)$  устойчивого контура перегрузки, сохраняющую динамические свойства передаточной функции  $W_{n_y}^{n_{y\text{зад}}}$ , представим в разложении на множители [26, стр. 221] с одним действительным корнем  $p_1$  и парой комплексно сопряженных корней  $p_2$  и  $p_3$ , а именно

$$\bar{W}(p) = \frac{p - p_0}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)}, \quad p_0 = -\alpha_0, \quad p_1 = -\alpha_1, \quad p_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\beta$$

или в развернутом виде

$$\bar{W}(p) = \frac{p + \alpha_0}{(p + \alpha_1)(p^2 + 2\alpha_2 p + \alpha_2^2 + \beta_2^2)}. \quad (40)$$

Сопоставляя множитель второго порядка в характеристическом полиноме (40) со множителем стандартного вида  $p^2 + 2\xi_2 \omega p + \omega^2$ ,  $\omega = 1/T$ , где  $T$  — постоянная времени, получим  $2\alpha_2 = 2\xi_2 \omega$ ,  $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = \omega^2$ , отсюда

$$\omega = \frac{\alpha_2}{\xi_2}, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40), получим характеристический полином в развернутом виде:

$$(p + \alpha_1) \left( p^2 + 2\alpha_2 p + \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} \right) = p^3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) p^2 + \left( 2\alpha_1 \alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} \right) p + \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\xi_2^2}. \quad (42)$$

Напомним, что условием делимости полинома знаменателя (42) на полином числителя в варианте представления системы в виде (39), (40) является равенство их корней, а именно

$$\alpha_1 = \alpha_0 = \frac{\bar{k}_u}{\bar{k}_{\Delta n_y}}. \quad (43)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной полиномов (39) и (40), получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_n}{T_{n_y}^2}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{2\alpha_2\bar{k}_n}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_2^2}{\bar{k}_{\Delta n_y}\xi_2^2} = \frac{1}{T_{n_y}^2}. \end{array} \right. \quad (44)$$

Потребуем сохранения в редуцированной передаточной функции (5) постоянной времени  $\bar{T}_{n_y} = T_{n_y}$ , равной постоянной времени исходного контура перегрузки (1), для исключения ее увеличения при возможных значениях  $\bar{k}_{\Delta n_y} < 1$ , что приведет к затягиванию переходного движения. Для этого должно выполняться условие

$$\bar{k}_{\Delta n_y} = 1. \quad (45)$$

Тогда, с учетом (45), система (44) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{2\alpha_2\bar{k}_n}{\xi_2^2} = \frac{2}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_2^2}{2\xi_2^2} = \frac{1}{T_{n_y}^2}. \end{array} \right. \quad (46)$$

Система уравнений (46) будет иметь решение

$$\alpha_2 = \frac{\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{2T_{n_y}}, \quad \bar{k}_n = \frac{\xi_{n_y} - \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{T_{n_y}}, \quad \xi_2 = \frac{\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}}{2}. \quad (47)$$

Найдем условия получения оптимальной по быстродействию редуцированной системы второго порядка, у которой относительный коэффициент затухания равен

$$\xi_2 = 1/\sqrt{2}. \quad (48)$$

Из (47) при условии (48) получаем, что относительный коэффициент затухания исходной системы должен быть равен опорному значению

$$\xi_{n_y}^{\text{опор}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1,0607. \quad (49)$$

В этом случае также выполняется равенство

$$\alpha_2 = \bar{k}_{\text{и}} = \frac{1}{T_{n_y} \sqrt{2}}. \quad (50)$$

Обратим внимание, что, с учетом (50), получен результат, когда  $\bar{k}_{\text{и}} = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Равенство действительной части колебательного корня  $\alpha_2$  действительному корню  $\alpha_1$  для системы третьего порядка, согласно диаграмме Вышнеградского [27], обеспечивает наибольшее быстродействие переходного процесса. На основании этого вернемся к рассмотрению системы (44) при  $\bar{k}_{\text{и}} = \alpha$  для величин  $\xi_{n_y}$ , не связанных равенством (49). Тогда можно представить на рассмотрение систему:

$$\begin{cases} 3\alpha = \frac{2\xi_{n_y}}{T_{n_y}}, \\ 2\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{\xi_2^2} = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{T_{n_y}^2}, \\ \frac{\alpha_2^2}{\xi_2^2} = \frac{1}{T_{n_y}^2}. \end{cases} \quad (51)$$

Решением системы (51) будут следующие выражения

$$\alpha_2 = \bar{k}_{\text{и}} = \frac{2\xi_{n_y}}{3T_{n_y}}, \quad \bar{k}_{\Delta n_y} = \frac{8}{9}\xi_{n_y}^2, \quad \xi_2 = \frac{2\xi_{n_y}}{3}. \quad (52)$$

Тогда в окрестности «опорного» значения  $\xi_{n_y}^{\text{опор}} = 1,0607$  для значений относительного коэффициента затухания контура перегрузки свободного самолета в интервале

$$\xi_{n_y} = (1/\sqrt{2}, 1,2) \quad (53)$$

определим амплитудно-частотные характеристики астатической системы 3-го порядка (5) в сравнении с АЧХ оптимальной системы второго порядка (8), к которой сводится система при опорном значении (49) с коэффициентами (52).

Квадрат модуля АЧХ системы (5):

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{\bar{k}_{\Delta n_y}^2 \omega^2 + \bar{k}_n^2}{T_{n_y}^4 \omega^6 + 2T_{n_y}^2 (2\xi_{n_y}^2 - 1 - \bar{k}_{\Delta n_y}) \omega^4 + (\bar{k}_{\Delta n_y}^2 + 2\bar{k}_{\Delta n_y} - 4\xi_{n_y} T_{n_y} \bar{k}_n + 1) \omega^2 + \bar{k}_n^2}. \quad (54)$$

Соответствующая АЧХ после подстановки в (54) коэффициентов (47) примет вид:

$$A_3(\omega) = \sqrt{\frac{64\xi_{n_y}^4 T_{n_y}^2 \omega^2 + 36\xi_{n_y}^2}{81T_{n_y}^6 \omega^6 + 18T_{n_y}^4 (10\xi_{n_y}^2 - 9) \omega^4 + T_{n_y}^2 (64\xi_{n_y}^4 - 72\xi_{n_y}^2 + 81) \omega^2 + 36\xi_{n_y}^2}}. \quad (55)$$

Амплитудно-частотная характеристика эталонного контура обработки перегрузки второго порядка типа (24) с постоянной времени  $T_{n_y}$  и  $\xi_{n_y}^{эт} = 1/\sqrt{2}$ , к которому по приведенной выше методике сведен астатический контур перегрузки, имеет вид

$$A_{эт}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{T_{n_y}^4 \omega^4 + 1}}. \quad (56)$$

В совпадении выражений (55) и (56) несложно убедиться при подстановке в (55) опорного значения  $\xi_{n_y}^{опор} = 3/(2\sqrt{2})$  (49), при котором обеспечивается аналитическая редукция исследуемого контура перегрузки к простой системе второго порядка, имеющей максимальное быстродействие.

На рис. 8 показаны графики АЧХ астатического контура перегрузки 3-го порядка для крайних значений интервала (48):  $\xi_{n_y} = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$  и  $\xi_{n_y} = 1,2$  в сравнении с эталонной АЧХ оптимальной системы 2-го порядка.

Рисунок 9 иллюстрирует степень сближения АЧХ контура перегрузки с эталонной АЧХ при различных относительных коэффициентах затухания вблизи  $\xi_{n_y} \approx 1$ .

Графики стандартных переходных движений контура перегрузки при постоянной времени  $T_{n_y} = 0,6$  с в сравнении с переходным процессом (показан красным цветом) эталонной системой второго порядка при  $\xi_{et} = 1/\sqrt{2}$  приведены на рис. 10 (стр. 64).

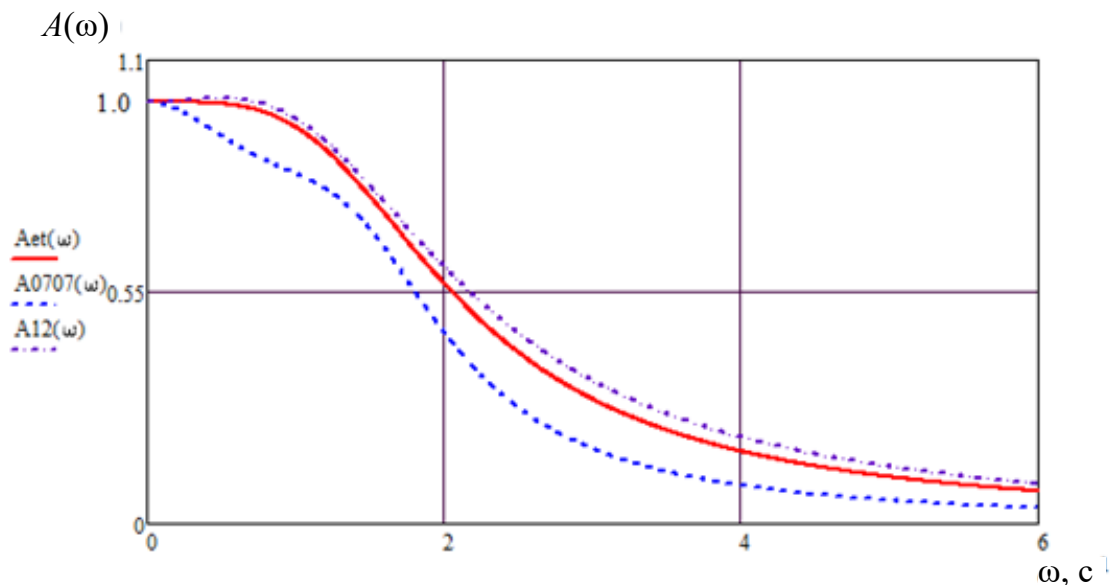


Рис. 8. Разброс АЧХ контура перегрузки в диапазоне от  $\xi_{n_y} = 0,707$  до  $\xi_{n_y} = 1,2$

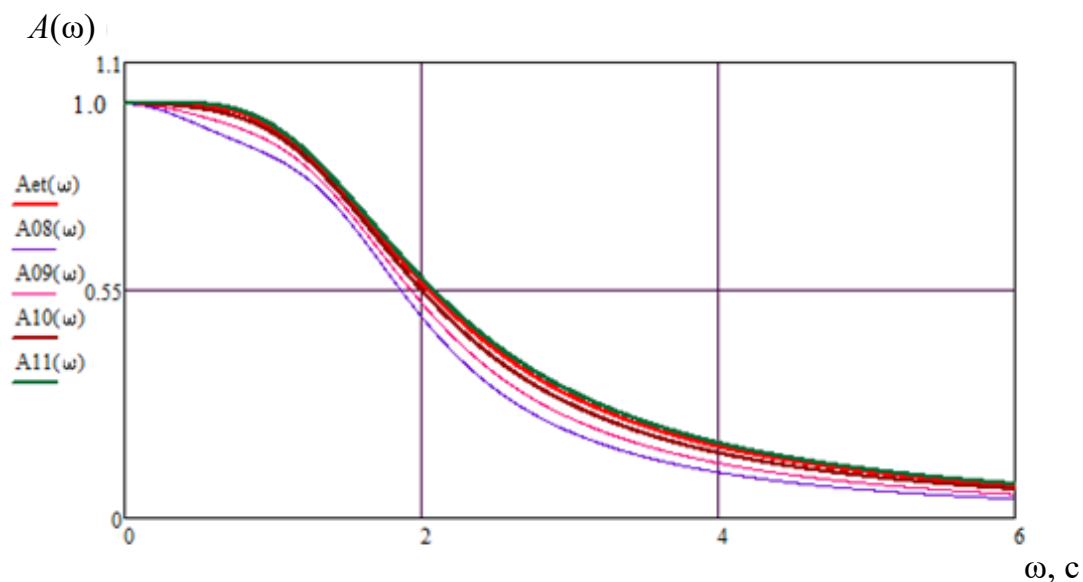


Рис. 9. АЧХ контура перегрузки для значений  $\xi_{n_y} = 0,8, 0,9, 1,0, 1,1$  соответственно

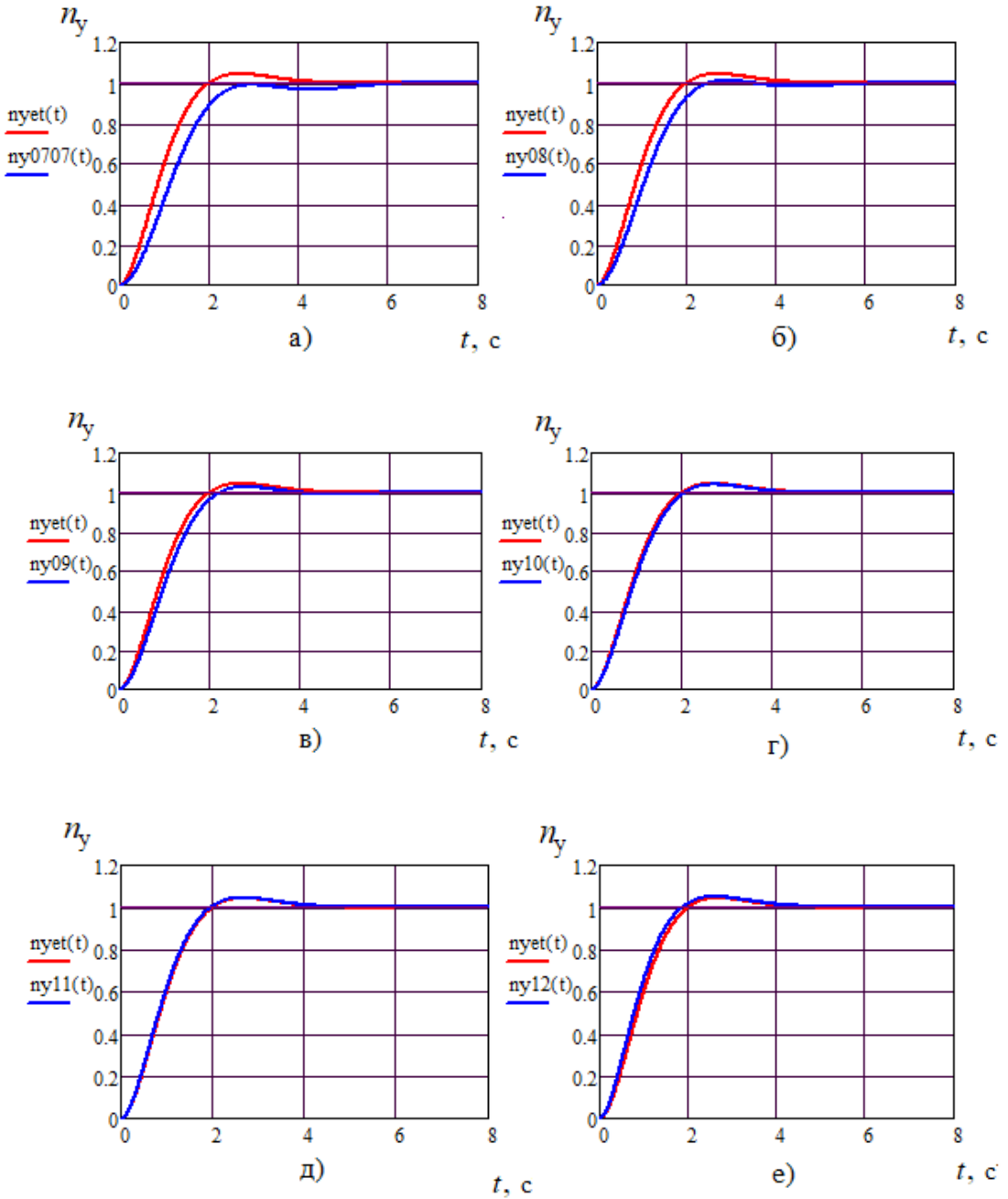


Рис. 10. Графики переходных процессов астатического контура перегрузки с относительными коэффициентами затухания исходной системы:

а)  $\xi_{n_y} = 0,707$ , б)  $\xi_{n_y} = 0,8$ ,

в)  $\xi_{n_y} = 0,9$ , г)  $\xi_{n_y} = 1,0$ ,

д)  $\xi_{n_y} = 1,1$ , е)  $\xi_{n_y} = 1,2$

Интересным эффектом обладает полученный результат синтеза астатического контура перегрузки — перерегулирование не зависит от постоянной времени  $T_{n_y}$ , а только от  $\xi_{n_y}$ . Этот факт иллюстрирует рис. 11, на котором показаны графики переходных процессов при начальных значениях модели контура перегрузки  $\xi_{n_y} = 1,1$  и  $T_{n_y} = 0,3$  с (красного цвета),  $T_{n_y} = 0,6$  с (синего цвета) и  $T_{n_y} = 1$  с (зеленого цвета).

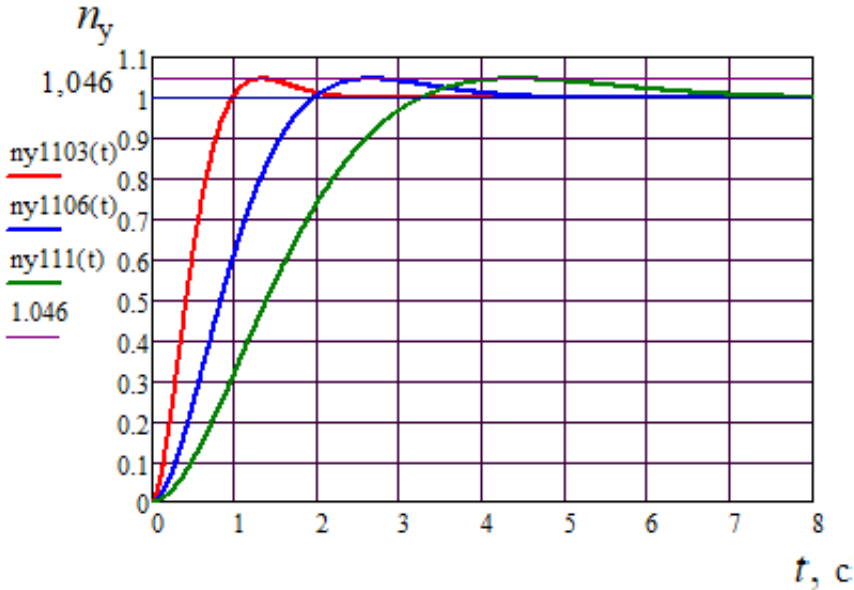


Рис. 11. Сравнение переходных процессов с разными постоянными времени и одинаковым относительном коэффициенте затухания

Как следует из рассмотрения графиков для всех вариантов перерегулирование одинаково и составляет 4,6%.

Покажем, что полученный результат синтеза астатического контура перегрузки является оптимально полученным в смысле минимума интегральной квадратичной оценки [28] разности переходных процессов эталонной быстродействующей модели

$$W_{\text{эт}}(p) = \frac{1}{T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{\text{opt}} T_{n_y} p + 1} \quad (57)$$

и системы обработки перегрузки (5). Формулировка задачи состоит в следующем. Дана передаточная функция разности  $\Delta h(t) \doteq L^{-1}[W_{\Delta h}(p)]$  переходных процессов: оптимального желаемого (57) и по выше приведенной методике процесса обработки перегрузки (5)



$$W_{\Delta}(p) = \frac{1}{p \left( T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{\text{opt}} T_{n_y} p + 1 \right)} - \frac{\frac{\bar{k}_{\Delta n_y}}{\bar{k}_и} p + 1}{p \left( \frac{T_{n_y}^2}{\bar{k}_и} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{\bar{k}_и} p^2 + \frac{\bar{k}_{\Delta n_y} + 1}{\bar{k}_и} p + 1 \right)}. \quad (58)$$

С учетом выражений для коэффициентов закона управления (52) передаточная функция разности (58) преобразовывается к виду

$$W_{\Delta}(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1},$$

$$b_2 = T_{n_y}^3 (9 - 8\xi_{n_y}^2), \quad b_1 = T_{n_y}^2 \xi_{n_y} (12 - 16\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}}), \quad b_0 = T_{n_y} (9 - 12\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}}),$$

$$a_5 = 9T_{n_y}^5, \quad a_4 = 18T_{n_y}^4 (\xi_{n_y} + \xi_{\text{opt}}), \quad a_3 = 2T_{n_y}^3 (4\xi_{n_y}^2 + 18\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}} + 9),$$

$$a_2 = 2T_{n_y}^2 (8\xi_{n_y}^2 \xi_{\text{opt}} + 12\xi_{n_y} + 9\xi_{\text{opt}}), \quad a_1 = T_{n_y} (8\xi_{n_y}^2 + 12\xi_{n_y} \xi_{\text{opt}} + 9), \quad a_0 = 6\xi_{n_y}. \quad (59)$$

Интегральная квадратичная оценка разности процессов, описываемых передаточной функцией (59), определяется [15] по формуле

$$I_{\Delta h} = \frac{\det B_{\Delta h}}{2a_5 \det A_{\Delta h}},$$

$$A_{\Delta h} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 & -a_5 \\ 0 & 0 & a_0 & -a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B_{\Delta h} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 & -a_5 \\ B_0 & B_1 & B_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

$$B_0 = b_0^2, \quad B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2, \quad B_2 = b_2^2.$$

Скалярная оценка (60) является функцией трех аргументов  $I_{\Delta h}(T_{n_y}, \xi_{n_y}, \xi_{\text{opt}})$ , аналитическое выражение которой очень громоздко и в работе не приведено. Параметры  $T_{n_y}, \xi_{n_y}$  известны, параметр  $\xi_{\text{opt}}$  является искомым для наиболее близких между собой переходных процессов в работе сравниваемых систем.

Экстремум среднего квадрата (60) будем искать в функции  $\xi_{opt}$ , для этого найдем производную оценки (60) и приравняем ее к нулю

$$\frac{\partial I_{\Delta h}(T_{n_y}, \xi_{n_y}, \xi_{opt})}{\partial \xi_{opt}} = 0. \quad (61)$$

Уравнение (61) представляет собой алгебраическую функцию 7-го порядка относительно  $\xi_{opt}$ , поэтому решение может быть найдено только численно. Численные решения  $\xi_{opt}$  получены для относительных коэффициентов затухания  $\xi_{n_y}$  в интервале значений (53) исходной модели движения по перегрузке свободного самолета. В таблице 1 приведено сравнение величин перерегулирования астатического контура (рис. 10) и приближенной к нему оптимальной в смысле минимальной квадратичной оценки системы (57) 2-го порядка.

Таблица 1.

Система 3-го порядка	$\xi_{n_y}$	0,707	0,8	0,9	1,0	1,0607	1,1	1,2
	$\delta_{n_y}, \%$	$\approx 0$	1,1	2,7	3,8	4,32	4,6	4,96
Система 2-го порядка	$\xi_{opt}$	0,9932	0,88643	0,8016	0,73807	0,707	0,68947	0,65167
	$\delta_{n_y}, \%$	0	0,24	2,48	3,12	4,32	5,03	6,73

В результате исследований подтверждено, что оптимальные в смысле минимума среднего квадрата разности переходных процессов приведенные в табл. 1 величины  $\xi_{opt}$  не зависят от постоянной времени свободного движения самолета по перегрузке.

Анализ табл. 1 показывает, что в диапазоне относительных коэффициентов затухания  $\xi_{n_y} \in (0,9, 1,1)$  перерегулирования обеих систем близки между собой и составляют (2,5...5)%. Этот факт позволяет замещать при синтезе контуров траекторного движения дробно-рациональную передаточную функцию контура с ПИ-регулятором на передаточную функцию простого вида (57) 2-го порядка.

Таким образом, способ применения интегральной квадратичной оценки [15, 21, 28] для приближения передаточной функции астатического контура перегрузки третьего порядка к передаточной функции второго порядка простого типа дает возможность использовать представленный метод оптимизации АЧХ траекторных контуров по  $V_y$  (31), (32) и по  $H$  (35), (38).

Полная передаточная функция контура вертикальной перегрузки с астатическими свойствами по управлению и возмущению имеет вид:

$$\bar{W}_{V_y}^{V_y \text{ зад}}(p) = \frac{g\bar{k}_{V_y}(\bar{k}_{\Delta n_y}p + \bar{k}_и)}{T_{n_y}^2 p^4 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^3 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1)p^2 + (\bar{k}_и + g\bar{k}_{V_y}\bar{k}_{\Delta n_y})p + g\bar{k}_{V_y}\bar{k}_и}. \quad (62)$$

Коэффициенты настройки  $\bar{k}_{\Delta n_y}$  и  $\bar{k}_и$  находятся по формулам (52), а параметр  $k_{V_y}$  по формуле (32) с коэффициентом взвешивания 0,9 и найденным по табл. 1 оптимальным относительным коэффициентом затухания

$$k_{V_y} = \frac{0,9}{4g\xi_{\text{opt}}T_{n_y}}. \quad (63)$$

Использование эквивалентной простой системы контура перегрузки в смысле минимума интегральной квадратичной оценки ее отклонения от движения системы 3-го порядка с ПИ-регулятором позволяет с коррекцией (63) применять ранее полученное решение синтеза простых систем траекторного управления.

На рис. 12 в сравнении с рис. 6 показан переходный процесс по  $\hat{V}_y$  (в относительных единицах) системы (62) при тех же параметрах  $\xi_{n_y} = 1$  и  $T_{n_y} = 0,7$  с, для которых при условии (15) обеспечивается редукция контура перегрузки с ПИ-регулятором до простой системы 2-го порядка (4), с переходным процессом системы (30) с оптимальной АЧХ.

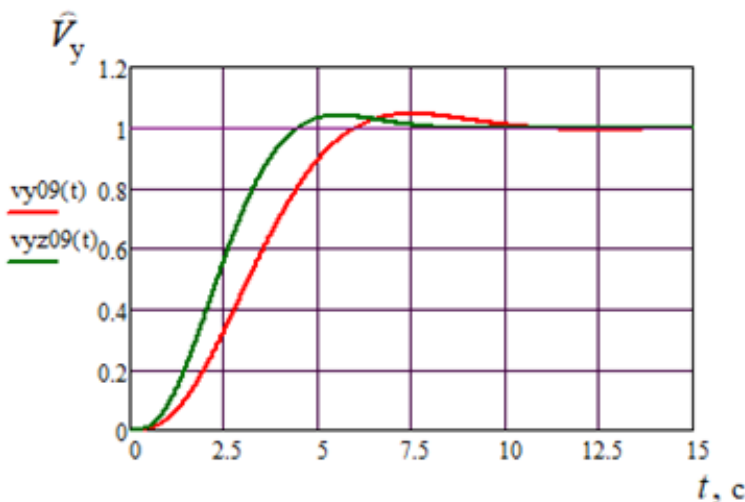


Рис. 12. Переходный процесс по вертикальной скорости с астатическим контуром  $n_y$

Сравнение переходных движений с оптимальной АЧХ (кривая красного цвета) и с оптимальным контуром перегрузки (кривая зеленого цвета) показывает уменьшение времени срабатывания для последнего на 1,5 секунды и снижения перерегулирования с 4,7% до 3,9%.

Полная передаточная функция контура высоты с астатическими свойствами по управлению и возмущению примет вид

$$\bar{W}_H^{H^{3ад}}(p) = \frac{g\bar{k}_H k_{V_y} (\bar{k}_{\Delta n_y} p + \bar{k}_n)}{T_{n_y}^2 p^5 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^4 + (\bar{k}_{\Delta n_y} + 1) p^3 + (\bar{k}_n + gk_{V_y} \bar{k}_{\Delta n_y}) p^2 + gk_{V_y} (\bar{k}_n + \bar{k}_H \bar{k}_{\Delta n_y}) p + g\bar{k}_H k_{V_y} \bar{k}_n}. \quad (64)$$

В (64) используются коэффициенты  $\bar{k}_{\Delta n_y}$  и  $\bar{k}_n$  (52),  $k_{V_y}$  (32) и коэффициент  $\bar{k}_H$ :

$$\bar{k}_H = \frac{0,9}{8\xi_{opt} T_{n_y}}. \quad (65)$$

Рисунок 13 иллюстрирует повышение быстродействия и качества переходного процесса системы (64) по сравнению с системой (33) при одинаковой коррекции (65) коэффициента  $\bar{k}_H$ .

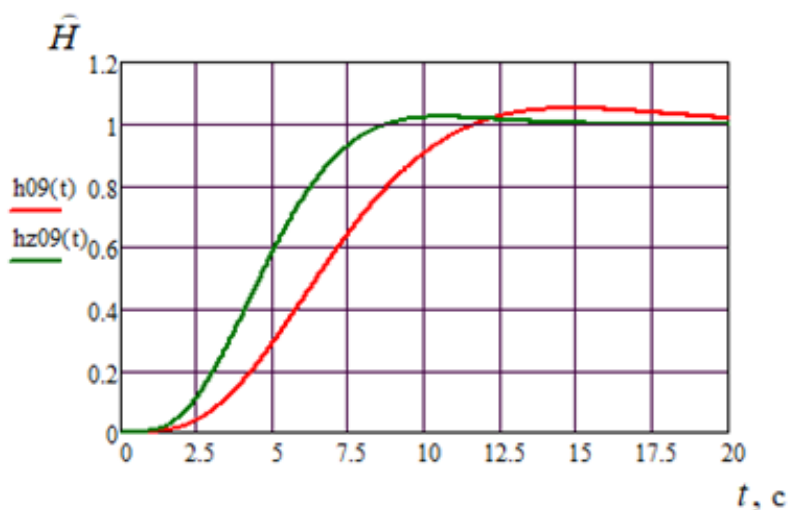


Рис. 13. Переходный процесс по высоте с оптимальным контуром перегрузки

Как видно из графиков, время срабатывания уменьшается на 3 секунды, а перерегулирование с 3,4% до 2,2%.

Таким образом, системы (5), (62) и (64) объединенные в последовательно замыкаемые контура представляют собой единую систему автоматического траекторного управления самолета — траекторный автопилот, обладающий максимальным быстродействием и высоким качеством процессов управления, а синтез которого осуществляется аналитически по исходным характеристикам свободного самолета.

### Литература

1. *Гуськов Ю. П., Загайнов Г. И., Колбасов В. Н.* Управление полетом самолетов: Учебник для авиационных вузов. — М.: Машиностроение. 1980. — 213 с.
2. *Аэромеханика самолета.* / Под ред. А. Ф. Бочкарева. — М.: Машиностроение. 1977. — 246 с.
3. *Михалев И. А. и др.* Системы автоматического управления самолетом. / И. А. Михалев, Б. Н. Окоемов, М. С. Чикулаев. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение. 1987. — 240 с.
4. *Панкратов В. В.* Автоматическое управление электроприводами. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. — 200 с.
5. *Шрейнер Р. Т.* Системы подчиненного регулирования электроприводов: учеб. пособие. / Р. Т. Шрейнер. — Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет» РГППУ, 2008. — 279 с.
6. *Усынин Ю. С.* Теория автоматического управления учебное пособие для вузов. / Ю. С. Усынин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. — 176 с.
7. *Рендал У. Биард, Тимоти У. МакЛэйн.* Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2015. — 312 с.

8. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.
9. *Байбородин Ю. В., Драбкин В. В., Сменковский Е. Г., Унгуриян С. Г.* Бортовые системы управления полетом. – М.: Транспорт, 1975. – 336 с.
10. Автоматизированное управление самолетами и вертолетами. / *С. М. Федоров, В. В. Драбкин, О. И. Михайлов, В. М. Кейн.* Под ред. С. М. Федорова. – М.: Транспорт, 1977. – 246 с.
11. *Денисенко В. В.* ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации. / Современные технологии автоматизации. – М.: СТА-ПРЕСС, № 4, 2006. – С. 66–74. № 1, 2007. – С. 78–88.
12. *Кочетков Ю. А.* Основы автоматики авиационного оборудования. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1975. – 454 с.
13. *Щепетов А. Г.* Об оптимальных формах переходного процесса и амплитудночастотной характеристики линейной динамической системы. // Проблемы управления. – М.: ИПУ РАН, 2008, выпуск 3. – С. 30–36.
14. *Попов Е. П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1989. – С. 304.
15. *Кочетков Ю. А.* Основы автоматики авиационного оборудования. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1995. – 574 с.
16. *Кузин А. А., Куликов В. Е.* Применение аналитического синтеза режима стабилизации угла наклона траектории полета самолета по результатам идентификации динамических параметров углового движения. // Навигация и управление летательными аппаратами. – М.: МИЭА, 2023. – Вып. 42, – С. 45–62.
17. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – С. 768.
18. *Ерофеев А. А.* Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 2003. – С. 302.

19. *Кориков А. М.* Основы теории управления: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – С. 392.
20. *Душин С. Е., Зотов Н. С., Имаев Д. Х.* и др. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. / Под ред. В. Б. Яковлева. – М.: Высшая школа, 2005. – С. 567.
21. *Красовский А. А., Поспелов Г. С.* Основы автоматики и технической кибернетики. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 600 с.
22. *Попов Е. П.* Динамика систем автоматического регулирования. – М.: Гостехиздат, 1954. – 798 с.
23. *Лэм Г.* Аналоговые и цифровые фильтры: расчет и реализация: пер. с англ. / Гарри Лэм; пер. В. Л. Левин, М. Н. Микшис, И. Н. Теплюк; ред. перевода И. Н. Теплюк. – Москва: Мир, 1982. – 592 с.
24. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов по специальности «Радиотехника». / С. И. Баскаков, 2003. – 462 с.
25. *Куликов В. Е.* Синтез траекторного управления тяжелого самолета в вертикальной плоскости по методу обратной задачи модального управления. // Навигация и управление летательными аппаратами. – М.: МИЭА. Вып. 42, 2023. – С. 29–44.
26. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 432 с.
27. *Макаров И. М., Менский Б. М.* Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.
28. *Иващенко Н. Н.* Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. Учебник для вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М., «Машиностроение», 1978. – 736 с.

УДК 629.7.058

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНОГО КАНАЛА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТА

*Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, д. т. н., профессор,  
Виктория Александровна КУЛЬБАКА,  
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*Рассмотрен подход к аналитическому синтезу быстродействующей системы стабилизации крена с помощью поперечного канала управления самолета. Задача синтеза решена на основе метода обратной задачи модального управления для создания астатического по возмущению контура управления креном с минимальным перерегулированием при высоком быстродействии. Комбинированная структура контура управления функционирует при максимально допустимом отклонении элеронов и обеспечивает астатизм по возмущению вблизи заданного крена. Показано влияние приводов канала управления элеронов на процесс выхода самолета на заданный крен. Полученные результаты иллюстрированы графическим материалом.*

***Ключевые слова:** аналитический синтез, замкнутый контур крена, желаемые параметры, переключение структур, переходный процесс, быстродействие, перерегулирование.*

## ANALYTICAL SYNTHESIS OF QUICK RESPONSE AIRCRAFT AUTOMATIC LATERAL CONTROL CHANNEL

*Vladimir E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor,  
Victoriya A. KULBAKA,  
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*The article discusses an approach to analytical synthesis of quick response roll stabilization system using aircraft lateral control channel. The synthesis task is solved by the method of modal control inverse problem used for creating astatic at disturbance roll control loop with minimum overshoot during quick response. The combined control loop structure operates with the maximum allowable aileron deflection and provides astatism at disturbance near the target roll. The influence of aileron control channel actuators on the process of aircraft reaching the target roll is shown. The results obtained are illustrated with graphic material.*

***Keywords:** analytical synthesis, closed roll loop, desired parameters, structures switching, step response, quick response, overshoot.*



Задача автоматизации выхода самолета на заданный угол крена с использованием канала поперечного управления имеет классическое решение [1, 2]. Это решение основано на применении модели движения изолированного крена [3] в предположении малости угла скольжения  $\beta \approx 0$ . Практическая оправданность такого допущения определяется построением контура управления рысканием, решающим задачу стабилизации нулевой боковой перегрузки с помощью руля направления. При выполнении координированных разворотов это условие обеспечивается, поэтому перекрестные моменты вращения самолета в общем боковом движении малы и не оказывают существенного влияния на движение по крену.

Анализ результатов полетов показал недостаточное быстродействие предложенного ранее контура крена. Рассмотрим получение закона управления крена в постановке обратной задачи модального управления [4]. Имеет место следующая модель изолированного движения крена [5, 6]:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = -\bar{M}_x^{\omega_x} \omega_x + \bar{M}_x^{\delta_{эл}} \delta_{эл}, \\ \dot{\gamma} = \omega_x, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\omega_x$  — угловая скорость вращения по крену,  $\gamma$  — угол крена,  $\delta_{эл}$  — угол отклонения элеронов,  $\bar{M}_x^{\omega_x}$ ,  $\bar{M}_x^{\delta_{эл}}$  — производные поперечного момента по угловой скорости крена и элеронов.

Рассмотрим правила настройки параметров закона управления стандартного типа при безынерционном отклонении элеронов, который в операторной форме преобразования Лапласа имеет вид [7, стр. 88]:

$$\delta_{эл}(p) = k_{\Delta\gamma} \Delta\gamma(p) - k_{\dot{\gamma}} p \gamma(p), \quad \Delta\gamma(p) = \gamma_{зад}(p) - \gamma(p). \quad (2)$$

Структурная схема «идеального» статического контура управления креном на основании (1) и (2) примет вид, показанный на рис. 1.

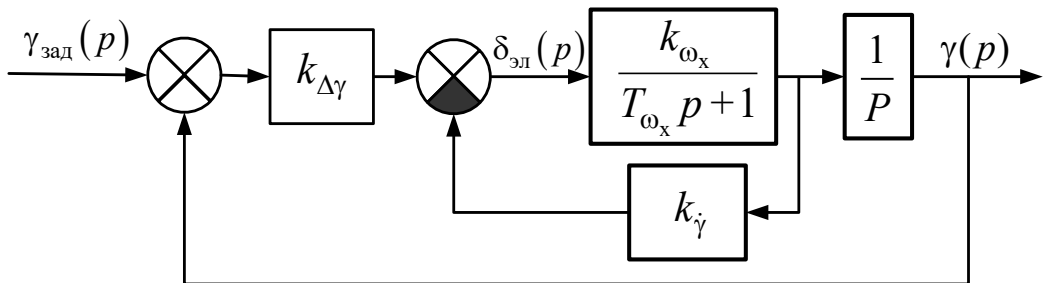


Рис. 1. Структурная схема идеального статического контура крена

Соответствующая рис. 1 передаточная функция отработки заданного крена равна

$$W_{\gamma}^{\gamma_{\text{зад}}}(p) = \frac{k_{\Delta\gamma}k_{\omega_x}}{T_{\omega_x}p^2 + (1 + k_{\dot{\gamma}}k_{\omega_x})p + k_{\Delta\gamma}k_{\omega_x}}, \quad T_{\omega_x} = \frac{1}{\bar{M}_x^{\omega_x}}, \quad k_{\omega_x} = \frac{\bar{M}_x^{\delta_{\text{эл}}}}{\bar{M}_x^{\omega_x}}, \quad (3)$$

где  $T_{\omega_x}$ ,  $k_{\omega_x}$  — известные постоянная времени и коэффициент усиления контура угловой скорости крена самолета (неизменяемой части объекта управления).

Выражение (3) преобразуем к виду, удобному для анализа динамических свойств контура

$$W_{\gamma}^{\gamma_{\text{зад}}}(p) = \frac{1}{T_{\text{ж}}^2 p^2 + 2\xi_{\text{ж}}T_{\text{ж}}p + 1}, \quad T_{\text{ж}} = \frac{\sqrt{T_{\omega_x}}}{\sqrt{k_{\Delta\gamma}k_{\omega_x}}}, \quad \xi_{\text{ж}} = \frac{1 + k_{\dot{\gamma}}k_{\omega_x}}{2\sqrt{k_{\Delta\gamma}k_{\omega_x}T_{\omega_x}}}, \quad (4)$$

где  $T_{\text{ж}}$  и  $\xi_{\text{ж}}$  — желаемые постоянная времени и относительный коэффициент затухания полученного с помощью закона управления (2) замкнутого контура выхода на заданный крен. Задавая величины  $T_{\text{ж}}$ ,  $\xi_{\text{ж}}$  из формул (4), для этих параметров можно определять настраиваемые коэффициенты регулятора крена  $k_{\Delta\gamma}$  и  $k_{\dot{\gamma}}$ .

Заметим, что даже при условии  $k_{\dot{\gamma}} = 0$  система (4) всегда будет асимптотически устойчива, но при больших значениях  $k_{\Delta\gamma}$  колебательна. Найдем для этого условия максимально возможный коэффициент  $k_{\Delta\gamma}$  для быстродействующего контура (4) при  $\xi_{\text{ж}} = 1/\sqrt{2}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k_{\Delta\gamma}k_{\omega_x}T_{\omega_x}}} \Rightarrow k_{\Delta\gamma} = \frac{1}{2k_{\omega_x}T_{\omega_x}}. \quad (5)$$

Для получения процессов в замкнутом контуре без перерегулирования желательно заказывать эталонный контур в аperiodическом варианте исполнения. В нашем случае аperiodическое звено второго порядка без перерегулирования будет иметь максимальное быстродействие при действительных кратных корнях, то есть при  $T_{\text{ж}} = 1$ . Тогда при соответствующей подстановке  $\xi_{\text{ж}}$  в (4) полученного коэффициента  $k_{\Delta\gamma}$  найдем решение для  $k_{\dot{\gamma}}$ , а именно:

$$1 = \frac{1 + k_{\dot{\gamma}}k_{\omega_x}}{2\sqrt{k_{\Delta\gamma}k_{\omega_x}T_{\omega_x}}} \Rightarrow 1 = \frac{1 + k_{\dot{\gamma}}k_{\omega_x}}{\sqrt{2}} \Rightarrow k_{\dot{\gamma}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{k_{\omega_x}}. \quad (6)$$

Желаемая постоянная времени контура крена из (4) при результате (5) будет равна

$$T_{\text{ж}} = \sqrt{2}T_{\omega_x}. \quad (7)$$

Если одновременно задавать желаемую постоянную времени  $T_{\text{ж}}$  и  $\xi_{\text{ж}} = 1$  (для получения апериодического переходного процесса), то, согласно (4), искомые коэффициенты будут получены в общем виде:

$$k_{\Delta\gamma} = \frac{T_{\omega_x}}{k_{\omega_x} T_{\text{ж}}^2}, \quad k_{\dot{\gamma}} = \frac{2T_{\omega_x} - T_{\text{ж}}}{k_{\omega_x} T_{\text{ж}}}. \quad (8)$$

Анализ выражений (8) показывает, что граница диапазона задаваемых значений желаемой постоянной времени сверху составляет  $2T_{\omega_x}$ , а снизу не может быть по физическим соображениям меньше постоянной времени контура угловой скорости крена  $T_{\omega_x}$ . Тогда желаемые динамические параметры контура крена для закона управления (2) лежат в пределах

$$\xi_{\text{ж}} = 1, \quad T_{\text{ж}} \in (T_{\omega_x}, 2T_{\omega_x}). \quad (9)$$

Для самого быстродействующего случая при  $T_{\text{ж}} = T_{\omega_x}$  коэффициенты настройки будут равны

$$k_{\Delta\gamma} = \frac{1}{k_{\omega_x} T_{\omega_x}}, \quad k_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{k_{\omega_x}} \quad (10)$$

и аналитически зависеть только от параметров движения свободного самолета по угловой скорости крена  $k_{\omega_x}$  и  $T_{\omega_x}$ . После подстановки (10) в (4) получаем следующую передаточную функцию отработки крена в варианте структуры (рис. 1):

$$W_{\gamma}^{\text{зад}}(p) = \frac{1}{(T_{\omega_x} p + 1)(T_{\omega_x} p + 1)}. \quad (11)$$

Рис. 2 иллюстрирует полученные желаемые процессы отработки контуром (3) единичной ступеньки при значениях коэффициентов (8), соответствующих желаемым постоянным времени  $T_{\text{ж}} = T_{\omega_x}$ ,  $\sqrt{2}T_{\omega_x}$ ,  $2T_{\omega_x}$  на примере замыкания законом (2) исходной динамической системы угловой скорости крена с параметрами

$$k_{\omega_x} = 0,51 \text{ и } T_{\omega_x} = 0,67 \text{ с.} \quad (12)$$

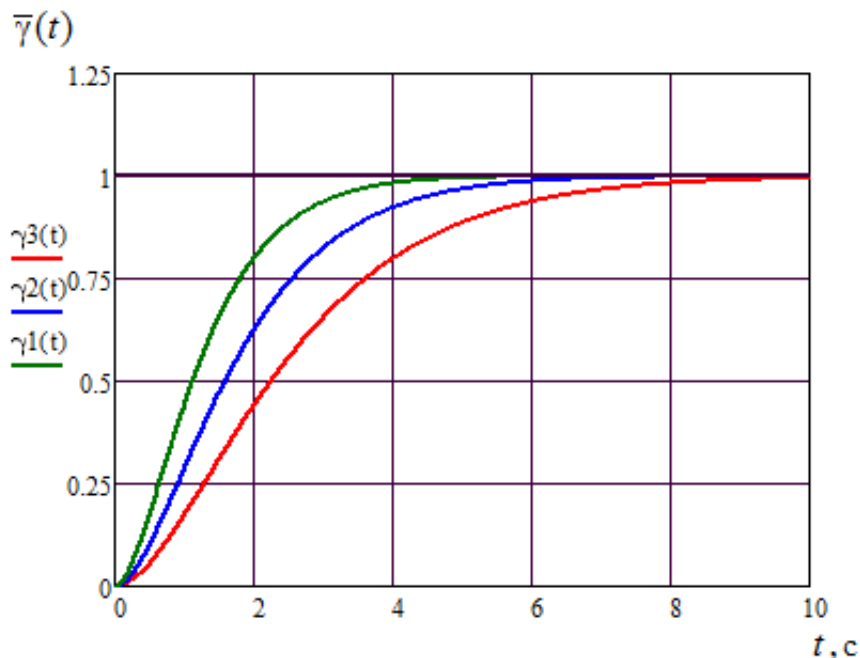


Рис. 2. Переходные процессы по крену при значениях желаемой постоянной времени:  
 $T_{\text{ж}} = T_{\omega_x}$  ( $\gamma_1(t)$  зеленый цвет),  $T_{\text{ж}} = \sqrt{2}T_{\omega_x}$  ( $\gamma_2(t)$  синий цвет),  
 $T_{\text{ж}} = 2T_{\omega_x}$  ( $\gamma_3(t)$  красный цвет)

Фактически всегда получаемый таким образом контур крена является динамической апериодической системой второго порядка с кратными корнями, имеющей постоянную времени в диапазоне (9). Наиболее быстродействующей является система с желаемой постоянной времени  $T_{\text{ж}} = T_{\omega_x}$ . Тогда остановимся на рациональном варианте назначения параметров эталонного быстродействующего контура крена:

$$\xi_{\text{ж}} = 1, T_{\text{ж}} = T_{\omega_x}, \quad (13)$$

для которого найдены (10) коэффициенты настройки регулятора.

Рассмотренная структура (рис. 1) с передаточной функцией (3) имеет астатизм первого порядка по входу, но не имеет астатизма по возмущению, например, при возникновении несимметрии в поперечном канале управления. Для обеспечения высокоточного управления по крену в условиях действующих возмущений дополним предложенную без изменения настроек структуру (рис. 1) включением в ее прямую цепь интегрального звена и дополнительной обратной связи по крену, как показано на рис. 3.

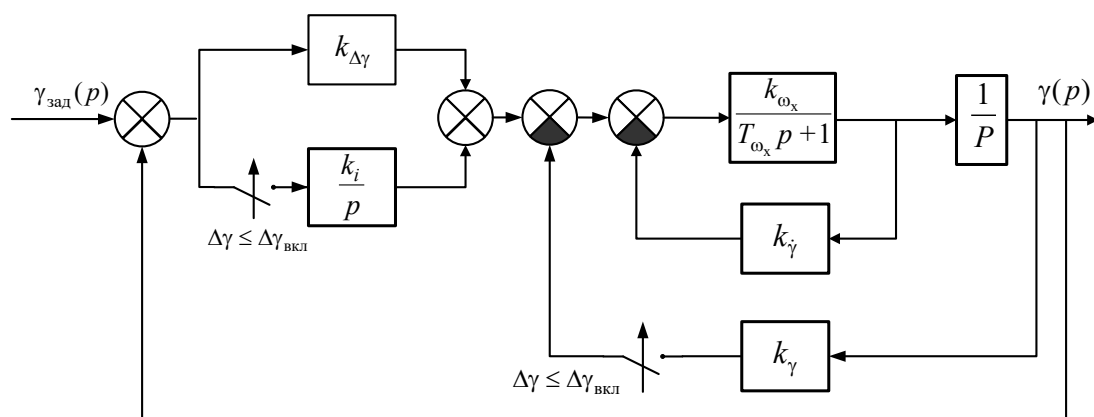


Рис. 3. Структурная схема интегрального контура крена

В структуре рис. 3 показаны ключи подключения интеграла и сопрягаемого с ним дополнительного сигнала по крену. Эта коммутация происходит при подходе крена к заданному значению, тем самым исключается возможность работы интегрального контура при выходе элеронов на ограничение, выделенное для работы САУ. Использование максимального отклонения элеронов является штатной ситуацией для обеспечения максимально располагаемого быстродействия контура крена, для которого нахождение элерона на «упоре» не является критическим. Таким контуром является синтезированный контур с передаточной функцией (11), работающий «в большом», а интегральный контур будет работать «в малом».

Соответствующая рисунку 3 передаточная функция интегрального контура описывает полностью астатическую (по входу и по возмущению) систему управления креном и имеет вид:

$$\widehat{W}_{\gamma}^{\gamma_{зад}}(p) = \frac{k_{\Delta\gamma} k_{\omega_x} p + k_i k_{\omega_x}}{T_{\omega_x} p^3 + (1 + k_{\dot{\gamma}} k_{\omega_x}) p^2 + k_{\omega_x} (k_{\Delta\gamma} + k_{\gamma}) p + k_i k_{\omega_x}}. \quad (14)$$

Введение дополнительного сигнала обратной связи по крену с коэффициентом  $k_{\dot{\gamma}}$  одновременно с введением интегрирующего звена с коэффициентом  $k_i$  допускает возможность деления полинома знаменателя на полином числителя с приведением системы 3-го порядка к простой структуре 2-го порядка. Такую редукцию обеспечивает схема построения системы (рис. 3) как ПИ-П регулятора [8], что позволяет избежать дополнительного перерегулирования переходного процесса, вызванного дифференцирующим звеном в числителе передаточной функции (13).

В результате алгебраического деления полинома знаменателя на полином числителя полиномиальной функции (13) с нулевым остатком получим новый характеристический полином системы (рис. 3):

$$\frac{T_{\omega_x}}{k_{\omega_x} k_{\Delta\gamma}} p^2 + \frac{1 + k_{\dot{\gamma}} k_{\omega_x} - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} T_{\omega_x}}{k_{\omega_x} k_{\Delta\gamma}} p + 1 \quad (15)$$

и уравнение нулевого остатка

$$k_{\dot{\gamma}} k_{\omega_x} - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left( 1 + k_{\dot{\gamma}} k_{\omega_x} - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} T_{\omega_x} \right) = 0. \quad (16)$$

Введем обозначения для полинома (15), который будем считать желаемым и, с учетом (16), запишем полученную после деления передаточную функцию в стандартном виде ее полинома

$$\frac{1}{\widehat{T}_{\text{ж}}^2 p^2 + 2\widehat{\xi}_{\text{ж}} \widehat{T}_{\text{ж}} p + 1}, \quad \widehat{T}_{\text{ж}} = \sqrt{\frac{T_{\omega_x}}{k_{\omega_x} k_{\Delta\gamma}}}, \quad \widehat{\xi}_{\text{ж}} = \frac{k_{\dot{\gamma}}}{2k_i \widehat{T}_{\text{ж}}}. \quad (17)$$

Будем решать задачу для полученных ранее настроек (10) «статического» контура (11), тогда после подстановки выражений (10) в (17) параметры желаемого редуцированного контура будут равны

$$\widehat{W}_{\dot{\gamma}}^{\text{зад}}(p) = \frac{1}{\widehat{T}_{\text{ж}}^2 p^2 + 2\widehat{\xi}_{\text{ж}} \widehat{T}_{\text{ж}} p + 1}, \quad \widehat{T}_{\text{ж}} = T_{\omega_x}, \quad \widehat{\xi}_{\text{ж}} = \frac{k_{\dot{\gamma}}}{2k_i T_{\omega_x}}. \quad (18)$$

Заметим, что в рассматриваемом варианте желаемая постоянная времени  $\widehat{T}_{\text{ж}}$  сохранила значение исходной постоянной времени контура угловой скорости вращения по крену. Из (18) следует:

$$k_i = \frac{k_{\dot{\gamma}}}{2\widehat{\xi}_{\text{ж}} T_{\omega_x}}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16) получаем уравнение для нахождения коэффициента  $k_{\dot{\gamma}}$

$$k_{\omega_x} T_{\omega_x} k_{\dot{\gamma}} + 4\widehat{\xi}_{\text{ж}} (1 - \widehat{\xi}_{\text{ж}}) = 0, \quad (20)$$

имеющее решение

$$k_{\dot{\gamma}} = \frac{4\widehat{\xi}_{\text{ж}} (1 - \widehat{\xi}_{\text{ж}})}{k_{\omega_x} T_{\omega_x}}. \quad (21)$$

Тогда после подстановки (21) в (19) получим:

$$k_i = \frac{2(1 - \hat{\xi}_{\text{ж}})}{k_{\omega_x} T_{\omega_x}^2}. \quad (22)$$

Анализ решений (21) и (22) показывает, что величина желаемого относительного коэффициента затухания не может быть равна единице  $\hat{\xi}_{\text{ж}} \neq 1$ , как было возможно для контура (11), иначе должно выполняться условия  $k_\gamma = 0$ ,  $k_i = 0$  и контур не сможет стать астатическим. Таким образом установлено, что интегральный контур крена может быть только колебательным. Для обеспечения близости переходных процессов редуцированного контура (18) и контура (11) потребуем выполнение условия малого перерегулирования  $\Delta h$  для колебательного звена (18) — не более 0,5%:

$$\Delta h = e^{-\frac{\pi \hat{\xi}_{\text{ж}}}{\sqrt{1 - \hat{\xi}_{\text{ж}}^2}}} \leq 0,005. \quad (23)$$

Перерегулированию (23) соответствует желаемый относительный коэффициент затухания

$$\hat{\xi}_{\text{ж}} = 0,86, \quad (24)$$

гарантирующий практическое отсутствие в переходном движении перерегулирования.

Следует сказать, что назначение желаемого относительного коэффициента затухания, с учетом (24), может находиться в пределах:  $0,86 \leq \hat{\xi}_{\text{ж}} < 1$ .

Однако при этом следует обращать внимание на полученную постоянную времени полинома числителя

$$T_i = \frac{k_{\Delta\gamma}}{k_i} = \frac{T_{\omega_x}}{2(1 - \hat{\xi}_{\text{ж}})}, \quad (25)$$

величина которой будет влиять на длительность переходного движения «подтягивания» к заданному крену после включения интегральной структуры в контур управления. Поэтому остановимся на полученном значении (24) для дальнейшего синтеза системы.

При сохранении настроек (10) статического по возмущению контура (3), работающего «в большом» с максимальной скоростью изменения крена, в том числе с ограничением на отклонение элеронов, коэффициенты (21), (22) и их соотношение при величине (24) для интегрального астатического по возмущению контура определяются выражениями:

$$k_i = \frac{0,28}{k_{\omega_x} T_{\omega_x}^2}, \quad k_\gamma = \frac{0,4816}{k_{\omega_x} T_{\omega_x}}, \quad \frac{k_\gamma}{k_i} = 1,72T_{\omega_x}. \quad (26)$$

Следует обратить внимание на то, что все найденные коэффициенты интегрального контура крена  $k_{\Delta\gamma}$ ,  $k_{\dot{\gamma}}$ ,  $k_i$ ,  $k_\gamma$  являются функциями параметров контура угловой скорости вращения крена (3)  $T_{\omega_x}$  и  $k_{\omega_x}$ . То есть получено решение по методу обратной задачи модального управления, при котором корни синтезированного замкнутого контура управления с желаемой динамикой движения полностью определяются параметрами неизменяемого объекта управления. Соотношение  $k_\gamma/k_i$  играет важную роль в обеспечении редукции интегрального контура до звена второго порядка.

Переходный процесс интегрального контура (14) с параметрами (26) в сравнении с переходным процессом статического по возмущению контура (3) при параметрах (12) свободного объекта показан на рис. 4.

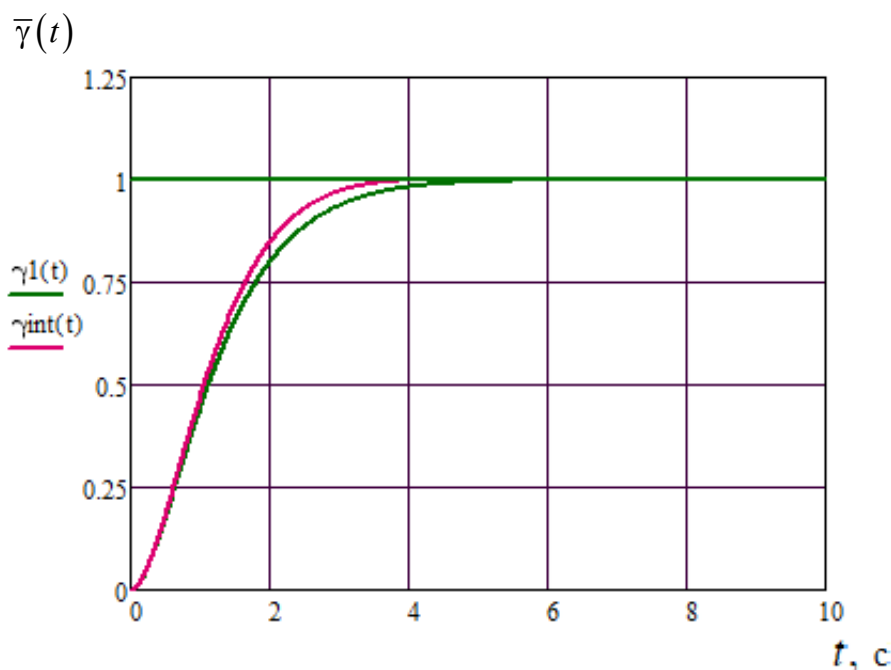


Рис. 4. Переходные процессы при  $T_{ж} = T_{\omega_x}$  для статического ( $\gamma I(t)$  зеленый цвет) и интегрального ( $\gamma_{int}(t)$  малиновый цвет) контуров

Как следует из сравнения графиков (рис. 4), обе системы, являясь практически аperiodическими, имеют также почти совпадающее время переходного процесса. Таким образом, полученные две системы имеют фактически одинаковые динамические характеристики, что позволяет на конечном этапе переходного движения по крену замещать статический



контур управления на астатический для обеспечения высокоточной стабилизации заданного крена в условиях возмущений. То есть предложенный метод синтеза астатического по возмущению контура крена позволяет использовать интегральный контур совместно со статическим.

Так как передаточная функция по входу интегрального редуцированного контура имеет вид (18), найдем для нее условия коммутации структуры (рис. 3) с переходом на астатический редуцированный контур управления. При переключении структуры система будет находиться в состоянии ненулевых начальных условий функционирования расширенного контура. Найдем условия подключения интегральной составляющей в форме определения начальных условий: по рассогласованию крена с заданным значением  $\gamma$  и его производной (угловой скоростью вращения). Движение свободной системы из ненулевых начальных условий определяется изображением выходного сигнала [9, стр. 84], обусловленного появившимися при включении новой структуры начальными условиями – конечными значениями фазовых координат движения статической системы на момент переключения.

В нашем случае изображение движения по крену при завершении подхода самолета к заданному крену (новому условию равновесия) на основе (18) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(p) &= \frac{A_0(p)\Delta\gamma_0 + A_1(p)\gamma_0^{(1)}}{T_{\text{ж}}^2 p^2 + 2\xi_{\text{ж}} T_{\text{ж}} p + 1}, \\ A_0(p) &= T_{\text{ж}}^2 p + 2\xi_{\text{ж}} T_{\text{ж}}, \\ A_1(p) &= T_{\text{ж}}^2, \\ \Delta\gamma_0 &= \gamma_0 - \gamma_{\text{зад}}, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\gamma_0 = \gamma(t_{\text{вкл}})$  и  $\gamma_0^{(1)} = \dot{\gamma}(t_{\text{вкл}}) = \omega_{x_0}(t_{\text{вкл}})$  – крен и производная (угловая скорость вращения) крена в момент включения  $t_{\text{вкл}}$  интегрального контура при  $\gamma_{\text{зад}} = \text{const}$ . Выражение (27), с учетом (18) и (24), преобразуем к виду

$$\Gamma_0(p) = T_{\omega_x} \Delta\gamma_0 \frac{T_{\omega_x} p + 1,72 + T_{\omega_x} z_0}{T_{\omega_x}^2 p^2 + 1,72 T_{\omega_x} p + 1}, \quad z_0 = \frac{\gamma_0^{(1)}}{\Delta\gamma_0}. \quad (28)$$

Для исключения нежелательного перерегулирования при вписывании крена в равновесное состояние  $\gamma = \gamma_{\text{зад}}$  целесообразно обеспечить равенство

$$T_{\omega_x} p + 1,72 + T_{\omega_x} z_0 = T_{\omega_x} p + 1, \quad (29)$$

которое приближает изображение свободного движения при большом относительном коэффициенте затухания  $\xi_{\text{ж}} = 0,86$  к изображению весовой переходной функции  $g(t)$  апериодического звена при  $\xi_{\text{ж}} = 1$ :

$$\bar{\Gamma}_0(p) = \frac{T_{\omega_x} \Delta\gamma_0}{T_{\omega_x} p + 1}, \quad \bar{g}(t) = L^{-1}[\bar{\Gamma}_0(p)] = \Delta\gamma_0 e^{-\frac{1}{T_{\omega_x}} t}. \quad (30)$$

Тогда из (29) получаем величину соотношения фазовых координат системы на момент коммутации структуры контура управления

$$z_0 = -\frac{0,72}{T_{\text{ж}}}, \quad \Delta\gamma_0 = \Delta\gamma_{\text{вкл}} = -1,39T_{\text{ж}}\omega_{x_0}, \quad (31)$$

определяющую условие коммутации и начало свободного движения интегрального контура. Знак «минус» в (31) всегда «показывает» завершающий этап выхода на заданный крен. Например, при выходе на положительный крен скорость вращения положительна, а знак ненулевого крена относительно нового начала координат имеет знак «минус», так как к равновесному состоянию система подходит «снизу-вверх».

Тогда при выполнении равенства (31), определяющего условие коммутации и начало свободного движения интегрального контура, будет иметь место движение по крену согласно весовой переходной функции  $g(t)$  изображения (28)

$$g(t) = L^{-1} \left[ T_{\omega_x} \Delta\gamma_0 \frac{T_{\omega_x} p + 1}{T_{\omega_x}^2 p^2 + 1,72T_{\omega_x} p + 1} \right], \quad (32)$$

асимптотически приближающейся с увеличением времени к своему «нулевому» состоянию. Сравнение весовых переходных функций  $\bar{g}(t)$  (30) и  $g(t)$  (32) при относительной величине  $\Delta\bar{\gamma}_0 = 1$  показано на рис. 5 (стр. 84).

Реальное движение по крену приводит к перерегулированию 1% от величины начального отклонения крена  $\Delta\gamma_0$  от заданного значения, что совершенно достаточно для обеспечения высокоточной работы интегрального контура при комбинированном его применении со статическим контуром управления. Для обеспечения безударного перехода с одной структуры системы на более сложную достаточно при условии (31) подключения ветви сигнала интеграла и компенсационного сигнала крена ввести начальное условие на выходе интегрального звена равным  $u_0 = -k_{\gamma}\gamma$  с тем, чтобы сумма этих сигналов в момент времени начала работы интегрального контура равнялась нулю.

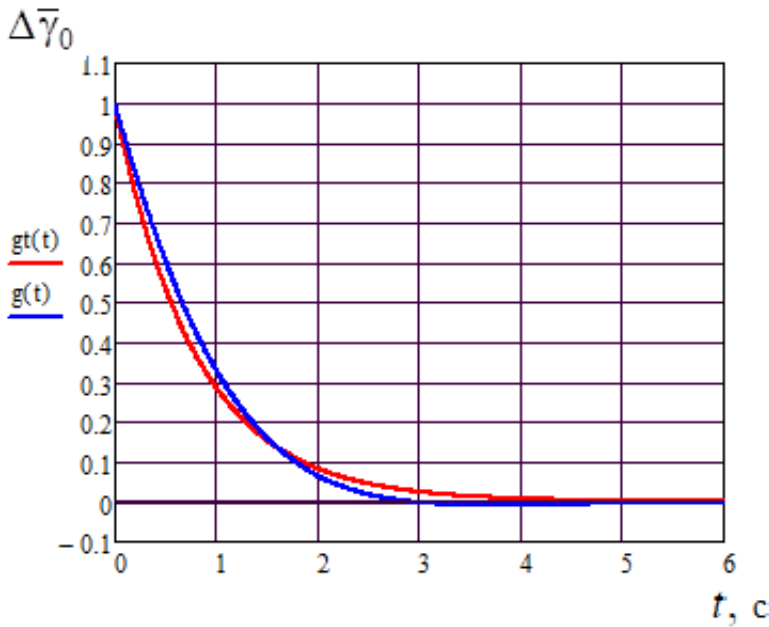


Рис. 5. Процесс вписывания в заданный крен из начальных условий включения интегрального контура:  
 $g\tilde{t}(t)$  — идеальный вариант,  $g(t)$  — реальный процесс вписывания

Рассмотренное решение задачи определения начальных условий подключения интегральной структуры выполнено в приближенном исполнении существования ее редуцированного варианта. Однако точное решение требует использования полного характеристического полинома (14) и согласования фазовых траекторий статической и интегральной систем между собой на момент перехода системы с одной фазовой траектории на другую, более высокой размерности. Эта задача заслуживает отдельного исследования и в настоящей работе не рассматривалась.

Полученная система (рис. 3) с комбинированными контурами управления (3), (14) синтезирована при допущении безынерционного управления от приводной системы, которая имеет свою динамику работы. С учетом стандартного привода САУ и бустерного силового привода системы поперечного управления самолета, имеющих передаточные функции

$$W_{\text{прСАУ}}(p) = \frac{1}{T_{\text{рм}}^2 p^2 + 2\xi_{\text{рм}} T_{\text{рм}} p + 1}, \quad W_{\text{сп}}(p) = \frac{1}{T_{\text{сп}} p + 1}, \quad (33)$$

структурная схема интегрального контура с приводами примет вид, показанный на рис. 6.

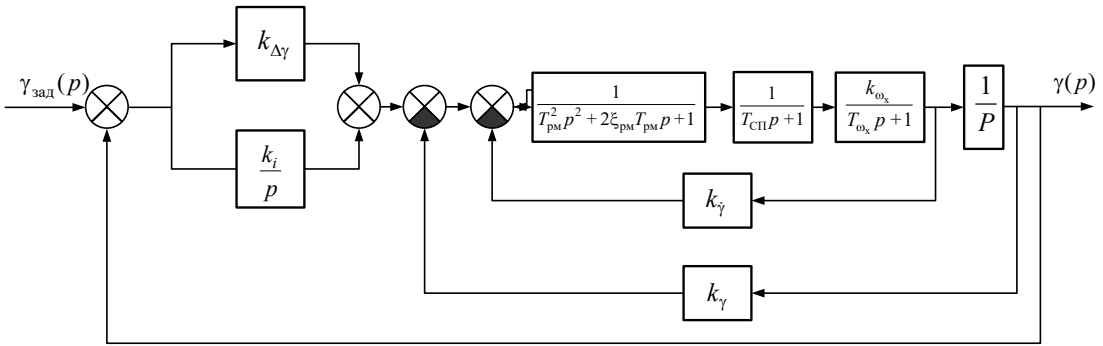


Рис. 6. Структура интегрального контура управления с приводами

Соответствующая рисунку 6 полная передаточная функция интегрального контура с приводной системой будет равна

$$\tilde{W}_{\gamma}^{\gamma_{зад}}(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_6 p^6 + a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

$$a_6 = T_{\omega_x} T_{сп} T_{рм}^2, \quad a_5 = T_{сп} T_{рм}^2 + T_{\omega_x} T_{рм}^2 + 2T_{сп} \xi_{рм} T_{рм} T_{\omega_x},$$

$$a_4 = T_{рм}^2 + T_{сп} T_{\omega_x} + 2\xi_{рм} T_{рм} T_{сп} + 2\xi_{рм} T_{рм} T_{\omega_x}, \quad a_3 = T_{сп} + T_{\omega_x} + 2\xi_{рм} T_{рм},$$

$$a_2 = 1 + k_{\dot{\gamma}} k_{\omega_x}, \quad a_1 = k_{\omega_x} (k_{\Delta\gamma} + k_{\dot{\gamma}}), \quad a_0 = k_i k_{\omega_x}, \quad b_1 = k_{\dot{\gamma}} k_{\omega_x}, \quad b_0 = k_i k_{\omega_x}.$$
(34)

Аналогично способу приведения интегрального контура (14) с безынерционными приводами к простой структуре (17), для исключения влияния полинома числителя (34) на перерегулирование выполним редукцию передаточной функции (34) делением без остатка ее характеристического полинома на полином числителя. Условием такой редукции служит уравнение нулевого остатка:

$$k_{\dot{\gamma}} k_{\omega_x} - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left\{ a_2 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left[ a_3 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left[ a_4 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left( a_5 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} a_6 \right) \right] \right] \right\} = 0. \quad (35)$$

Из уравнения (35) находим выражение для коэффициента  $k_{\dot{\gamma}}$ , играющего роль коэффициента позиционного  $k_i$  компенсатора сигнала интеграла, как зависимость от коэффициента

$$k_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{k_{\omega_x}} \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left\{ a_2 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left[ a_3 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left[ a_4 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} \left( a_5 - \frac{k_i}{k_{\Delta\gamma}} a_6 \right) \right] \right] \right\}. \quad (36)$$

Коэффициент  $k_i$  в характеристическом полиноме (34) входит только в составляющую  $a_0$  нулевого порядка, поэтому его настройку в расширенной системе (34) можно осуществлять по методу корневого годографа [10], одновременно получая коэффициент  $k_\gamma$  (36), сопутствующего интегральному звену элемента структуры.

На рис. 7 для примера исходного объекта (12) показаны в сравнении переходные движения по крену при стандартном ступенчатом входном сигнале для системы (14) с параметрами настройки (10), (26) при интегральном законе управления без приводов и с приводами, а также для редуцированной системы с приводами и коррекцией по методу корневого годографа коэффициента  $k_i$  и одновременно определяемым по формуле (36) коэффициентом  $k_\gamma$ :

$$k_i = \frac{0,14}{k_{\omega_x} T_{\omega_x}^2} = 0,418, \quad k_\gamma = 0,603. \quad (37)$$

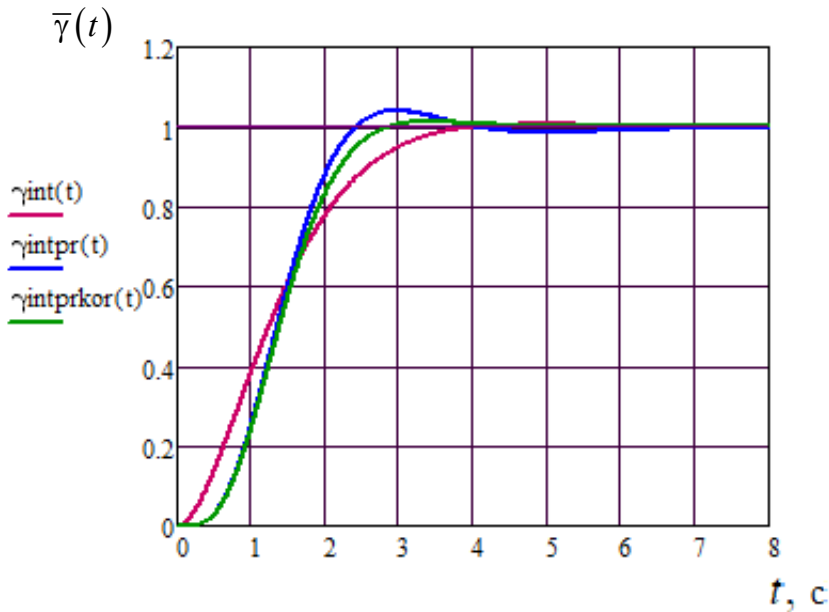


Рис. 7. Переходные процессы полной системы поперечного управления креном в интегральном варианте исполнения:

$\gamma_{int}(t)$  — малиновый цвет (в идеальном варианте),  $\gamma_{intpr}(t)$  — синий цвет (с приводами),  $\gamma_{intprkor}(t)$  — зеленый цвет (с приводами и коррекцией коэффициента  $k_i$ ,  $k_\gamma$ )

Сравнительный анализ (рис. 7) показал, что в целом привода не оказывают существенного влияния на динамические характеристики синтезированной системы обработки крена. При работе привода САУ и силового привода самолета перерегулирование достигло 4%, а после снижения коэффициента интеграла и компенсирующего коэффициента до величины (37) перерегулирование снизилось до 1,2% без существенного изменения времени регулирования. Таким образом, возможна коррекция полученных настроек астатического контура для снижения влияния динамики приводов на точность управления по крену.

В результате получен способ синтеза комбинированного быстродействующего высокоточного контура выхода самолета на заданный крен с использованием поперечного канала управления, обладающего свойством астатизма по возмущению. Применение синтеза по методу обратной задачи модального управления позволяет аналитически устанавливать зависимость настройки коэффициентов законов управления от динамических параметров контура угловой скорости вращения свободного самолета по крену, в том числе с учетом динамических характеристик приводов.

## Литература

1. *Байбородин Ю. В., Драбкин В. В., Сменковский Е. Г., Унгуриян С. Г.* Бортовые системы управления полетом. – М.: Транспорт, 1975. – 336 с.
2. *Михалев И. А., Окоёмов Б. Н., Чукулаев М. С.* Системы автоматического управления самолетом 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1987. – 240 с.
3. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Системы автоматического управления самолетом. Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1965. – 464 с.
4. *Куликов В. Е.* Решение обратной задачи модального управления при синтезе регулятора минимальной размерности для режима стабилизации вертикальной скорости полета самолета. // Навигация и управление летательными аппаратами. – М.: МИЭА, 2022. – Вып. 38. – С. 39–59.
5. *Ефремов А. В., Захарченко В. Ф., Овчаренко В. Н.* и др., под ред. Г. С. Бюшгенса. Динамика полета. – М.: Машиностроение, 2011. – 776 с., ил.
6. *Гуськов Ю. П., Загайнов Г. И.*, под ред. Г. В. Александрова. Управление полетом самолетов – М.: Машиностроение. 1992. – 213 с., ил.
7. Автоматизированное управление самолетами и вертолетами. Под ред. С. М. Федорова. – М.: Транспорт, 1977. – 246 с.
8. *Куликов В. В.* Пропорционально-интегральный регулятор с позиционным компенсатором в продольном канале системы автоматического управления самолетом. // Навигация и управление летательными аппаратами. – М.: МИЭА, 2019. – Вып. 25. – С. 70–83.
9. *Кочетков Ю. А.* Основы автоматики авиационного оборудования. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1975. – 454 с.
10. *Удерман Э. Г.* Метод корневого годографа в теории автоматического управления. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 112 с.