

УДК 629.7.05

ШЕСТНАДЦАТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА. МОДИФИКАЦИЯ 1

Юрий Павлович НИКОЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук, с. н. с.
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: aomiea@aviapribor.ru

Предлагается модификация нерешенной к настоящему времени шестнадцатой проблемы Гильберта. Рассматривается область устойчивости на плоскости пары коэффициентов характеристического уравнения динамической системы произвольного порядка. Доказывается, что анализируемая область устойчивости является выпуклым множеством.

Ключевые слова: Шестнадцатая проблема Гильберта, трактовка В. И. Арнольда, алгебраическая кривая, полиномы Эрмита – Билера, критерий Михайлова, годограф, выпуклость области устойчивости.

HILBERT SIXTEENTH PROBLEM. MODIFICATION I

Yury P. NIKOLAEV, D. Sc. in Phys and Math
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: aomiea@aviapribor.ru

The article proposes a modification of currently unsolved Hilbert sixteenth problem. It considers the stability domain on the plane of a pair of coefficients of random dynamic system characteristic equation. It is proved that the analyzed stability domain is a convex set.

Keywords: Hilbert sixteenth problem, V. I. Arnold interpretation, algebraic curve, Hermite-Biehler polynomials, Michailov criterion, hodograph, stability domain convexity.

1. Введение

Проблемы Гильберта [1, 2] — список из 23 кардинальных проблем математики, представленный Давидом Гильбертом на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Тогда эти проблемы (охватывающие основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, группы Ли, вещественный и комплексный анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и теорию вероятностей, а также вариационное исчисление) не были решены.

На данный момент решены 17 проблем из 23.

Шестнадцатая проблема Гильберта — одна из нерешенных к настоящему времени задач. Исходно она называлась «Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей» (Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen).

В настоящей работе используется следующая трактовка задачи — см. [3].

Пусть f — полином (с вещественными коэффициентами) степени n от двух переменных x и y .

Вопрос Гильберта состоит в том, чтобы исследовать, какое топологическое строение может иметь алгебраическая кривая, заданная на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x и y уравнением $f(x, y) = 0$.

Определение. Алгебраическая кривая, или плоская алгебраическая кривая — это геометрическое место (множество) точек на плоскости $(O; x, y)$, которое определяется как множество нулей полинома от двух переменных. Степенью (или порядком) n этой кривой называется степень указанного полинома.

2. Анализ геометрии многомерной области устойчивости. Сечение области устойчивости линейным многообразием

Характеристическое уравнение замкнутой системы управления с обратной связью:

$$P(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n, \quad a_n > 0. \quad (2.1)$$

Анализ выпуклости многомерной области устойчивости (множества устойчивых полиномов) в пространстве коэффициентов этого уравнения, наряду с анализом других существенных геометрических (топологических) ее характеристик, продолжает оставаться актуальной и в то же время сравнительно малоизученной проблемой (см., например, [4–10]).

Коротко об известной информации по данной проблеме. Многомерная область устойчивости «в целом» не является выпуклой.

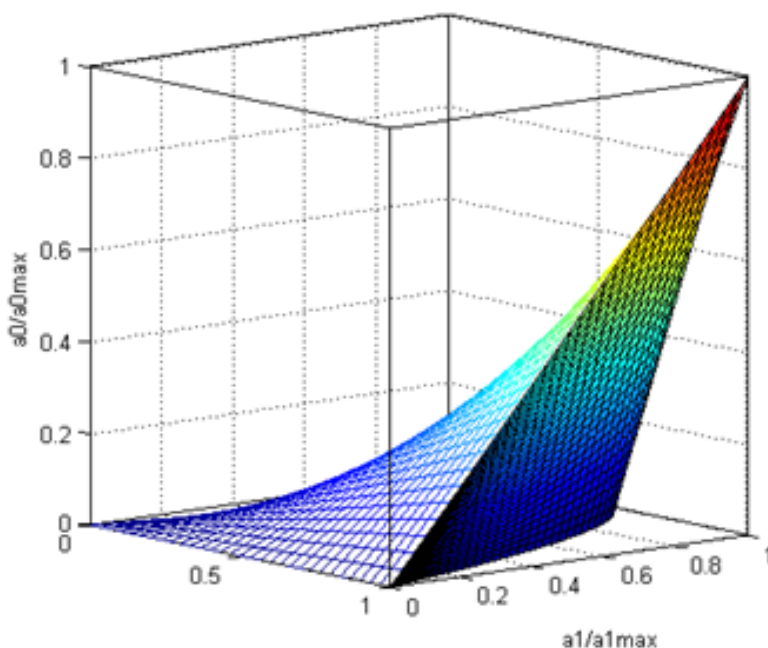


Рис. 2.1. Область устойчивости в пространстве коэффициентов $a_0, a_1, a_2, n = 5$

Сечения этой многомерной области линейными многообразиями могут быть, по-видимому, как невыпуклыми, так и выпуклыми, в зависимости от «типа» секущего линейного многообразия.

Во всяком случае, этот факт отмечался в работах [4, 5] для полиномов относительно невысокого порядка ($n \leq 6$).

Область устойчивости на комплексной плоскости *свободного коэффициента* характеристического полинома (при фиксированных значениях остальных коэффициентов) является выпуклым множеством [11].

Естественным представляется вопрос об исследовании связности и выпуклости *произвольных* двумерных сечений многомерной области устойчивости для полиномов *произвольного* порядка. Решение этой задачи рассматривается в данном разделе.

Покажем, что область устойчивости на двумерной плоскости сечения (плоскости x, y) в общем случае может быть и несвязным, и невыпуклым множеством.

а) Пусть задана трехмерная область устойчивости в пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2 полинома $P(s)$ произвольного порядка; остальные коэффициенты фиксированы: $a_r \in R_+, r = 3, \dots, n$.

Требуется построить и проанализировать сечение этой области плоскостью, заданной уравнением в отрезках:

$$-\frac{a_0}{A_0} + \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} = 1, \quad A_0, A_1, A_2 \in R_+. \quad (2.2)$$

Граничная кривая сечения описывается следующей системой уравнений:

$$a_0 - a_2\Omega = F_0, \quad (2.3)$$

$$a_1 = F_1, \quad (2.4)$$

$$-\frac{a_0}{A_0} + \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} = 1, \quad (2.5)$$

где обозначено

$$F_0 = -a_4\Omega^2 + a_6\Omega^3 - a_8\Omega^4 + \dots, \quad F_1 = a_3\Omega - a_5\Omega^2 + a_7\Omega^3 - \dots$$

Имеем три уравнения, три неизвестных коэффициента a_0, a_1, a_2 и параметр Ω . Так как коэффициент a_1 определяется непосредственно как функция параметра Ω из уравнения (2.4), мы имеем фактически систему из двух уравнений (2.3), (2.5). Поэтому решение можно представить в виде:

$$a_1 = F_1, \quad a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (2.6)$$

Определители системы (2.6) равны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\Omega \\ -\frac{1}{A_0} & \frac{1}{A_2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} F_0 & -\Omega \\ 1 - \frac{F_1}{A_1} & \frac{1}{A_2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & F_0 \\ -\frac{1}{A_0} & 1 - \frac{F_1}{A_1} \end{vmatrix}.$$

Решая указанную систему уравнений, получим:

$$a_0 = \frac{A_0(\Omega + F_0/A_2 - \Omega F_1/A_1)}{(A_0/A_2) - \Omega},$$

$$a_1 = F_1 = a_3\Omega - a_5\Omega^2 + \dots,$$

$$a_2 = \frac{A_0 + F_0 - F_1 A_0 / A_1}{(A_0/A_2) - \Omega},$$

где $\Omega = \omega^2$.

Полученные формулы позволяют, изменяя ω от 0 до ω_{\max} , получить и проанализировать D -разбиение сечения трехмерного пространства плоскостью (2.2). «Ключом» к анализу особенностей геометрии сечения области устойчивости плоскостью является условие $\Delta = 1/A_2 - \Omega/A_0 = 0$, откуда следует, что сингулярное значение переменной Ω равно: $\Omega = A_0/A_2$. Этому сингулярному значению переменной Ω соответствует следующее критическое значение a_1 :

$$a_1^{\text{КРИТ}} = a_3 \frac{A_0}{A_2} - a_5 \frac{A_0^2}{A_2^2} + \dots = \text{const.} \quad (2.8)$$

То есть мы получили уравнение особой прямой на плоскости (уравнение плоскости в трехмерном пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2). Можно показать, что по обе стороны от этой прямой располагаются подобласти устойчивости, то есть область устойчивости состоит, по меньшей мере, из двух отдельно расположенных подобластей, следовательно, область устойчивости — несвязное множество.

В качестве иллюстрации этого положения рассмотрим сечение области устойчивости плоскостью (2.2), точнее — проекцию сечения на координатную плоскость a_1, a_2 для частного случая $n = 5$ (см. рис. 2а). Как следует из рисунка, в данном случае область устойчивости является несвязным множеством, она состоит из двух областей, разделенных особой прямой $a_1 = a_1^{\text{КРИТ}}$ (пунктир).

Особая прямая является асимптотой для двух ветвей D -кривой: при $\Omega \rightarrow A_0/A_2$ (слева или справа) коэффициент a_2 в соответствии с формулой (2.6) стремится к плюс (минус) бесконечности.

б) Рассматривается характеристический полином $P(s) = a_0 + a_1s + \dots + \dots + a_5s^5$ и соответствующая ему область устойчивости в пространстве a_0, a_1, a_2 . Требуется построить сечение этой области плоскостью, заданной соотношением $a_1 = a_2 \sup a_1 / \sup a_2 = a_2 a_3 / 4a_4$. Изображение сечения представлено на рис. 2.2б. Координаты характерных точек P_1, P_2 на рис. 2.2б: $a_0(P_1) = \sup a_0 = a_3^2 a_4 / 4a_5^2$, $a_1(P_1) = \sup a_1 = a_3^2 / 4a_5$; $a_0(P_2) = 0$, $a_1(P_2) = (a_3 - a_4)a_4 / a_5$.

Представленный рисунок иллюстрирует существенную невыпуклость сечения.

Точка P_1 на рис. 2.2б имеет некоторые отличия от остальных характерных точек кривой. Она является *особой* точкой, так как в ней одновременно выполняются два условия: $da_0(x) = 0$ и $da_1(x) = 0$. Точнее, это — *касп* (англ. *cusp* — заострение) или *точка возврата* — точка, в которой граничная кривая разделяется на две ветви, имеющие в этой точке одинаковый направляющий вектор.

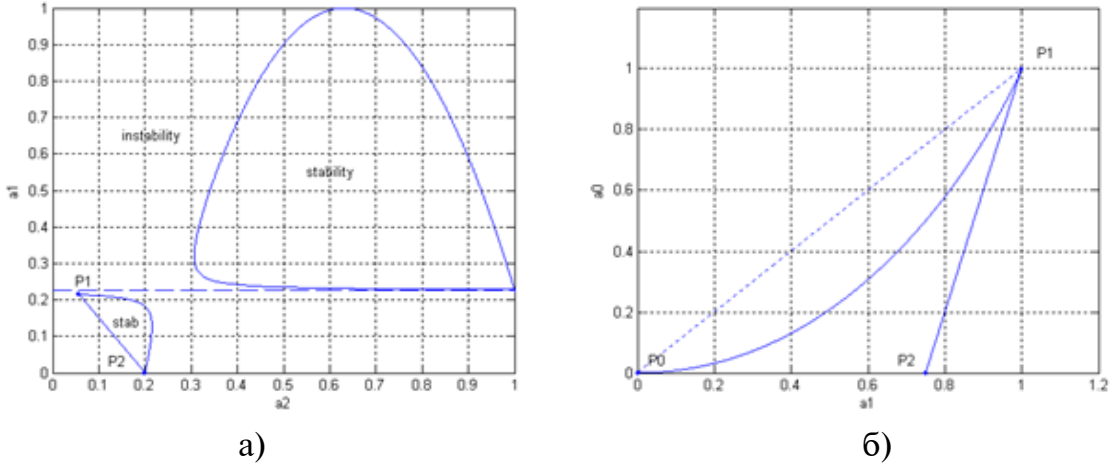


Рис. 2.2. Сечение трехмерной области устойчивости ($n = 5$) плоскостями разного типа

3. Сечение многомерной области устойчивости плоскостью коэффициентов a_0, a_1 характеристического полинома $P(s)$

Пусть два коэффициента a_{2q}, a_{2q+1} , $q = 0, 1, \dots$ уравнения (2.1) являются переменными величинами, а остальные коэффициенты фиксированы.

В пространстве коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n рассматриваемому случаю будет соответствовать плоскость $P_2 := \{a_r = \text{const} \mid r = 0, 1, \dots, r \neq 2q, 2q + 1q = 0, 1, \dots\}$.

Результатом сечения многомерной области устойчивости рассматриваемой плоскостью будет двумерная область устойчивости на плоскости, координатные оси которой параллельны базовым координатным осям a_{2q}, a_{2q+1} .

Выбор плоскости коэффициентов a_{2q}, a_{2q+1} для анализа геометрии многомерной области устойчивости — сложная задача.

В данной работе выбрана плоскость коэффициентов a_0, a_1 .

Теорема 3.1. Область устойчивости на плоскости коэффициентов полинома является выпуклым множеством.

Лемма 3.2. Необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является устойчивость вспомогательного полинома

$$\hat{P}(s) = (a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \dots) + s(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + \dots).$$

Отметим, что порядок вспомогательного полинома $\hat{P}(s)$ равен $n - 2$.

Доказательство этих двух взаимосвязанных утверждений проведем в несколько этапов.

Этап 1. Исходные данные

При мнимом значении аргумента $s = j\omega$ получим из (1.1):

$$P(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots) = u(\omega) + jv(\omega), \quad (3.1)$$

где обозначено

$$u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots, \quad v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \quad (3.2)$$

Используем полиномы Эрмита–Билера $U(\omega^2), V(\omega^2)$ от переменной $\Omega = \omega^2$, см. [12]:

$$\begin{aligned} U(\Omega) = U(\omega) &= a_0 - a_2\Omega + a_4\Omega^2 - \dots, \\ V(\Omega) = V(\omega) / \omega &= a_1 - a_3\Omega + a_5\Omega^2 - \dots, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Omega = \omega^2.$$

Тогда (3.1) примет вид: $P(j\omega) = U(\omega^2) + j\omega V(\omega^2) = U(\Omega) + j\sqrt{\Omega} V(\Omega)$. Отметим, что порядок полиномов $U(\omega^2), V(\omega^2)$ вдвое (примерно вдвое) меньше порядка полиномов $U(\omega), V(\omega)$, что, естественно, облегчает последующие выкладки.

Так как функция $P(j\omega)$ задается параметрическими уравнениями $x = U(\omega), y = V(\omega)$ с параметром ω , то ее аргумент также может быть представлен в параметрическом виде: $\arg P(\omega)$. При этом

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{U(\omega)}{V(\omega)}. \quad (3.3)$$

Для полинома $P(s)$ аргумент $\arg P(\omega)$ называется также *фазовой функцией полинома*, а график этой функции — *фазовой характеристикой полинома* [12, стр. 25]. Фазовая функция описывает, как вращается радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики $P(j\omega)$ при изменении ω .

Теорема 3.3 [10]. Следующие условия эквивалентны:

- 1) полином $P(s)$ гурвицев.
- 2) годограф $P(j\omega)$ проходит через n квадрантов последовательно, начиная с первого, не проходя через начало координат (*критерий Михайлова* [13]).
- 3) аргумент годографа $\arg P(\omega)$ определен, монотонно возрастает и меняется от 0 до $\pi n / 2$.

4) полиномы $U(\Omega)$ $V(\Omega)$ имеют только положительные вещественные корни, которые перемежаются, то есть найдутся $0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \dots$ такие, что $U(\Omega_1) = U(\Omega_3) = \dots = 0$, $V(\Omega_2) = V(\Omega_4) = \dots = 0$, и, кроме того, $U(0) > 0$ (*критерий Эрмита – Билера для вещественных полиномов*).

Лемма 3.4. [12, стр. 43]. Фазовая функция $\varphi(\omega)$ произвольного полинома $P(s)$ в любой точке ω имеет производную. Эта производная выражается формулой

$$\varphi'(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[\arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right] = \frac{v'(\omega)u(\omega) - v(\omega)u'(\omega)}{v^2(\omega) + u^2(\omega)}. \quad (3.4)$$

Формула справедлива для всех значений ω , не являющихся корнями вспомогательного полинома $u(\omega)$.

Этап 2. Вспомогательная кривая (кривая Эрмита – Билера) и ее свойства

Введем в рассмотрение комплексную функцию, действительная и мнимая части которой являются полиномами Эрмита – Билера: $P(j, \Omega) = U(\Omega) + jV(\Omega)$. Как отмечалось выше, полиномы $U(\Omega)$, $V(\Omega)$ для гурвицева полинома $P(s)$ имеют только положительные вещественные корни, которые перемежаются, то есть найдутся $0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \dots$ такие, что $U(\Omega_1) = U(\Omega_3) = \dots = 0$, $V(\Omega_2) = V(\Omega_4) = \dots = 0$, и, кроме того, $U(0) > 0$.

Годограф функции $P(j\Omega)$ можно назвать *кривой Эрмита – Билера* по аналогии с известной кривой Михайлова.

P. S. Годографом функции $P(j\omega)$ называется кривая, описываемая точкой $P(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от 0 до ∞ .

Годограф (англ. *Hodograph*, от греческих слов «ὁδός» – «путь» и «γράφω» – «пишу») — кривая, соединяющая концы вектора переменной величины (скорости, ускорения, силы и так далее), отложенного в разные моменты времени от одной точки. Впервые понятие годографа было введено в 1846 году ирландским математиком, механиком, физиком-теоретиком, сэром Гамильтоном.

Сравнивая функцию $P(j, \Omega) = U(\Omega) + jV(\Omega)$ с функцией $P(j\omega) = U(\Omega) + j\omega V(\Omega)$, убедимся, что единственное отличие между ними — отсутствие (наличие) множителя ω во втором слагаемом. Поэтому естественно, что основные свойства годографов обеих функций аналогичны. Для последующих выкладок существенно, что

- годограф $P(j\omega)$ проходит через n квадрантов *последовательно*, начиная с первого, не проходя через начало координат (как и кривая Михайлова).

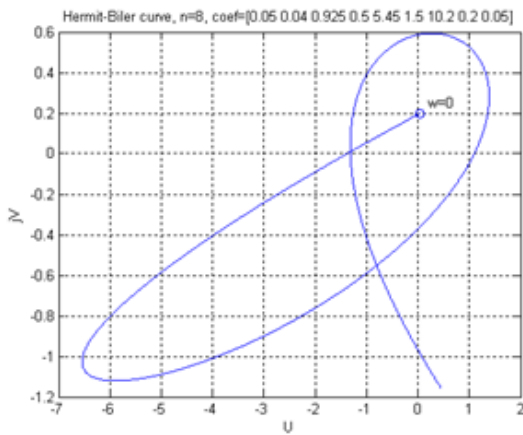
• значения параметра Ω , соответствующие точкам пересечения кривой Эрмита – Билера с координатными осями, идентичны соответствующим значениям того же параметра Ω для кривой Михайлова (у кривой Михайлова есть одна «дополнительная» точка пересечения с осью абсцисс при $\omega = 0$).

• аргумент годографа $\arg P(\omega)$ определен, *монотонно* возрастает и меняется от $\varphi_0 = \arctg(a_1/a_0)$ до $\pi(n-1)/2$.

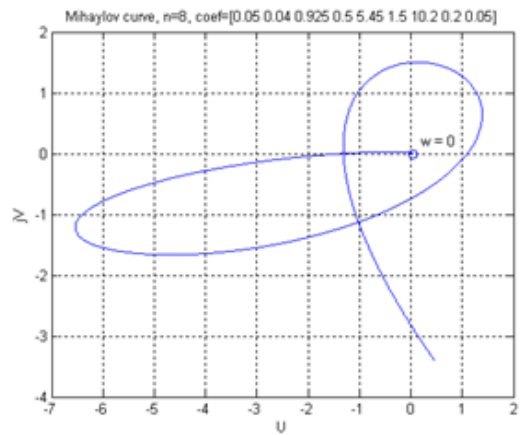
• **Лемма 3.5.** Фазовая характеристика $\varphi(\Omega)$ для функции $P(j\omega)$ в любой точке Ω имеет производную. Эта производная выражается формулой

$$\varphi'(\Omega) = \left(\arctg \frac{V(\Omega)}{U(\Omega)} \right)' = \frac{V'(\Omega)U(\Omega) - V(\Omega)U'(\Omega)}{V^2(\Omega) + U^2(\Omega)}. \quad (3.5)$$

Формула справедлива для всех значений Ω , не являющихся корнями вспомогательного полинома $U(\Omega)$.



а)



б)

Рис. 3.1. Кривая Эрмита – Билера (а) и кривая Михайлова (б) для полинома $P(s)$, $n = 8$

В качестве иллюстрации на рис. 3.1 представлены:

а) кривая Эрмита – Билера $P(j\omega)$ и б) кривая Михайлова $p(j\omega)$ для конкретного полинома ($n = 8$).

Этап 3. Вспомогательный полином степени $n = 2$ и его свойства

Выполним дифференцирование многочленов Эрмита – Билера по параметру Ω и обозначим:

$$\hat{U} = -U'(\Omega) = a_2 - 2a_4\Omega + 3a_6\Omega^2 - \dots, \quad \hat{V} = -V'(\Omega) = a_3 - 2a_5\Omega + 3a_7\Omega^2 - \dots \quad (3.6)$$

Утверждение 3.6. Полиномы $\hat{U} = -U'(\Omega)$ $\hat{V} = -V'(\Omega)$ имеют (для гурвицева полинома $P(s)$ только положительные вещественные корни, которые перемежаются, то есть найдутся $0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \dots$ такие, что $\hat{U}(\Omega_1) = \hat{U}(\Omega_3) = \dots = 0$, и, кроме того, $\hat{U}(0) > 0$.

Доказательство утверждения начнем с анализа корней полинома \hat{U} . Покажем, что для гурвицева полинома $P(s)$ эти корни вещественны и положительны. Для этого рассмотрим полином $U(\Omega) = u(\omega) = a_0 - a_2\Omega + a_4\Omega^2 - \dots$. Обозначим порядок полинома $U(\Omega)$ через m . В соответствии с критерием Эрмита – Билера, все m корней этого полинома для гурвицева полинома $P(s)$ вещественны и положительны.

Полином $\hat{U} = -U'(\Omega)$ является производной от полинома $U(\Omega)$ (изменение знака для последующих выкладок не имеет значения).

По теореме Ролля, между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится по меньшей мере один корень ее производной. Следовательно, между m корнями полинома $U(\Omega)$ должно содержаться по меньшей мере $(m - 1)$ корней его производной $\hat{U} = -U'(\Omega)$.

Но производная $\hat{U} = -U'(\Omega)$ как полином $(m - 1)$ -го порядка имеет всего $(m - 1)$ корней. Следовательно, все корни полинома \hat{U} для гурвицева полинома $P(s)$ вещественны и положительны.

Аналогичные выкладки можно сделать и для полинома $\hat{V} = -V'(\Omega)$.

Доказательство чередования корней полиномов $\hat{U} = -U'(\Omega)$, $\hat{V} = -V'(\Omega)$ следует из анализа геометрии годографа $P(j\omega)$ — см. рис. 3.1а.

Выполнение условия $\hat{U}(0) > 0$ эквивалентно выполнению очевидного неравенства $a_2 > 0$. Утверждение доказано.

Сформируем вспомогательный полином степени $n - 2$:

$$\hat{P}(s) = (a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \dots) + s(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + \dots),$$

для которого полиномы Эрмита – Билера равны \hat{U}, \hat{V} — см. (3.6).

На основании критерия Эрмита – Билера убедимся, что сформированный полином $\hat{P}(s)$ устойчив.

Для устойчивого полинома $\hat{P}(s)$ сформируем функцию Эрмита – Билера.

$$\hat{P}(j\Omega) = \hat{U}(\Omega) + j\hat{V}(\Omega).$$

Аргумент годографа $\arg \hat{P}(\omega)$ определен и монотонно возрастает. Фазовая характеристика $\varphi(\Omega)$ для функции $\hat{P}(j\omega)$ в любой точке Ω имеет производную.

Эта производная выражается формулой

$$\varphi'(\Omega) = \left(\operatorname{arctg} \frac{\widehat{V}(\Omega)}{\widehat{U}(\Omega)} \right)' = \frac{\widehat{V}'(\Omega)\widehat{U}(\Omega) - \widehat{V}(\Omega)\widehat{U}'(\Omega)}{\widehat{V}^2(\Omega) + \widehat{U}^2(\Omega)}. \quad (3.7)$$

Формула справедлива для всех значений Ω , не являющихся корнями вспомогательного многочлена $\widehat{U}(\Omega)$.

Для монотонно возрастающей функции производная положительна, поэтому справедливо неравенство $\widehat{V}'(\Omega)\widehat{U}(\Omega) - \widehat{V}(\Omega)\widehat{U}'(\Omega) > 0$.

Этап 4. Предварительные результаты

Из приведенных выше данных следует

Лемма 3.5. Следующие условия эквивалентны:

1. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является непустым множеством.
2. Полином $(n - 2)$ -го порядка

$$\widehat{P}(s) = (a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \dots) + s(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + \dots)$$

устойчив.

3. Выполняется неравенство

$$\widehat{V}'(\Omega)\widehat{U}(\Omega) - \widehat{V}(\Omega)\widehat{U}'(\Omega) > 0, \quad (3.8)$$

где

$$\widehat{U} = a_2 - 2a_4\Omega + 3a_6\Omega^2 - \dots, \quad \widehat{V} = a_3 - 2a_5\Omega + 3a_7\Omega^2 - \dots, \quad \Omega = \omega^2. \quad (3.9)$$

Пример 2. Пусть $n = 5$. В соответствии с Леммой 3.1, необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости a_0, a_1 является устойчивость полинома $\widehat{P}(s) = a_2 + a_3s + 2a_4s^2 + 2a_5s^3$, то есть выполнение неравенства $a_2 < a_3a_4 / a_5$.

Пример 3. Пусть $n = 6$. Тогда, в соответствии с (3.8), необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости a_0, a_1 является устойчивость полинома $\widehat{P}(s) = a_2 + a_3s + 2a_4s^2 + 2a_5s^3 + 3a_6s^4$, то есть выполнение неравенства

$$a_2 < \frac{a_3}{a_5} \left(a_4 - \frac{3}{4} \frac{a_3a_6}{a_5} \right).$$

Этап 5. Кривая D -разбиения и область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 . Общие положения

Для построения области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ воспользуемся известным методом D -разбиения [4]. Граничная кривая D -разбиения находится из характеристического уравнения $P(s) = 0$ после подстановки $s = j\omega$:

$$P(j\omega, a_0, a_1) = 0, \quad (3.10)$$

где a_0, a_1 — искомые переменные, а ω — параметр, принимающий произвольные вещественные значения. Комплексное уравнение (3.8) разбивается на два вещественных уравнения:

$$\operatorname{Re} P(j\omega, a_0) = 0, \quad \operatorname{Im} P(j\omega, a_1) = 0, \quad (3.11)$$

где $\operatorname{Re} P(j\omega, a_0), \operatorname{Im} p(j\omega, a_1)$ — вещественная и мнимая части $p(j\omega)$.

Рассматривая ω как заданную величину, решим уравнения (3.11) относительно a_0 и a_1 :

$$a_0(\Omega) = a_2\Omega - a_4\Omega^2 + a_6\Omega^3 - \dots, \quad a_1(\Omega) = a_3\Omega - a_5\Omega^2 + a_7\Omega^3 - \dots, \quad (3.12)$$

где обозначено $\Omega = \omega^2 \in [0, \infty], \in [0, \infty]$

Придавая параметру Ω различные значения в пределах от 0 до ∞ , построим граничную кривую D -разбиения плоскости a_0, a_1 .

Пример 4. В качестве иллюстрации на рис. 3.2 приведена D -кривая для конкретного полинома восьмого порядка.

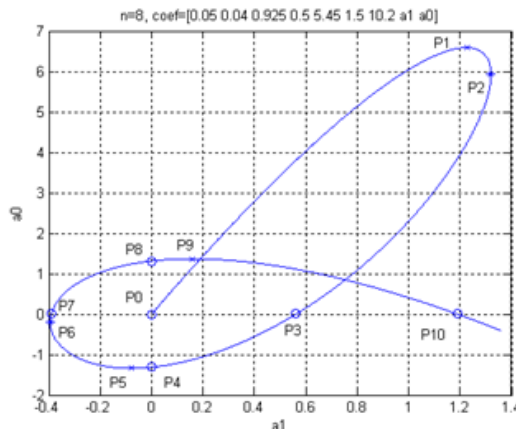


Рис. 3.2. D -кривая для конкретного полинома $P(s)$, $n = 8$

На рис. 3.2 отмечены следующие характерные точки D -кривой:

- точки пересечения кривой с координатной осью a_1 (точки P_0, P_3, P_7, P_{10}) и с координатной осью a_0 (точки P_0, P_4, P_9),
- точки, в которых касательная к кривой параллельна оси a_1 (точки P_1, P_5, P_9) и оси a_0 (точки P_2, P_6).

Этап 6. Условие выпуклости кривой D -разбиения

Рассматривается гладкая кривая D -разбиения плоскости a_0, a_1 , являющаяся графиком непрерывной функции $a_0 = f(a_1)$.

Функция $a_0 = f(a_1)$ задана *параметрически* равенствами (3.12), где ω — параметр. Вспомогательные функции $a_0(\omega), a_1(\omega)$ в (3.11) имеют непрерывные, одновременно не равные нулю производные. Первая производная функции $a_0 = f(a_1)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{da_0}{da_1} = \frac{da_0/d\Omega}{d\Omega/da_1} = \frac{da_0/d\Omega}{da_1/d\Omega}. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) выражает производную от функции $a_0 = f(a_1)$ в *параметрическом виде*. Вторая производная функции $a_0 = f(a_1)$, выраженная в параметрическом виде, может быть представлена следующим соотношением:

$$\left(\frac{d^2 a_0(a_1)}{da_1^2} \right) = \frac{d}{da_1} \left(\frac{da_0(a_1)}{da_1} \right) = \frac{d}{da_1} \left(\frac{da_0/d\Omega}{da_1/d\Omega} \right) = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{da_0/d\Omega}{da_1/d\Omega} \right) \frac{d\Omega}{da_1}. \quad (3.14)$$

Коротко о терминологии. Кривая $a_0 = f(a_1)$ в точке (a_0, a_1) обращена *выпуклостью вверх*, если существует такая окрестность точки (a_0, a_1) , что часть кривой, соответствующая этой окрестности, лежит *под* касательной к этой кривой, проведенной в анализируемой точке. Кривая $a_0 = f(a_1)$ в точке (a_0, a_1) обращена *выпуклостью вниз*, если существует такая окрестность точки (a_0, a_1) , что часть кривой, соответствующая этой окрестности, лежит *над* касательной к этой кривой, проведенной в анализируемой точке.

Будем называть кривую $a_0 = f(a_1)$ *выпуклой вверх (вниз)* в интервале $(a_{1,1}, a_{1,2})$, если она *выпукла вверх (вниз)* в каждой точке этого интервала.

Теорема 3.6. Пусть $a_0 = f(a_1)$ дифференцируема на $(a_{1,1}, a_{1,2})$. Если во всех точках интервала $(a_{1,1}, a_{1,2})$ вторая производная функции $a_0 = f(a_1)$ отрицательная, то есть $f''(a_1) < 0$, то график функции на этом интервале *выпуклый вверх (выпуклый)*, если же $f''(a_1) > 0$ — *выпуклый вниз (вогнутый)*.

Говорят, что параметр Ω ориентирует данную D -кривую. На ней можно нанести стрелку, указывающую общее направление движения точки $P(\Omega)$ при возрастании Ω . Так, D -кривая на приведенном выше рис. 3.2 начинается при ($\Omega=0$) в точке P_0 (в точке начала координат), дальнейшему увеличению параметра Ω соответствуют точки $P_1, P_2, \dots, P_{10}, \dots$

Вернемся к кривой D -разбиения для общего случая с параметрическими уравнениями (3.12). Продифференцируем эти уравнения по параметру Ω :

$$\frac{da_0(\Omega)}{d\Omega} = \hat{U}(\Omega), \quad \frac{da_1(\Omega)}{d\Omega} = \hat{V}(\Omega), \quad (3.15)$$

где $\hat{U} = a_2 - 2a_4\Omega + 3a_6\Omega^2 - \dots$, $\hat{V} = a_3 - 2a_5\Omega + 3a_7\Omega^2 - \dots$, $\Omega = \omega^2$.

С учетом свойств полиномов $\hat{U}(\Omega), \hat{V}(\Omega)$, справедливо следующее положение.

Утверждение 3.7. Если область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является непустым множеством, то все корни уравнений $\frac{da_0(\Omega)}{d\Omega} = 0, \frac{da_1(\Omega)}{d\Omega} = 0$ положительны.

Обозначим корни уравнения $\frac{da_1(\Omega)}{d\Omega} = 0$ через $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \dots$, где $0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 < \Omega_4 < \dots$. Предположим, что на интервалах $(0, \Omega_1), (\Omega_2, \Omega_3), \dots, (\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}), \dots, m = 0, 1, 2, \dots$ числовой оси параметра Ω график функции $a_0 = f(a_1)$ выпуклый вверх, а на интервалах $(\Omega_1, \Omega_2), (\Omega_3, \Omega_4), \dots, (\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2}), \dots, m = 0, 1, 2, \dots$ — выпуклый вниз. Достаточное условие для выполнения этого предположения — справедливость двух неравенств:

$$\begin{aligned} f''(a_1) < 0 \text{ при } \Omega \in (\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}), \\ f''(a_1) > 0 \text{ при } \Omega \in (\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Кроме того, для указанных интервалов изменения параметра Ω с учетом свойства ориентированности кривой и сделанного предположения о выпуклости графика функции $a_0 = f(a_1)$ выполняются и следующие неравенства:

$$\begin{aligned} da_1(\Omega) / d\Omega > 0 \text{ при } \Omega \in (\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}), \\ da_1(\Omega) / d\Omega < 0 \text{ при } \Omega \in (\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Вместо *двух* неравенств (3.16) можно получить *одно* тождественное им неравенство. Для этого умножим левые части неравенств на $da_1(\Omega)/d\Omega$. Тогда, с учетом (3.17), имеем для любого интервала $(\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1})$ или $(\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2})$ на числовой оси параметра Ω :

$$\left(\frac{d^2 a_0(a_1)}{da_1^2} \right) \left(\frac{d^2 a_0(a_1)}{da_1^2} \right) \left(\frac{da_1(\Omega)}{d\Omega} \right) < 0. \quad (3.18)$$

Вторая производная в (3.18) определяется формулой (3.13), с учетом (3.6), получим:

$$\left(\frac{d^2 a_0(a_1)}{da_1^2} \right) = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{\hat{U}(\Omega)}{\hat{V}(\Omega)} \right) \frac{1}{\hat{V}(\Omega)} = \frac{\hat{U}'(\Omega)\hat{V}(\Omega) - \hat{U}(\Omega)\hat{V}'(\Omega)}{\hat{V}^3(\Omega)}.$$

Тогда неравенство (3.18) примет вид:

$$\left(\frac{\hat{U}'(\Omega)\hat{V}(\Omega) - \hat{U}(\Omega)\hat{V}'(\Omega)}{\hat{V}^3(\Omega)} \right) \hat{V}(\Omega) < 0 \quad \text{или} \quad \hat{U}'(\Omega)\hat{V}(\Omega) - \hat{U}(\Omega)\hat{V}'(\Omega) < 0.$$

Очевидно, что полученное неравенство $\hat{U}'(\Omega)\hat{V}(\Omega) - \hat{U}(\Omega)\hat{V}'(\Omega) < 0$ тождественно неравенству (3.8). Поэтому справедливо следующее положение.

Лемма 3.11. Если вспомогательный полином $(n - 2)$ -го порядка $\hat{P}(s) = (a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \dots) + s(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + \dots)$ устойчив, то

- область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является непустым множеством;
- для интервалов $(0, \Omega_1), (\Omega_2, \Omega_3), \dots, (\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}), \dots, m = 0, 1, 2, \dots$ числовой оси параметра Ω график D -кривой на плоскости коэффициентов a_0, a_1 , то есть функции $a_0 = f(a_1)$, выпуклый вверх, а для интервалов $(\Omega_1, \Omega_2), (\Omega_3, \Omega_4), \dots, (\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2}), m = 0, 1, 2, \dots$ — выпуклый вниз.

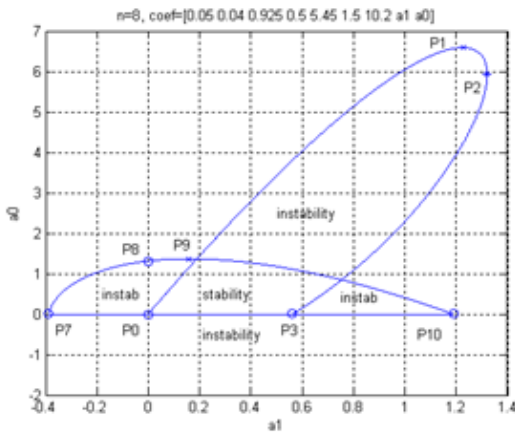
Отметим, что из Леммы 3.11 следует теорема 3.3.

Этап 7. О выпуклости области устойчивости

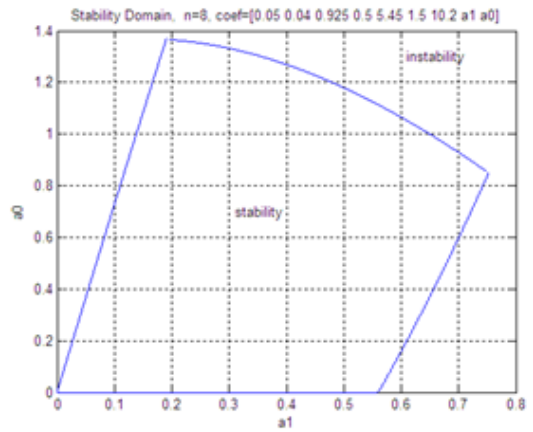
С учетом изложенного, можно показать, что область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 является пересечением нескольких выпуклых множеств, образованных соответствующими участками (дугами) D -кривой и отрезками оси абсцисс (или одними дугами) и поэтому, на основании известной теоремы, является выпуклым множеством.

В качестве примера рассмотрим снова D -кривую на рис. 3.2. На дополнительном рис. 3.3а для этой D -кривой показаны два выпуклых множества, формирующих область устойчивости: одно множество ограничено сверху дугой $P_0P_1P_2P_3$ кривой D -разбиения, а снизу — отрезком P_0P_3 и дугой P_2P_3 ; другое множество ограничено сверху дугой $P_7P_8P_9P_{10}$, а снизу — отрезком P_7P_{10} оси абсцисс.

Пересечение двух выпуклых множеств является выпуклой областью устойчивости (см. рис. 3.3б).



а)



б)

Рис. 3.3. Формирование области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1

Таким образом, основная теорема 3.4 также доказана.

Этап 8. Примеры. Область устойчивости на плоскости коэффициентов (a_0, a_1) , $n = 5$.

Предварительно рассмотрим след области устойчивости на плоскости коэффициентов a_2, a_3 .

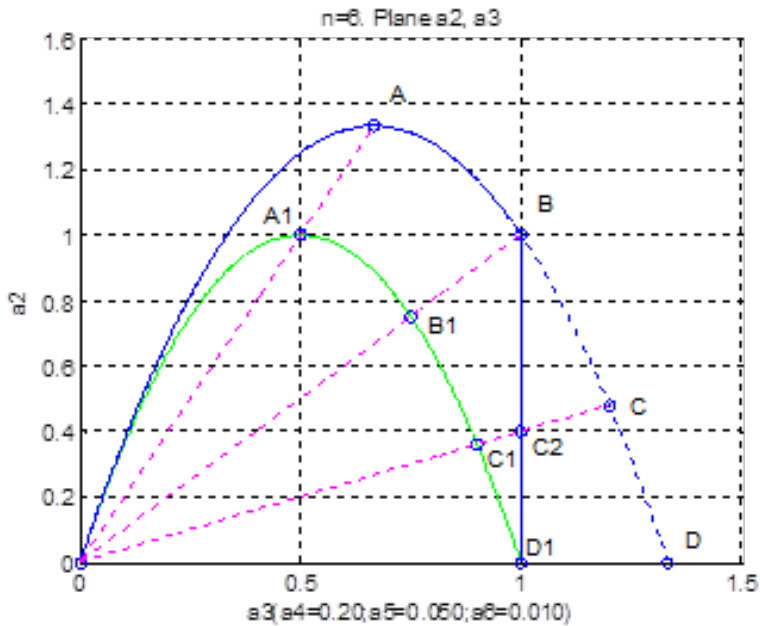
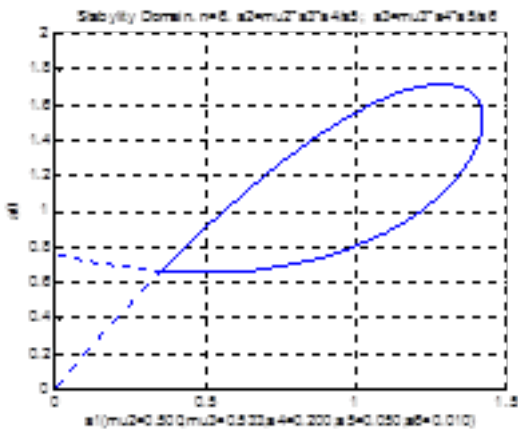
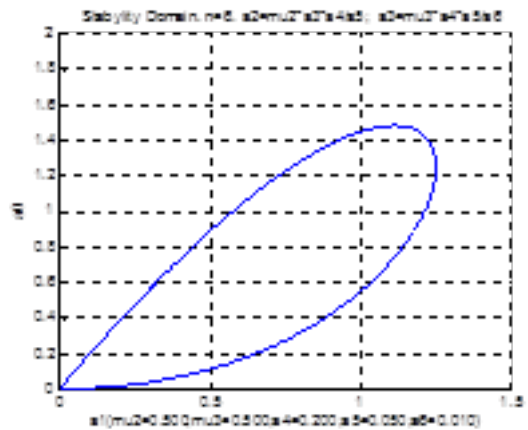


Рис. 3.4. След (синий) и проекция (зеленый) области устойчивости на плоскости коэффициентов a_2, a_3

Выберем на плоскости коэффициентов a_2, a_3 характерные точки и для них построим искомые области устойчивости на плоскости коэффициентов (a_0, a_1) .

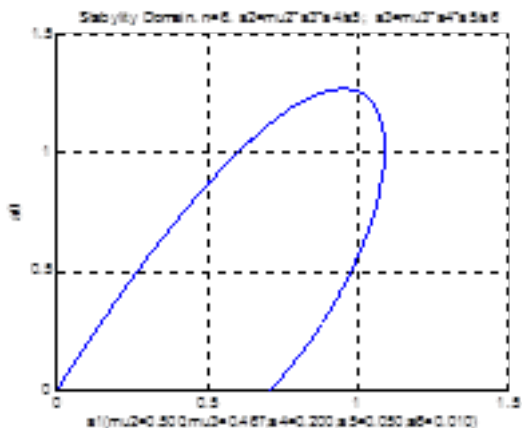


а) $a_3(p_2) = 0,80a_3(A)$

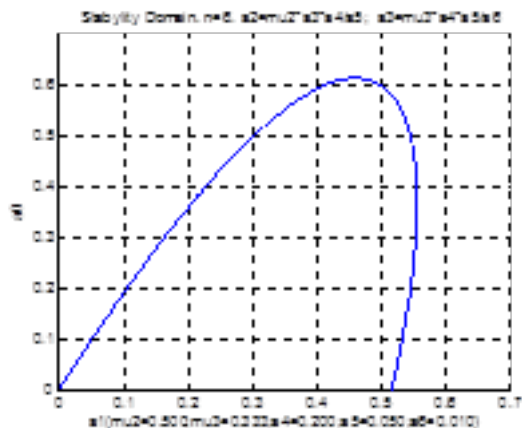


б) $a_3(A_1) = 0,75a_3(A)$

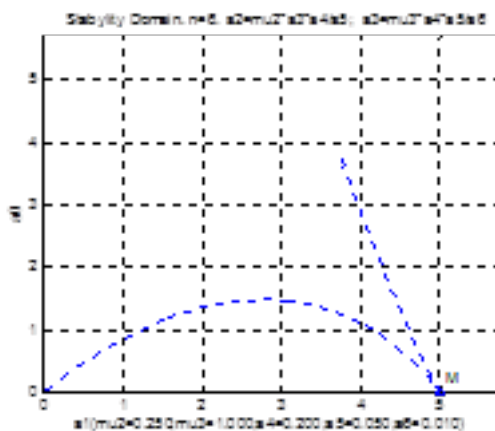
Рис. 3.5. Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для различных значений коэффициентов a_2, a_3



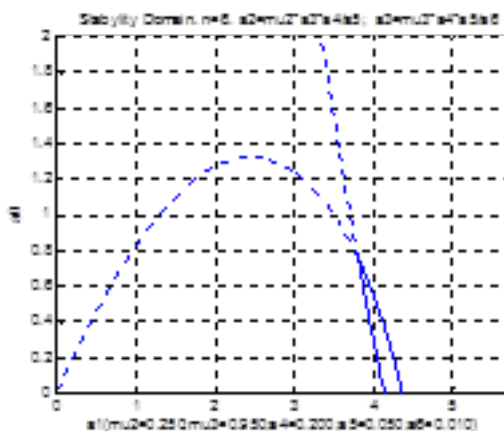
в) $a_3(p_3) = 0,70a_3(A)$



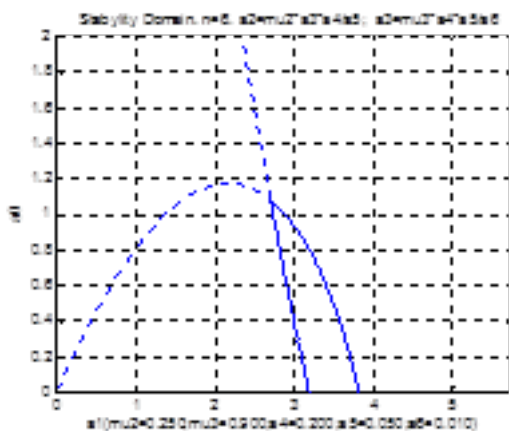
г) $a_3(p_4) = 0,50a_3(A)$



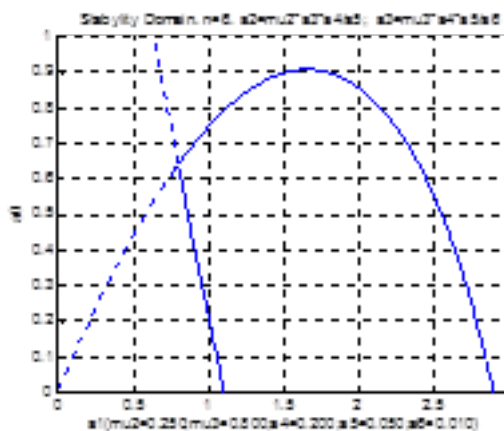
д) $a_3(B) = a_4a_5/a_6$



е) $a_3b_{21} = 0,95a_3(B)$

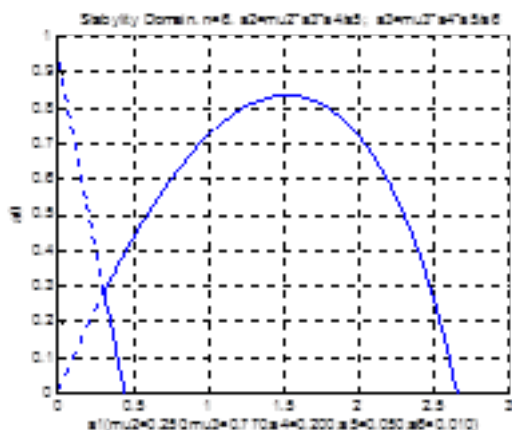


ж) $a_3b_{22} = 0,90a_3(B)$

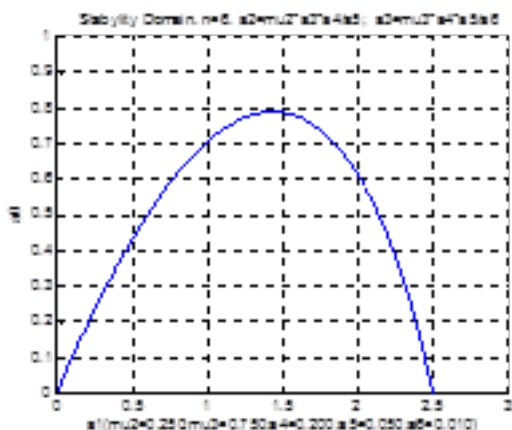


з) $a_3b_{23} = 0,8a_3(B)$

Рис. 3.5 (продолжение). Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для различных значений коэффициентов a_2, a_3



и) $a_3 b_{24} = 0,77 a_3(B)$



к) $a_3(B) = (3/4)a_3(B)$

Рис. 3.5 (окончание). Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для различных значений коэффициентов a_2, a_3

Выводы

- Область устойчивости на плоскости коэффициентов $a_0, a_1, r = 0, 1, \dots$ полинома $P(s)$ является выпуклым множеством.
- Необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является устойчивость вспомогательного полинома

$$\hat{P}(s) = (a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \dots) + s(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + \dots).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Остановимся кратко на устойчивости по Ляпунову и на критериях устойчивости динамических систем с обратной связью, используемых в данной работе.

Первым методом Ляпунова называют метод исследования устойчивости положений равновесия, основанный на анализе линеаризованных уравнений в окрестности положения равновесия.

В основе этого метода лежит следующая теорема.

Теорема П1. Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы лежат слева от мнимой оси, то положение равновесия асимптотически устойчиво, а если среди этих корней имеется хотя бы один, лежащий справа от мнимой оси, то положение равновесия неустойчиво.

Устойчивость по Ляпунову названа в честь Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918), защитившего диссертацию «Общая проблема устойчивости движения» в Харьковском университете в 1892 году [16–17].

А. М. Ляпунов был пионером в успешных попытках разработать глобальный подход к анализу устойчивости нелинейных динамических систем по сравнению с широко распространенным локальным методом их линеаризации относительно точек равновесия.

Самым главным преимуществом метода функций Ляпунова перед всеми остальными подходами к решению разнообразных задач устойчивости является его универсальность.

Сейчас метод функций Ляпунова является единственным математическим методом, который может использоваться для исследования устойчивости динамических систем любого нелинейного вида и любой размерности.

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (1852–1938)

Задача отыскания критерия устойчивости для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, была сформулирована Максвеллом в 1868 году. Максвелл обратился к членам Лондонского королевского общества с предложением подыскать метод, который бы не требовал прямого нахождения всех корней характеристического полинома, но давал бы суждение только о знаке их вещественной части.

КРИТЕРИЙ СТОДОЛЫ

Линейная система устойчива, если все коэффициенты характеристического полинома положительны.

Доказательство критерия — см. [12, стр.13].

Р. С. Аурель Болеслав Стодола (англ. *Aurel Stodola*; 1859–1942) — словацкий ученый, педагог, инженер-конструктор. Основатель прикладной термодинамики турбиностроения.

С марта 1892 года был профессором в области машиностроения в Швейцарском политехническом институте (в настоящее время — швейцарская высшая техническая школа Цюриха). Одним из его студентов был Альберт Эйнштейн.

КРИТЕРИЙ ЭРМИТА – БИЛЕРА [1852, 1879]

Примечание. Задача об определении условий расположения корней характеристического уравнения в левой полуплоскости была решена в 1851 г. французским математиком Ш. Эрмитом [14]. Спустя 28 лет, в 1879 г. его результаты получили более простую математическую трактовку в статье Билера [15] и стали доступными для специалистов.

КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА [1895]

В конце XIX века словацкий инженер, создатель теории регулирования турбин, А. Стодола, не зная работ Рауса, доказал необходимое условие устойчивости полиномов с вещественными коэффициентами (1892) и поставил задачу об отыскании необходимых и достаточных условий перед выдающимся немецким математиком А. Гурвицем (*Adolf Hurwitz*).

Гурвиц работал профессором Политехнической школы в Цюрихе. Среди его студентов в Цюрихе были Давид Гильберт и Альберт Эйнштейн.

Алгебраический критерий устойчивости системы любого порядка, предложенный Гурвицем, был опубликован в 1895 году.

В работе [18] предложена декомпозиция характеристического уравнения линейных систем — изучение влияния отдельных групп коэффициентов уравнения на запасы устойчивости системы в целом. Для исследования используются основные положения критерия Гурвица и их модификация (диагональные матрицы).

Результаты работы направлены на получение простых необходимых условий устойчивости, удобных для решения прикладных задач, в частности — для оперативного определения причин возникновения автоколебаний во время отработки новых систем управления.

В частности, показано, что необходимым условием устойчивости является выполнение простых неравенств: $a_k < \mu_k \frac{a_{k+1}a_{k+2}}{a_{k+3}}$, ..., $k = 0, 1, \dots, n - 3$, $\mu_k \in (0, 1)$.

КРИТЕРИЙ МИХАЙЛОВА [1938]

Критерий был опубликован в журнале АиТ (1938 г.) — см. [13].

Литература

1. *Carlos M. Madrid Casado*. Наука. Величайшие теории: вып. 34: Вначале была аксиома. Гильберт. Основания математики. ISSN 2409-0069. Пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2015. — 176 с.
2. *Гильберт Д.* Избранные труды. Т.1, 2. М.: «Факториал», 1998.
3. *Арнольд В. И.* Вещественная алгебраическая геометрия. Москва. МЦНМО, 2009.
4. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВА, 1949.
5. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954.
6. *Мееров М. В.* Синтез структур систем автоматического управления высокой точности. М.: Наука, 1967.
7. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
8. *Marden M.* Geometry of polynomials. N.Y.: Amer. Math. Soc, 1989 (4th edition).
9. *Филлипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
Phillips C., Harbor R. Feedback Control Systems, 4th Edition, 2000. Prenticehall, Inc., 2000.
10. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
11. *Barmish B. R.* New tools for robustness of linear systems. New York: MacMillan, 1995.
12. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. М., Наука, 1981.

13. Михайлов А. В. Гармонический метод в теории регулирования. // АиТ, №3, 1938. – С. 27–38.
14. Hermite C. Sur le nombre des racines d'une equation algebrigue comprise entre des limites donnees. // J. Reine Angew. Math. 1852. Vol. 52. – P. 39–51.
15. Biehler M. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. // J. Reine Angew. Math. 87 (1879). – P. 350–352.
16. Общая задача об устойчивости движения. Ляпунов, А. М., докторская диссертация, Унив. Харьков. 1892.
17. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
18. Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П. Критерий Гурвица. Модификация. // Навигация и управление летательными аппаратами. №28, 2020. – С. 2–10.
19. Рахман Q. Я., Шмайссер Г. Аналитическая теория многочленов, том 26 монографий Лондонского математического общества. Новая серия. Пресса Оксфордского университета Clarendon Press, Оксфорд, 2002.
20. Васильев О. (*Grey Violet*). Геометрия задач D -устойчивости. Universitat Konstanz. Москва, 2017.
21. Николаев Ю. П. Анализ геометрии характеристических областей устойчивости одного класса систем с обратной связью. // Навигация и управление летательными аппаратами. №36, 2022. – С. 11–35.