

УДК 517.977.5

УПРАВЛЕНИЕ БОКОВЫМ ТРАЕКТОРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Михаил Борисович АЛЕСОВ, к. т. н.

Раменское приборостроительное конструкторское бюро

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

Рассматривается задача траекторного управления боковым движением летательного аппарата (ЛА), описываемым нелинейной моделью объекта управления с учетом постоянного ветрового воздействия. Задача сводится к построению оптимального по критерию «расхода ресурсов» управления при заданных ограничениях на величину управляющего воздействия и смещения вдоль линии заданного пути. Показано, что оптимальное управление кусочно-постоянно и имеет не более двух ступеней. Получены формулы для расчета моментов переключения ступеней управления и характерных точек фазовой плоскости. В работе представлены примеры численных расчетов оптимального управления при различных типах начальных условий.

Ключевые слова: *траекторное управление летательными аппаратами, оптимальное программное управление, принцип максимума Понтрягина, нелинейные динамические системы.*

CONTROL OF THE AIRCRAFT LATERAL MOVEMENT WITH LIMITED LONGITUDINAL MOTION

Mikhail B. Alesov, PhD in Engineering

Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

The problem of flight path control of the aircraft lateral movement is considered in the article. Nonlinear model of control object with consideration to constant wind is used. The task consists in optimal control synthesis by “fuel” criterion under specified constraints on control magnitude and longitudinal motion. It is proved that optimal control is piecewise constant and has two stages maximum. The formulas for control stages switching moments and characteristic points on phase plane calculation are obtained. The article presents the examples of optimal control numerical calculations with different types of initial conditions.

Keywords: *aircraft flight path control, optimal programmed control, Pontryagin’s maximum principle, nonlinear dynamical system.*

Введение

Выход на линию заданного пути (ЛЗП) при траекторном движении, переход на следующий активный участок маршрута, выход на навигационную точку с заданного направления при обеспечении требуемого ограничения по дальности (рубежа завершения маневра) являются основными операциями навигационного обеспечения как беспилотных летательных аппаратов, так и пилотируемых воздушных судов. Планирование таких операций производится на основе решения задач программного управления, оптимального по выбранному критерию качества.

Компенсирование возникающих отклонений от ЛЗП, как правило, выполняется с использованием «энергетического» квадратического критерия, при этом рассмотрение ограничивается линейной моделью динамической системы [1, 2]. Кроме критерия быстродействия, рассмотренного в работах [3, 4], в практике летной эксплуатации актуальной является задача синтеза программного управления на основании критерия непосредственного воздействия, обеспечивающего сокращение длительности маневрирования с ненулевым углом крена — задача оптимизации движения динамической системы по «расходу ресурсов» управления (функциональной норме L_1).

Данная статья посвящена решению задачи траекторного управления боковым движением ЛА, описываемым нелинейной моделью навигационного движения, включающей учет значительных отклонений от заданной траектории, больших величин угла курса и крена, а также постоянного ветрового воздействия. Задача сводится к построению оптимального по критерию «расхода ресурсов» управления при заданном ограничении на величину перемещения вдоль ЛЗП во время выполнения маневра, при этом в качестве управляющего воздействия используется ограниченное изменение угла крена ЛА.

Общие вопросы синтеза программного управления динамическими системами изложены в трудах Атанса Ж. и Фалба П. Л. [5], Афанасьева В. Н., Колмановского В. Б., Носова В. Р. [6]. Методы построения оптимального программного управления линейными системами по критерию, включающему «расход ресурсов», рассмотрены в работах Бабаджанянца Л. К. и др. [7, 8]. Постановка задачи и алгоритм оптимального управления боковым траекторным движением при ограничении длительности маневрирования, представленные в статье [9], имеют определенное теоретическое значение, однако для практического навигационного управления представляет интерес учет ограничения в виде продольного смещения.

1. Модель движения и особенности управления

Движение летательного аппарата (ЛА) в боковом направлении относительно ЛЗП при траекторном «чистом» маневрировании описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния Z и φ [1]:

$$\frac{dZ}{dt} = V \sin \varphi + U_z, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g}{V} \operatorname{tg} \gamma, \quad (1)$$

где Z — величина бокового отклонения ЛА от ЛЗП (положительное значение — вправо), м; t — время, с; φ — относительный угол курса ЛА (угол продольной оси ЛА, отсчитываемый от направления ЛЗП вправо) при допущении $|\varphi| \leq \pi/2$, рад; V — воздушная скорость ЛА, м/с; U_z — поперечная составляющая постоянной скорости ветра относительно направления ЛЗП (положительное навигационное направление ветра — вправо), м/с; g — ускорение свободного падения, м/с²; γ — угол крена ЛА, рад.

Воздушная скорость ЛА и скорость ветра предполагаются заданными и постоянными при выполнении маневра. Замена переменных

$$\tau = t \frac{g}{V}, \quad z = Z \frac{g}{V^2}, \quad u_z = \frac{U_z}{V}, \quad (2)$$

приводит модель движения (1) к следующей системе нормированных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = \sin \varphi + u_z, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \operatorname{tg} \gamma, \quad (3)$$

где z , φ — переменные состояния (нормированное боковое отклонение и относительный угол курса); τ — переменная времени; u_z — параметр бокового ветра; γ — функция управления.

Задача траекторного навигационного управления боковым движением ЛА (наведения ЛА на ЛЗП) формулируется следующим образом. При заданном начальном значении переменных состояния (бокового отклонения и угла курса)

$$z(0) = z_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (4)$$

следует перевести ЛА на ЛЗП, при этом значения переменных состояния должны быть равны

$$z(\tau_k) = 0, \quad \varphi(\tau_k) = \delta, \quad (5)$$

где τ_k — длительность процесса управления (не задана и подлежит расчету); δ — требуемый курс на ЛЗП (противоположен углу сноса)
 $\delta = -a \sin u_z = -a \sin \frac{U_z}{V}$.

На угол крена, используемый в качестве функции управления, накладывается постоянное ограничение по величине

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma_0, \quad (6)$$

где γ_0 — заданное максимально допустимое значение угла крена.

Оптимальное управление выбирается исходя из требования минимизации «расхода», при этом функционал качества управления записывается как:

$$J(\gamma) = \int_0^{\tau_k} |\gamma(\tau)| d\tau \rightarrow \min. \quad (7)$$

Кроме уравнений движения (1), запишем дифференциальное уравнение для продольной составляющей X смещения ЛА вдоль ЛЗП:

$$\frac{dX}{dt} = V \cos \varphi + U_x, \quad (8)$$

где U_x — составляющая постоянной скорости ветра вдоль ЛЗП (положительное навигационное направление ветра — по направлению ЛЗП).

В нормированном виде аналогично (2) уравнение (8) запишется как:

$$\frac{dx}{d\tau} = \cos \varphi + u_x, \quad (9)$$

где x — нормированное продольное смещение, определяемое выражением $x = X \frac{g}{V^2}$; u_x — параметр продольного ветра, рассчитываемый как $u_x = \frac{U_x}{V}$.

Дополнительно к сформулированным условиям задачи (4)...(7) требуется, чтобы при маневрировании расчетное перемещение вдоль ЛЗП x_k (в начале процесса управления отсчет полагается равным нулю), определяемое решением уравнения (9), не превышало заданного граничного значения x_m (рубежа продольного смещения), т. е. необходимо обеспечить выполнение условия

$$x_k = \int_0^{\tau_k} \cos \varphi(\tau) d\tau + u_x \tau_k \leq x_m. \quad (10)$$

Предполагается, что при нахождении на ЛЗП выполняется движение ЛА в направлении увеличения координаты x , т. е. справедливо условие $\cos\delta > -u_x$. При этом для корректности задачи указанное граничное значение x_m должно быть не меньше минимального значения $x_t > 0$, требуемого для выполнения маневра в данных условиях. Минимальное продольное смещение x_t может быть получено из решения задачи оптимального быстродействия [4]. При малых значениях углов курса и крена поставленная задача (3)...(10) в определенной степени подобна задаче оптимального управления линейной системой, описываемой двойным интегратором, по указанному критерию «расхода» в условиях ограниченной длительности управления [5].

На рисунке 1 показана траектория наведения ЛА на ЛЗП (ось x) в нормированных координатах (z, x) бокового и продольного перемещения с указанием характерных точек маневра.

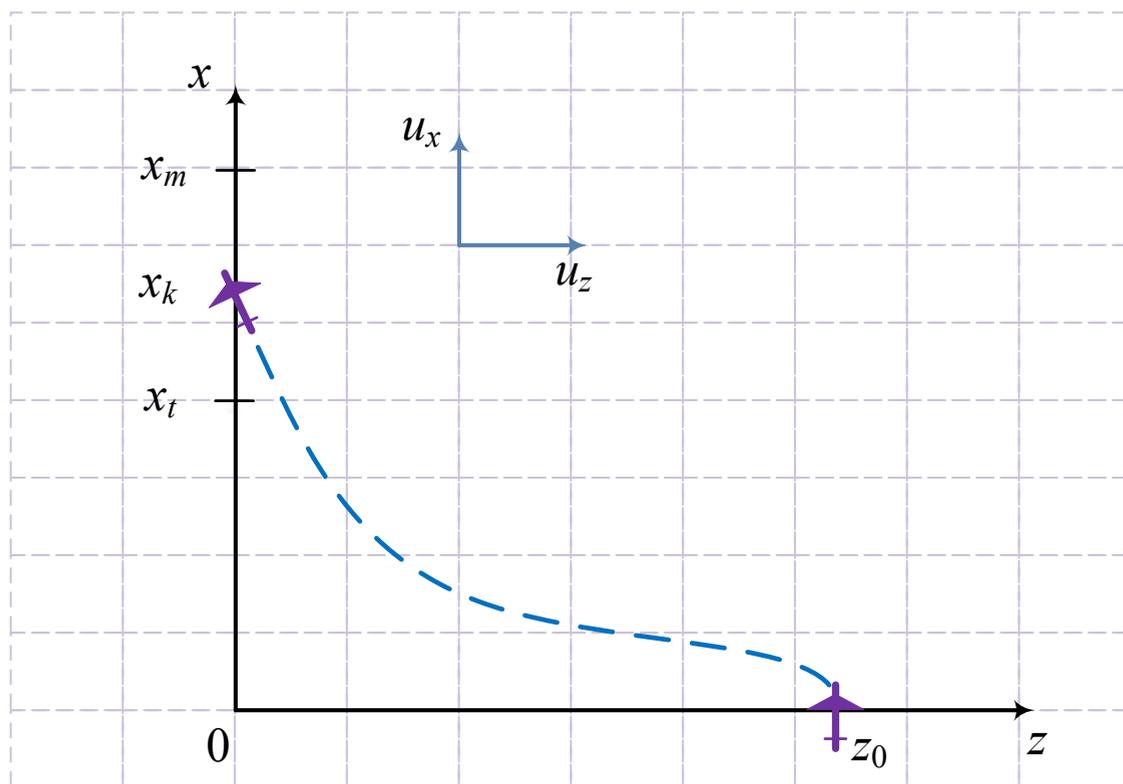


Рис. 1. Траектория ЛА относительно ЛЗП в горизонтальной плоскости

Из принципа Понтрягина Л. С. следует, что функция оптимального управления $\gamma(\tau)$ должна иметь кусочно-постоянный вид [9]:

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \operatorname{dez}_{\frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}} [\lambda_2(\tau)] = \gamma_0 \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_2(\tau) > \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \\ 0, & \text{если } |\lambda_2(\tau)| \leq \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \\ -1, & \text{если } \lambda_2(\tau) < -\frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\operatorname{dez}_p[\circ]$ — функция «мертвой зоны» (нечувствительности) с параметром $p = \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}$; λ_2 — функция, являющаяся решением сопряженной системы объекта управления (3).

В случае ограничения угла курса $|\varphi| \leq \pi/2$ сопряженная функция $\lambda_2(\tau)$ изменяется монотонно со временем и в зависимости от значений начальных параметров может находиться не более чем в трех интервалах, указанных в выражении (11). Таким образом, относительно возможного вида функции управления можно сделать следующие выводы.

1) Функция оптимального управления $\gamma(\tau)$ может содержать одну или две разнополярные (положительные и отрицательные) ступени управления с возможным участком отсутствия управления (свободного прямолинейного движения).

2) Каждая ступень управления имеет «прямоугольную» форму с экстремальными значениями $\pm\gamma_0$.

3) При двух ступенях управления задача может иметь решение с бесконечно большим смещением вдоль ЛЗП (как показано в работе [5]) и в этом случае ограничение (10) вполне актуально.

Символически возможные типы управления можно записать как множество из шести элементов: $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{0, +1\}$, $\{0, -1\}$, $\{-1, 0, +1\}$, $\{+1, 0, -1\}$, где обозначение «+1» соответствует положительной ступени, «-1» — отрицательной, «0» — прямолинейному движению без управляющего воздействия.

Общее выражение функции управления $\gamma(\tau)$ для двух ступеней типа $\{1, 0, 1\}$ можно представить как [7]:

$$\gamma(\tau) = \pm\gamma_0 H(\tau) \mp \gamma_0 H(\tau - \tau_1) \mp \gamma_0 H(\tau - \tau_2) \pm \gamma_0 H(\tau - \tau_k), \quad (12)$$

где $H(\tau)$ — функция Хэвисайда; τ_1 — момент выключения первой ступени управления; τ_2 — момент включения второй ступени управления.

Неизвестными при синтезе управления являются моменты времени переключения ступеней τ_1 , τ_2 , τ_k . В частном случае отсутствия участка свободного движения $\tau_1 = \tau_2$, при отсутствии первой ступени $\tau_1 = 0$.

2. Синтез оптимального управления

Рассмотрим движение ЛА при трех возможных типах управления $\{\pm 1\}$, $\{0, \pm 1\}$, $\{\mp 1, 0, \pm 1\}$, а затем укажем области фазовой плоскости, где управление данных типов должно быть реализовано.

2.1. Одноступенчатое управление

При одноступенчатом управлении типа $\{\pm 1\}$ изменение угла курса от начального значения ψ_0 до требуемого угла курса δ на ЛЗП получается интегрированием уравнения движения (3) и имеет вид:

$$\delta - \psi_0 = \pm \operatorname{tg} \gamma_0 \tau_k, \quad (13)$$

где знаки « \pm » соответствуют положительной или отрицательной ступени управления соответственно.

С учетом формулы (13) изменение бокового отклонения от начального значения $z_0 = z_{\pm}$ до нуля на ЛЗП представляется как:

$$z_{\pm} = \pm \frac{\cos \delta - \cos \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \mp u_z \frac{\delta - \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (14)$$

Выражение (14) описывает фазовую линию начальных значений одноступенчатого управления $\Gamma_{\pm} = \{(z_0, \psi_0) | z_0 = z_{\pm}(\psi_0)\}$, как показано на фазовой плоскости рисунка 2. Линия имеет две ветви — для положительной Γ_+ (при $\psi_0 < \delta$) и отрицательной Γ_- (при $\psi_0 > \delta$) ступени управления соответственно.

Если начальные значения (z_0, ψ_0) принадлежат линии Γ_{\pm} , то возможно единственное оптимальное управление соответствующей полярности, без участка свободного движения. Длительность процесса управления равна

$$\tau_k = \pm \frac{\delta - \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}.$$

Дальность продольного движения за время процесса управления в этом случае определяется по формуле (9) как:

$$x_k = \pm \frac{\delta - \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} u_x \pm \frac{\sin \delta - \sin \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (15)$$

Если полученное расчетное значение перемещения x_k не больше требуемого x_m (выполняется условие (10)), то поставленная задача имеет единственное решение типа $\{\pm 1\}$, в противном случае решения нет.

2.2. Одноступенчатое управление с начальным участком свободного движения

Рассмотрим вид управления $\{0, \pm 1\}$, который может быть реализован для начальных значений (z_0, ψ_0) из областей $\Omega_{0\pm}$, удовлетворяющих системам неравенств: $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \delta, z_0 > z_+(\psi_0)$ или $\delta \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}, z_0 < z_-(\psi_0)$, как показано на рисунке 2.

На участке свободного движения от начальных фазовых координат (z_0, ψ_0) угол курса не меняется и равен начальному ψ_0 , при этом изменение бокового отклонения и продольного смещения записываются как

$$z_{0\pm} - z_0 = u_z \tau_1 + \sin \psi_0 \tau_1, \quad x_{0\pm} = u_x \tau_1 + \cos \psi_0 \tau_1, \quad (16)$$

где $z_{0\pm}, x_{0\pm}$ — боковое отклонение и продольное смещение в момент окончания участка свободного движения и включения соответствующей финальной ступени управления (точка на линии переключения Γ_{\pm} с координатами (z_{\pm}, ψ_{\pm}) ; τ_1 — момент времени окончания движения по участку свободного движения и непосредственного включения финальной ступени управления.

На завершающем участке включения управления изменения фазовых координат и продольного смещения записываются как

$$\begin{aligned} \delta - \psi_0 &= \pm \operatorname{tg} \gamma_0 (\tau'_k - \tau_1), \\ 0 - z_{0\pm} &= u_z (\tau'_k - \tau_1) \mp \frac{\cos \psi_0 - \cos \delta}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \\ x'_k - x_{0\pm} &= u_x (\tau'_k - \tau_1) \pm \frac{\sin \delta - \sin \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \end{aligned} \quad (17)$$

где τ'_k — расчетное значение длительности процесса управления;

x'_k — полное продольное смещение при данном типе управления.

В результате момент непосредственного включения ступени управления равен

$$\tau_1 = -\frac{z_0}{u_z + \sin \psi_0} \pm u_z \frac{\varphi_0 - \delta}{(u_z + \sin \psi_0) \operatorname{tg} \gamma_0} \mp \frac{\cos \psi_0 - \cos \delta}{(u_z + \sin \psi_0) \operatorname{tg} \gamma_0}, \quad (18)$$

а полное продольное смещение при данном типе управления рассчитывается как:

$$x'_k = (u_x + \cos \psi_0) \tau_1 \pm u_x \frac{\delta - \psi_0 \pm \frac{\sin \delta - \sin \psi_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (19)$$

Промежуточные значения бокового отклонения и продольного смещения в момент включения ступени $z_{0\pm}$, $x_{0\pm}$ (характерные точки траектории) могут быть вычислены по формулам (16).

Если рассчитанное по формуле (19) продольное смещение x'_k меньше или равно требуемому значению x_m , то задача решена, в противном случае следует использовать двухступенчатое управление типа $\{\mp 1, 0, \pm 1\}$.

2.3. Двухступенчатое управление

Рассмотрим вид двухступенчатого управления $\{\mp 1, 0, \pm 1\}$, который может быть реализован для начальных значений (z_0, ψ_0) из областей $\Omega_{\mp 0\pm}$, удовлетворяющих системам неравенств: $\delta \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}$, $z_0 > z_-(\psi_0)$ или $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \delta$, $z_0 < z_+(\psi_0)$, как показано на рисунке 2, а также для указанных в п. 2.2 начальных значений (при отсутствии решения).

На первом участке управления (первой ступени) от начальных фазовых координат (z_0, ψ_0) до участка свободного движения изменения фазовых координат записываются как

$$\begin{aligned} \psi_{\mp 0} - \psi_0 &= \mp \operatorname{tg} \gamma_0 \tau_1, \\ z_{\mp 0} - z_0 &= u_z \tau_1 \mp \frac{\cos \psi_0 - \cos \psi_{\mp 0}}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \\ x_{\mp 0} &= u_x \tau_1 \pm \frac{\sin \psi_0 - \sin \psi_{\mp 0}}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\psi_{\mp 0}$ — угол курса в момент окончания первого участка управления и начала свободного движения; $z_{\mp 0}$, $x_{\mp 0}$ — боковое отклонение и продольное смещение в конце первого участка; τ_1 — момент времени окончания движения на первом участке.

На участке свободного движения (втором участке) угол курса $\psi_{\mp 0}$ не меняется, при этом изменения бокового отклонения и продольного смещения равны

$$\begin{aligned} z_{0\pm} - z_{\mp 0} &= u_z (\tau_2 - \tau_1) + \sin \psi_{\mp 0} (\tau_2 - \tau_1), \\ x_{0\pm} - x_{\mp 0} &= u_x (\tau_2 - \tau_1) + \cos \psi_{\mp 0} (\tau_2 - \tau_1), \end{aligned} \quad (21)$$

где $z_{0\pm}, x_{0\pm}$ — боковое отклонение и продольное смещение в конце участка свободного движения; τ_2 — момент времени окончания движения по второму участку.

На третьем, финальном участке включения второй ступени изменения фазовых координат записываются как

$$\begin{aligned} \delta - \psi_{\mp 0} &= \pm \operatorname{tg} \gamma_0 (\tau_k - \tau_2), \\ 0 - z_{0\pm} &= u_z (\tau_k - \tau_2) \mp \frac{\cos \psi_{\mp 0} - \cos \delta}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \\ x_m - x_{0\pm} &= u_x (\tau_k - \tau_2) \mp \frac{\sin \psi_{\mp 0} - \sin \delta}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \end{aligned} \quad (22)$$

Полученные выражения (20)...(22) можно свести к уравнению относительно угла курса на участке свободного движения $\psi_{\mp 0}$ (угла подхода ЛА к ЛЗП):

$$\begin{aligned} -\left[z_0 \operatorname{tg} \gamma_0 \pm u_z (\psi_0 + \delta - 2\psi_{\mp 0}) \mp (\cos \psi_0 + \cos \delta - 2\cos \psi_{\mp 0}) \right] \frac{u_x + \cos \psi_{\mp 0}}{u_z + \sin \psi_{\mp 0}} + \\ + 2\sin \psi_{\mp 0} + 2\psi_{\mp 0} u_x = \mp x_m \operatorname{tg} \gamma_0 + (\psi_0 + \delta) u_x + (\sin \psi_0 + \sin \delta). \end{aligned} \quad (23)$$

Нелинейное уравнение (23) может быть решено методом хорд или половинного деления при заданных границах изменения переменной. Для начальных значений из областей $\Omega_{\mp 0\pm}$ границы переменной $\psi_{\mp 0}$ следует выбирать как $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_{-0} < \delta$ или $\delta < \psi_{+0} \leq \frac{\pi}{2}$, для областей $\Omega_{0\pm}$ используются интервалы $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_{-0} < \psi_0$ или $\psi_0 < \psi_{+0} \leq \frac{\pi}{2}$ соответственно. После расчета угла курса $\psi_{\mp 0}$ моменты переключения ступеней управления τ_1, τ_2, τ_k боковые отклонения и продольные смещения в соответствующих характерных точках траектории $(z_{\mp 0}, x_{\mp 0}), (z_{0\pm}, x_{0\pm})$ определяются с помощью выражений (20)...(22).

2.4. Области начальных значений и типы управления

С учетом рассмотренных допустимых типов управления на фазовой плоскости (z, ψ) выделяются 4 области начальных значений, отделяемые линиями переключения Γ_{\pm} формулы (14) и линией постоянного значения курса $\psi = \delta$. На рисунке 2 показаны соответствующие области $\Omega_{0+}, \Omega_{0-}, \Omega_{-0+}, \Omega_{+0-}$ и граничные линии.

В таблице 1 даны определения областей начальных значений (z_0, ψ_0) и условия решения поставленной задачи.

Таблица 1. Области начальных значений и условия решения задачи

Обозначение	Тип управления	Определение области $\{(\psi_0, z_0)\}$	Условие решения задачи
Γ_+	Одна положительная ступень $\{+1\}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 < \delta,$ $z_0 = z_+(\psi_0)$	При $x_k \leq x_m,$ формула (15)
Γ_-	Одна отрицательная ступень $\{-1\}$	$\delta < \psi_0 \leq \frac{\pi}{2},$ $z_0 = z_-(\psi_0)$	При $x_k \leq x_m,$ формула (15)
Ω_{0+}	Одна положительная ступень $\{0, +1\}$ или две ступени $\{-1, 0, +1\}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \delta,$ $z_0 > z_+(\psi_0)$	Одна ступень, если $x'_k \leq x_m,$ формула (19). Две ступени, при условии $x_t \leq x_m = x_k < x'_k,$ формула (22)
Ω_{0-}	Одна отрицательная ступень $\{0, -1\}$ или две ступени $\{+1, 0, -1\}$	$\delta \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2},$ $z_0 < z_-(\psi_0)$	Одна ступень, если $x'_k \leq x_m,$ формула (19). Две ступени, при условии $x_t \leq x_m = x_k < x'_k,$ формула (22)
Ω_{-0+}	Отрицательная и положительная ступени $\{-1, 0, +1\}$	$\delta \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2},$ $z_0 > z_-(\psi_0)$	При $x_t \leq x_m = x_k,$ формула (22)
Ω_{+0-}	Положительная и отрицательная ступени $\{+1, 0, -1\}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \delta,$ $z_0 < z_+(\psi_0)$	При $x_t \leq x_m = x_k,$ формула (22)

3. Примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры расчета управления наведением ЛА при следующих параметрах модели движения: воздушная скорость ЛА $V = 600$ км/час; поперечная относительно ЛЗП составляющая скорости ветра $U_z = 20$ м/с; продольная составляющая скорости ветра $U_x = 20$ м/с (попутный ветер); максимально допустимое значение угла крена γ_0 принято 45° ; требуемый угол курса по окончании маневрирования на ЛЗП δ равен $-7^\circ = -0,12$ радиан. Нормированные безразмерные значения переменных записываются как

$$\tau = 0,06t, \quad z = 0,35Z, \quad x = 0,35X, \quad u_z = 0,12, \quad u_x = 0,12,$$

где боковая и продольная координаты Z, X измеряются в километрах, а время t — в секундах.

На рисунке 2 показаны области начальных значений и линий включения последних ступеней управления на фазовой плоскости с координатами (z, ψ) для указанных числовых значений параметров задачи.

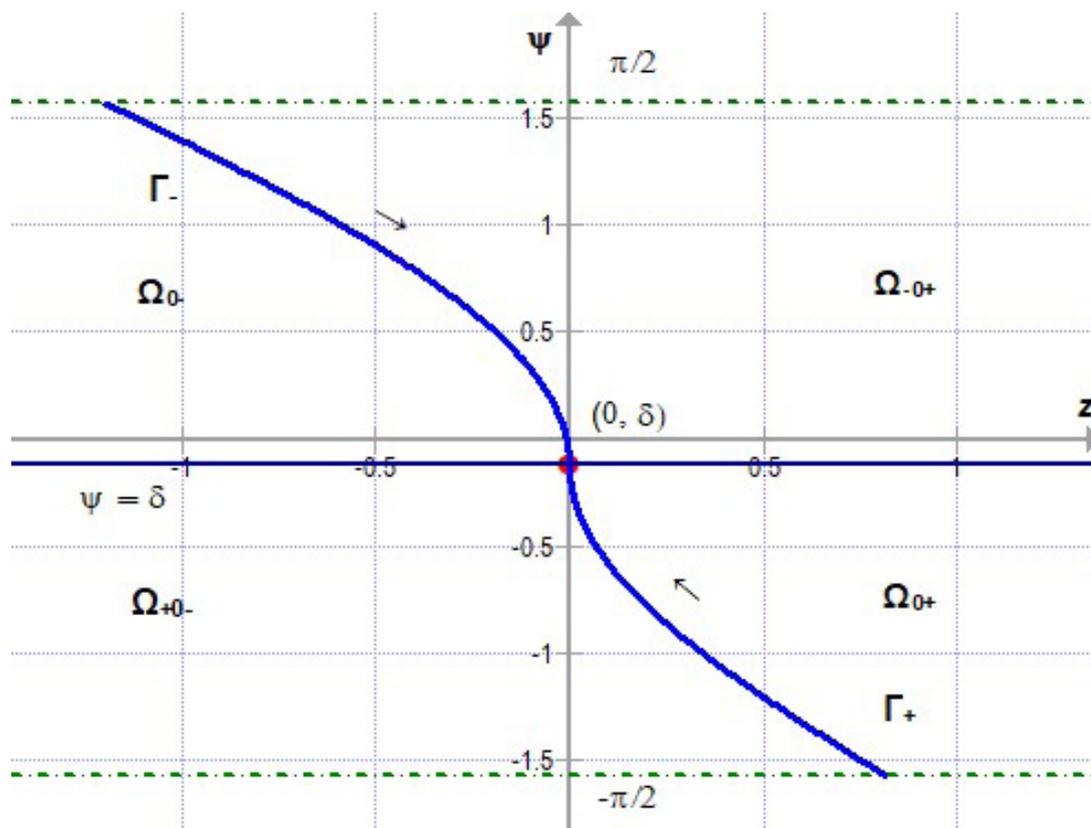


Рис. 2. Области начальных значений и граничные линии включения управления

Численные примеры при различных типах управления (областей начальных условий на фазовой плоскости) представлены в таблице 2.

Таблица 2. Примеры синтеза управления

Пример	Начальные условия и ограничение	Тип управления	Характерные точки
1	Область Ω_{0+} : $z_0 = 1$, $\psi_0 = -45^\circ = -0,7854$; $x_m = 5$	$\{0, +1\}$	Точка включения ступени: $\tau_1 = 1,35, z_{0+} = 0,21, \psi_{0+} = \psi_0$. Момент выключения управления: $\tau_k = 2,02$. Продольное смещение: $x'_k = 1,79 < x_m$
2	Область Ω_{0+} : $z_0 = 1$, $\psi_0 = -45^\circ = -0,7854$; $x_m = 1,4 \leq 1,79$ $x_m = 1,4 < x'_k = 1,79$	$\{-1, 0, +1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 0,28, z_{-0} = 0,81, \psi_{-0} = -1,07$. Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 0,83, z_{0+} = 0,40, \psi_{0+} = \psi_{-0}$. Момент выключения управления: $\tau_k = 1,77$. Продольное смещение: $x_k = x_m = 1,40$
3	Область Ω_{+0} : $z_0 = -1$, $\psi_0 = -45^\circ = -0,7854$; $x_m = 5$	$\{+1, 0, -1\}$	Точка выключения первой ступени: $\tau_1 = 1,00, z_{+0} = -1,15, \psi_{-0} = 0,22$. Точка включения второй ступени: $\tau_2 = 4,27, z_{0-} = -0,06, \psi_{0-} = \psi_{+0}$. Момент выключения управления: $\tau_k = 4,61$. Продольное смещение: $x_k = x_m = 5,00$
4	Область Ω_{0-} : $z_0 = -1$, $\psi_0 = -45^\circ = -0,7854$; $x_m = 5$	$\{0, -1\}$	Точка включения ступени: $\tau_1 = 0,73, z_{0-} = -0,40, \psi_{0-} = \psi_0$. Момент выключения управления: $\tau_k = 1,64$. Продольное смещение: $x'_k = 1,54 < x_m$

Траектории движения динамической системы на фазовой плоскости (z, ψ) при положительном и отрицательном начальном боковом отклонении и условиях числовых примеров 1...4 таблицы 2 показаны на рисунках 3 и 5 соответственно. Точками обозначены характерные состояния системы управления, стрелками — направление движения.

Соответствующие траектории движения ЛА на горизонтальной плоскости в нормированных координатах (z, x) примеров 1...4 таблицы 2 показаны на рисунках 4 и 6.

Поставленная задача может быть использована для решения более общей проблемы, которая заключается в следующем: из заданной точки горизонтальной плоскости (x', z') с начальными координатами (x'_0, z'_0) и начальным углом курса ψ'_0 (отсчитываемым, например, от севера) следует перевести ЛА в точку горизонтальной плоскости с требуемыми координатами (x'_k, z'_k) и заданным углом курса (ψ'_k) при ограничении на угол крена (6) и с учетом функционала качества управления (7).

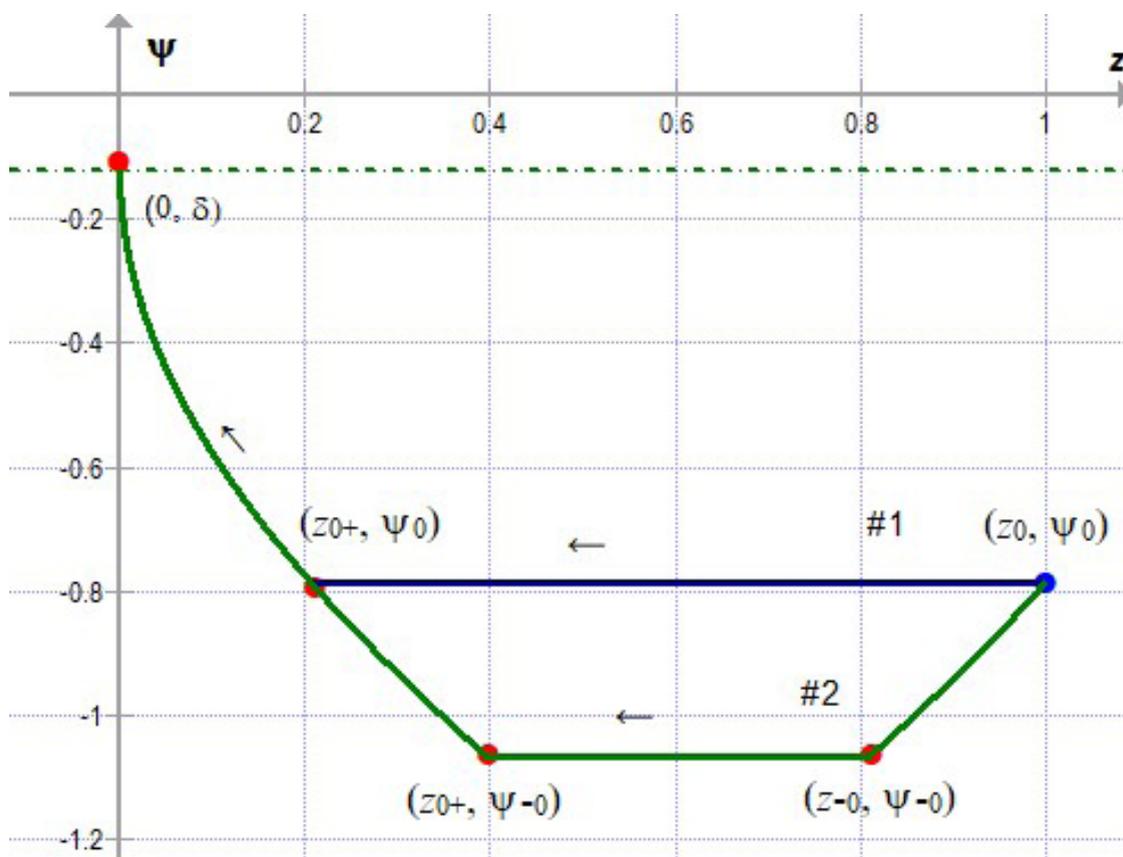


Рис. 3. Движение по фазовой плоскости при положительном начальном отклонении

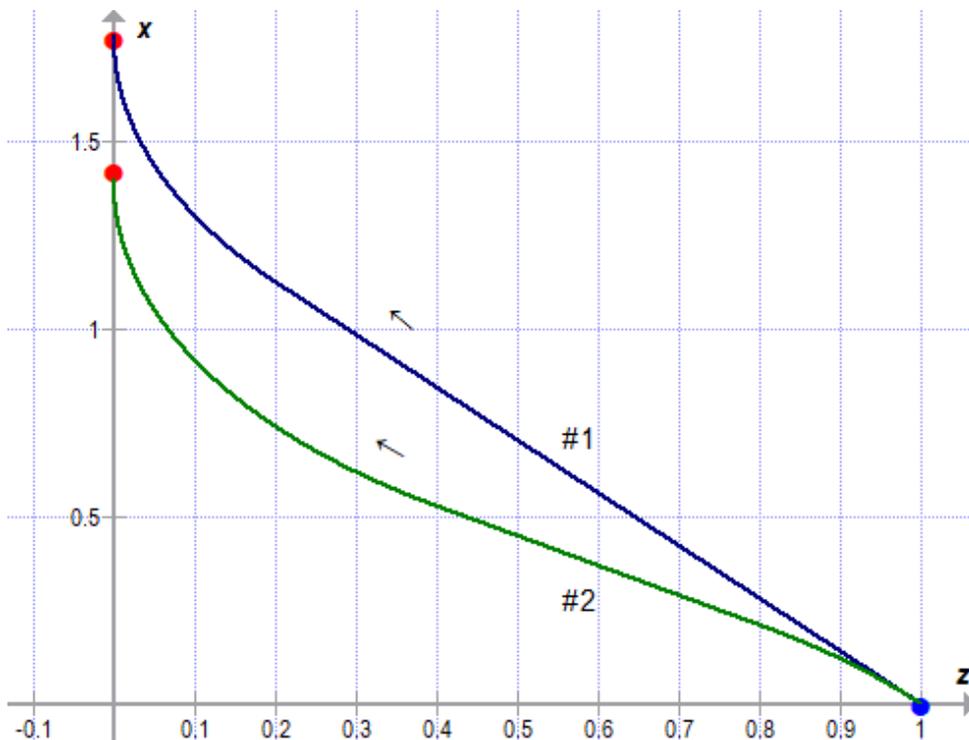


Рис. 4. Движение в горизонтальной плоскости при положительном начальном отклонении

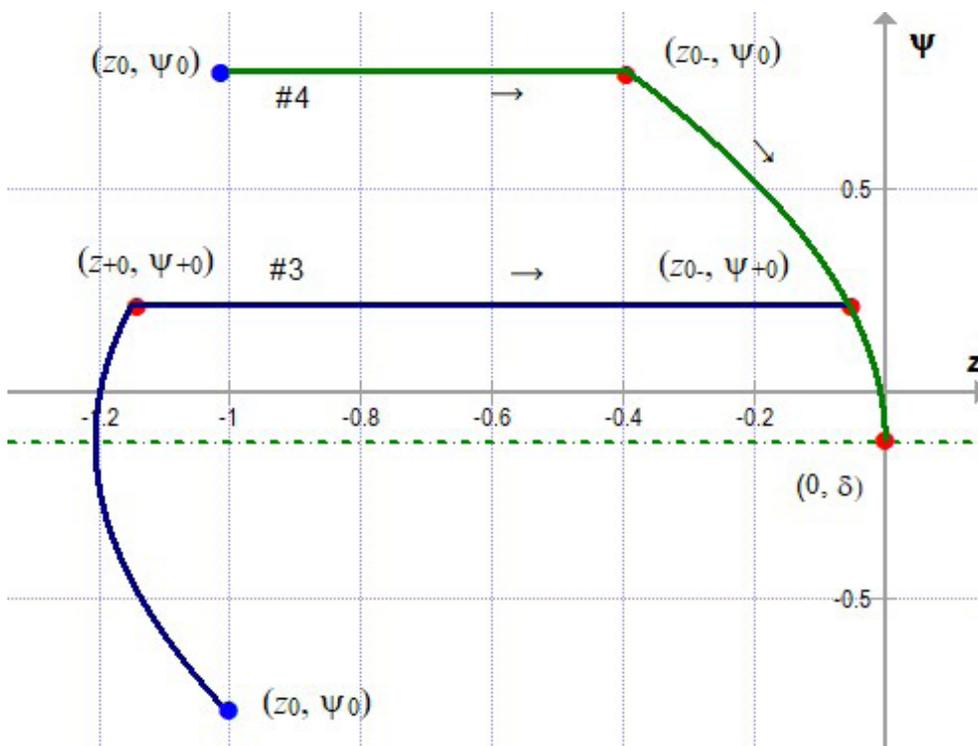


Рис. 5. Движение по фазовой плоскости при отрицательном начальном отклонении

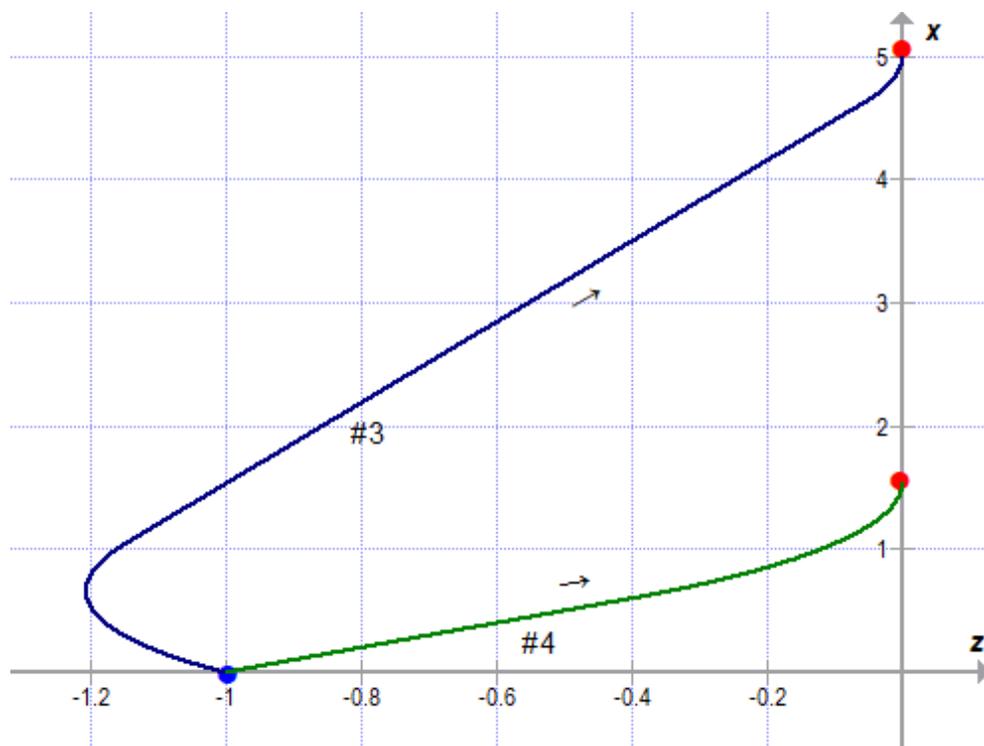


Рис. 6. Движение в горизонтальной плоскости при отрицательном начальном отклонении

Для решения задачи в конечной точке по компонентам ветра следует рассчитать угол сноса δ' и требуемый путевой угол (направление) формальной ЛЗП, проходящей через точку (x'_k, z'_k) , как $\text{ПУ} = \psi'_k + \delta'$. Краевые значения координат (в начале и в конце маневра) относительно системы, ориентированной по ЛЗП, равны

$$\begin{bmatrix} x''_{\{0,k\}} \\ z''_{\{0,k\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \text{ПУ} & \sin \text{ПУ} \\ -\sin \text{ПУ} & \cos \text{ПУ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{\{0,k\}} \\ z'_{\{0,k\}} \end{bmatrix}.$$

Для системы координат, ось z которой проходит через конечную точку, а ось x — через начальную, краевые параметры состояния запишутся как ПУ

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \quad z_0 = z''_0 - z''_k, \quad \psi_0 = \psi'_0 - \text{ПУ}, \\ x_m &= x''_k - x''_0, \quad z_k = 0, \quad \psi_k = -\delta'. \end{aligned}$$

В этом случае найти оптимальное управление можно, решая задачу (3)...(10) рассмотренным методом с учетом рассчитанных краевых условий.

Подобные вопросы построения оптимальной по критерию максимального быстродействия траектории ЛА из точки фазового пространства, заданной координатами и курсовым углом, в другую точку рассмотрены в фундаментальной работе Дубинса Л. Е. [3].

Заключение

Рассмотренный алгоритм синтеза оптимального управления боковым движением летательных аппаратов использует нелинейную модель системы управления, учитывающую большие значения углов курса и крена ЛА и постоянное воздействие ветровой нагрузки. Полученные выражения для определения типов областей начальных условий и «структуры» безынерционного управления, формулы расчета моментов переключения ступеней управления и характерных точек траектории обеспечивают полное решение задачи синтеза оптимального наведения ЛА на ЛЗП в соответствии с начальными условиями, выбранным критерием качества и задаваемыми ограничениями.

Представленная методика может служить основой для решения многокритериальных задач оптимального управления движением летательных аппаратов, и в частности, задач, учитывающих ограничения на скорость изменения управляющего воздействия (инерционное управление), на длительность выполнения маневрирования и гибридный критерий оптимальности [9]...[11].

Предложенный алгоритм практически может быть использован в составе многометодных комплексов пилотажно-навигационного обеспечения летательных аппаратов и, в частности, при разработке программного обеспечения планово-пилотажных приборов, используемых при маневрировании ЛА на маршруте, а также при выполнении штурманских навигационных расчетов на этапе планирования полета.

Литература

1. Козарук В. В., Ребо Я. Ю. Навигационные эргатические комплексы самолетов. М.: Машиностроение, 1986. — 288 с.
2. Баранов В. Н., Зо Лин У. Решение задачи оптимального управления пространственным движением легкого самолета на основе принципа максимума Понтрягина / Электронный журнал «Труды МАИ», вып. 46, 2011.
3. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Am. J. of Math., 79 (3), pp. 497–516. — DOI: 10.2307/2372560.
4. Езерский В. В., Пляскина А. А. К вопросу о математическом моделировании управления боковым траекторным движением летательного аппарата по критерию быстродействия // Аэрокосмическое приборостроение и эксплуатационные технологии. Сб. докл. Второй Межд. конф. — СПб: СПбГУАП, 2021. — С. 113–119.
5. Атанс Ж., Фалб П. Л. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. — 764 с.
6. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М.: Высш. шк., 2003. — 614 с.
7. Бабаджанянц Л. К., Потоцкая И. Ю. Управление по критерию расхода в механических системах. — СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2003. — 137 с.
8. Алесова И. М., Бабаджанянц Л. К. Оптимальное управление угловыми колебаниями спутника на эллиптической орбите / Перспективы науки, 2019, № 12. — С. 12–16.
9. Алесов М. Б. Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении длительности маневрирования // Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики, №10, 2020. — С. 29–34.

10. *Алесов М. Б., Алесова И. М.* Оптимальное управление боковым траекторным движением летательного аппарата // *Перспективы науки*, № 8, 2020. – С. 10–14.
11. *Алесов М. Б., Алесова И. М.* Оптимальное по гибричному критерию управление движением летательного аппарата при смене активного участка маршрута // *Навигация и управление летательными аппаратами*, № 4, 2021. – С. 16–31.