

УДК 629.7.05

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРА МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ РЕЖИМА СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПОЛЕТА САМОЛЕТА

*Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, д. т. н., профессор
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru*

Рассмотрен подход к построению области расположения корней управляемой динамической системы, удовлетворяющих желаемому качеству и функционально связанных с параметрами объекта управления. Решение обратной задачи модального управления проведено по способу канонического разложения характеристического полинома замкнутой системы на примере контура стабилизации вертикальной скорости полета тяжелого самолета. Получено решение для регулятора минимальной размерности в функции параметров контура управления перегрузки. Робастность системы подтверждена результатами моделирования процессов выхода самолета на заданную вертикальную скорость при различных вариантах сочетаний параметров объекта управления.

Ключевые слова: динамическая система, обратная задача, модальное управление, характеристический полином, желаемое качество, перерегулирование, робастность.

INVERSE PROBLEM OF MODAL CONTROL SOLUTION USING REDUCED-DIMENSION CONTROLLER SYNTHESIS FOR AIRCRAFT VERTICAL SPEED HOLD

*Vladimir E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru*

The article considers an approach to constructing the location area of controlled dynamic system roots that meet the desired control quality requirements and are functionally related to control object parameters. The inverse problem of modal control was solved by the method of closed-loop system characteristic polynomial canonical expansion on the example of the heavy aircraft vertical speed hold loop. A solution to the reduced-dimension controller is obtained using the function of parameters of the overload control loop. The system robustness is confirmed by the results of simulation of the aircraft reaching the selected vertical speed for various combinations of control object parameters.

Keywords: dynamic system, inverse problem, modal control, characteristic polynomial, desired control quality, overshoot, robustness.

Теория модального управления основывается на выборе размещения корней замкнутой системы автоматического управления [1] с отрицательными вещественными частями, что полностью соответствует первому методу Ляпунова [2, стр. 127] об условиях устойчивости нелинейной системы по уравнениям первого приближения.

Решение задачи синтеза системы автоматического управления (САУ), несмотря на различные применяемые способы разработки, приводит в конечном итоге к желаемому размещению корней динамической системы, обеспечивающих заданное качество управления. Поэтому синтез направлен на коррекцию нежелательных корней исходной системы и на построение обратных связей по наблюдаемым координатам движения для структурного и параметрического влияния на коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы управления. Для линейных систем с постоянными коэффициентами при полной наблюдаемости координат состояния задача синтеза имеет точное аналитическое решение [3] и позволяет осуществить желаемое размещение корней.

Метод модального управления при синтезе САУ является прямым методом, так как решает задачу заранее назначенного размещения корней и не отвечает на вопрос, как определять эти корни исходя из характеристик объекта управления. В теории модального управления [4–7] применяют способы назначения эталонных моделей (эталонных передаточных функций) и стандартных характеристических полиномов [8–11], обеспечивающих желаемый вид переходных процессов. Способ стандартных коэффициентов также не отвечает на вопрос о связи желаемого распределения корней системы с ее неизменяемой частью, то есть с корнями объекта управления. Таким образом, остается открытой проблема о назначении желаемых корней управляемой динамической системы при учете динамических параметров объекта, которая до настоящего времени решается эмпирическим путем при конструировании САУ.

Практика создания САУ воздушных летательных аппаратов (ЛА) при формировании желаемой динамики замкнутого контура неизменно опирается на полное использование в задаче синтеза исходных аэродинамических и инерционно-массовых характеристик ЛА, то есть динамических характеристик объекта управления. Всегда замкнутая система размерности n остается не полностью наблюдаемой с неполным вектором обратных связей размерностью $r < n - 1$ из-за ограниченного количества измеряемых координат полета ЛА. Это существенное ограничение будет оказывать влияние на перераспределение исходных (до замыкания контура) корней объекта управления независимо от параметрической настройки структурно неполной обратной связи.

Для каждой конкретной структуры замкнутого контура будут иметь место функциональные связи меньше полной размерности n , необходимой для однозначного решения задачи синтеза. Напомним, что для этого необходимо в каноническом представлении измерять $(n - 1)$ производные регулируемой координаты, включая нулевую производную — собственно саму координату управления. Тогда на n корней или, что то же, на n динамических параметров замкнутой системы, будет приходиться $m = 2n - r - 1$ неизвестных параметров замкнутой системы, включая параметры обратных связей. То есть возникает множество решений, из которых надо выбирать приемлемые. Таким образом, для практически значимых вариантов сниженной размерности обратной связи возникает необходимость выявления зависимостей между параметрами замкнутой системы в функции параметров обратной связи. Настройка этих параметров должна выбираться на основе требований к контуру управления по критериям устойчивости и качества управления.

Сформулируем постановку *обратной задачи теории модального управления* в применении к синтезу САУ летательных аппаратов: нахождение области распределения корней замкнутой системы, удовлетворяющих показателям устойчивости и качества управления, в функции динамических параметров объекта управления.

При полной наблюдаемости и решении прямой задачи по способу Аккермана обратной задачей можно считать нахождение на базе стандартного полинома такого диапазона изменения его коэффициентов характеристического полинома, при котором достигается приближение к нулю хотя бы одного любого из коэффициентов обратной связи. В этом случае соответствующая ветвь обратной связи структурно исчезает, что является предельно возможным условием синтеза для полностью наблюдаемых систем. Речь идет о вариации всего стандартного полинома до появления этого структурного изменения. Так как имеет смысл варьировать только самый медленный корень, влияющий на нормирование стандартного полинома, то при первом «касании нуля» какого-либо из коэффициентов обратной связи при положительных значениях остальных коэффициентов будет достигнута граница существования решения прямой задачи модального управления для формирования наиболее быстрого движения замкнутой системы. Поиск таких вариантов осуществляется, как правило, эмпирическим путем без увязки с исходными модами свободного движения исходной системы. В работе [9, стр. 213] предложены некоторые корневые методы к оценке качества регулирования, для которого «вид корней в характеристическом уравнении определяет характер процессов в системе автоматического управления».

Наиболее близким вариантом решения обратной задачи для не полностью наблюдаемой системы является метод синтеза с регулятором меньшей размерности [12–15], применяемый для частных практических задач с понижением порядка желаемой переходной функции. Однако в этих подходах также не устанавливается функциональная связь решений с динамическими параметрами неизменяемой части системы, в нашем случае, например, с параметрами свободного короткопериодического движения самолета.

Покажем решение обратной задачи модального управления с последующим синтезом быстродействующей системы стабилизации вертикальной скорости V_y полета самолета на основе получения функциональных зависимостей параметров замкнутого контура системы от параметров объекта управления.

Пусть структурная схема системы стабилизации V_y , показанная на рис. 1, содержит один параметр настройки САУ — коэффициент прямого усиления k_{V_y} ошибки управления $\Delta V_y = V_y^{\text{зад}} - V_y$, то есть рассогласования заданной и текущей угловых скоростей.

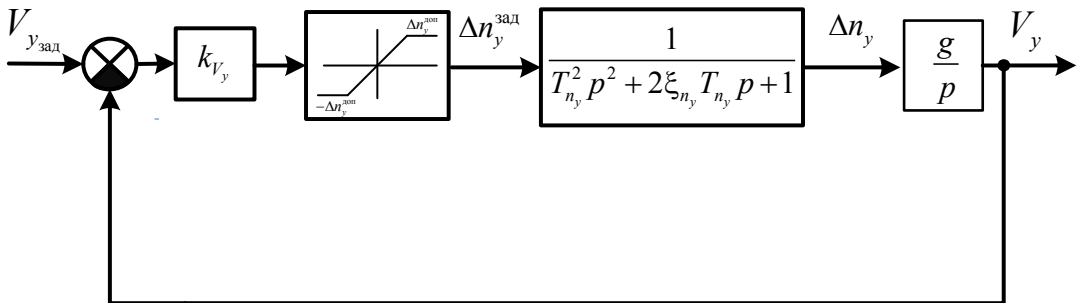


Рис. 1. Структурная схема контура стабилизации вертикальной скорости полета

Из структуры (рис. 1) передаточная функция замкнутой линейной системы будет равна:

$$W_{V_y}^{V_y^{\text{зад}}}(p) = \frac{1}{\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1}, \quad (1)$$

а характеристический полином замкнутого контура управления:

$$\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1. \quad (2)$$

Полином (2) третьего порядка имеет три корня при трех параметрах: двух известных параметрах T_{n_y} , ξ_{n_y} — постоянной времени и относительного коэффициента затухания контура отработки перегрузки и одного искомого параметра k_{V_y} — коэффициента усиления в прямой цепи системы (рис. 1). Поставим задачу определения функциональной связи $k_{V_y} = f(T_{n_y}, \xi_{n_y})$ для любых существующих параметров контура перегрузки с вычислением одновременно максимального значения коэффициента k_{V_y} , определяющего быстродействие, при приемлемом качестве управления, понимаемого как неперевышение допустимого перерегулирования.

Представим характеристический полином (2) в виде канонической формы разложения многочлена с действительными коэффициентами [1] на сомножители полиномов первого и второго порядков с неизвестными пока параметрами

$$(T_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1). \quad (3)$$

Будем считать желаемым переходным движением системы (2) переходное движение апериодического звена с постоянной времени T_1 . Это позволит ориентироваться при последующем размещении корней (2) относительно доминирующего корня $1/T_1$, определяющего область желаемого качества работы исследуемой системы (2), как системы, близкой по поведению к апериодическому звену.

Выполним разложение полинома (2) в виде (3), для этого проведем деление (2) на сомножитель $T_1 p + 1$, получим результат деления:

$$\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y} T_1} p^2 + \frac{T_{n_y} (2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y})}{gk_{V_y} T_1^2} p + 1,$$

который имеет остаток

$$\frac{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}{gk_{V_y} T_1^2} p + 1.$$

Для деления нацело полинома (2) достаточно выполнения равенства

$$\frac{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}{gk_{V_y} T_1^2} = T_1. \quad (4)$$

Из (4) находим выражение для коэффициента

$$k_{V_y} = \frac{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}{gT_1^3}. \quad (5)$$

Тогда параметры полинома второго порядка в разложении (3) при сравнении с полиномом, полученным в результате деления, примут вид:

$$T_2 = \frac{T_{n_y}}{\sqrt{gk_{V_y} T_1}}, \quad \xi_2 = \frac{2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y}}{T_1 \sqrt{gk_{V_y} T_1}}. \quad (6)$$

Подставим (5) в (6) и получим выражения для параметров:

$$T_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \frac{T_{n_y} T_1}{\sqrt{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}}, \quad (7)$$

$$\xi_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \frac{2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y}}{\sqrt{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}}, \quad (8)$$

которые являются функциями трех аргументов: ξ_{n_y} , T_{n_y} неизменяемой части системы и T_1 искомой постоянной времени.

Заметим, что коэффициент усиления САУ k_{V_y} (5) и параметры разложения (7), (8) при неизменяемой части системы — контуре обработки перегрузки с параметрами ξ_{n_y} , T_{n_y} — являются функцией постоянной времени T_1 , которую будем искать, чтобы гарантировать правильность разложения (3).

Необходимым условием устойчивости системы (2) с эквивалентным полиномом (3) является: положительность значений параметров T_1 , T_2 и ξ_2 :

$$T_1 > 0, T_2 > 0, \xi_2 > 0. \quad (9)$$

Учитывая, что все постоянные времени и относительный коэффициент затухания (9) должны иметь положительные значения, условием существования решения по поиску неизвестных параметров T_1 , T_2 , ξ_2 являются следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2 &> 0, \\ 2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y} &> 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы неравенств разбивается на две части. Для $\xi_{n_y} < 1$ имеет место интервал определения параметра T_1 :

$$T_1 > \frac{T_{n_y}}{2\xi_{n_y}}. \quad (10)$$

При $\xi_{n_y} > 1$ область существования неизвестного параметра T_1 расщепляется на два интервала:

$$\frac{T_{n_y}}{2\xi_{n_y}} < T_1 \leq T_{n_y} \left(\xi_{n_y} - \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1} \right) \text{ и } T_1 > T_{n_y} \left(\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1} \right). \quad (11)$$

В точке $\xi_{n_y} = 1$ функции относительного затухания и постоянной времени при $T_1 = T_{n_y}$ терпят разрыв второго рода

$$\xi_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \infty, \quad T_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \infty \text{ при } T_1 = T_{n_y}. \quad (12)$$

Кроме того, в этой же точке $k_{V_y} = 0$, что означает полное размыкание контура управления. Понятно, что для адекватного решения этот случай должен быть надежно обойден при контроле интервалов возможных значений аргумента функции $k_{V_y}(T_1)$.

Таким образом, существование решений функций (7), (8) определяется областью их определения (10), (11) с учетом (12).

Достаточным условием устойчивости характеристического полинома (2), согласно критерию Рауса — Гурвица [16], является выполнение неравенства

$$\frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} \cdot \frac{1}{gk_{V_y}} > \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}},$$

из которого следует ограничение на максимально возможную величину искомого коэффициента усиления:

$$k_{V_y} < \frac{2\xi_{n_y}}{gT_{n_y}}. \quad (13)$$

Неравенство (13) определяет границу колебательной неустойчивости в обработке регулируемой координаты (состояние автоколебаний), что явно неприемлемо. Кроме того, например, для практически имеющих место значений $T_{n_y} = 0,4$ с и $\xi_{n_y} = 0,6$, получаемый из (13) коэффициент k_{V_y} , определяющий порцию заданной перегрузки на 1 м/с вертикальной скорости полета, должен быть менее 0,306 с/м. Поэтому при существующем ограничении по располагаемой перегрузке для автоматики тяжелых самолетов $n_y^{\text{зад}} = 0,3$ для работы САУ в линейной зоне $\Delta V_y \pm 5$ м/с приближения самолета к заданному значению V_y из соотношения $k_{V_y} \cdot \Delta V_y = 0,3$ величину коэффициента усиления желательнее иметь менее $k_{V_y} = 0,06$ с/м.

Итак, разложение (2) в (3) возможно только при выполнении равенства (5) для k_{V_y} , полученного по методу деления полинома (2) без остатка. В развернутом виде равенство полиномов (2) и (3) примет вид:

$$\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1 = T_1 T_2^2 p^3 + T_2 (T_2 + 2\xi_2 T_1) p^2 + (T_1 + 2\xi_2 T_2) p + 1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной p преобразования Лапласа в левой и правой частях этого равенства, получаем систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} T_1 T_2^2 &= \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}}, \\ T_2 (T_2 + 2\xi_2 T_1) &= \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}}, \\ T_1 + 2\xi_2 T_2 &= \frac{1}{gk_{V_y}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Система (14) содержит четыре неизвестных параметра ξ_{n_y} , T_{n_y} , T_1 и k_{V_y} , связанных между собой выражениями (5), (7), (8), которые удовлетворяют трем уравнениям системы (14). Прямые решения системы (14) связаны с вычислениями уравнений третьей степени, чего удалось избежать методом деления нацело с нулевым остатком разложения исходного многочлена (2). Тогда вопрос получения числового решения для коэффициента k_{V_y} состоит в необходимом для этого назначении постоянной времени T_1 в зависимости от параметров контура отработки перегрузки ξ_{n_y} , T_{n_y} и контролем после этого получаемых, согласно (7), (8), параметров T_2 , ξ_2 . Понятно, что основным требованием в условиях обеспечения устойчивости замкнутого контура управления является быстроедействие и перерегулирование переходного процесса при стандартном воздействии на вход единичной ступеньки.

В работе [9, стр. 216] показано, что при введенном в рассмотрение среднегеометрическом корне Ω_0 , равном в абсолютном значении для полинома (3):

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2^2}}, \quad (15)$$

«наименьшее время переходного процесса будет при всех кратных корнях».

То есть для рассматриваемого случая выражение (15) может быть преобразовано к виду:

$$\Omega_0 = \frac{1}{T_1} \text{ при } T_2 = T_1 \text{ и } \xi_2 = 1. \quad (16)$$

Тогда полином (3) в смысле равенства постоянных времени полиномов-сомножителей можно будет представить в обобщенном по отношению к жестким условиям (16) виде

$$(T_1 p + 1)(T_1^2 p^2 + 2\xi_2 T_1 p + 1), \quad (17)$$

а соответствующая система (14) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T_1^3 &= \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}}, \\ (2\xi_2 + 1)T_1^2 &= \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}}, \\ (2\xi_2 + 1)T_1 &= \frac{1}{gk_{V_y}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Система (18) имеет решение относительно параметров контура управления перегрузкой, а именно:

$$T_1 = 2\xi_{n_y} T_{n_y}, \quad \xi_2 = 2\xi_{n_y}^2 - 0,5, \quad k_{V_y} = \frac{1}{8gT_{n_y} \xi_{n_y}^3}. \quad (19)$$

Выражения (19) имеют смысл при условии нахождения $\xi_{n_y} > 0,5$. Однако, для обеспечения удовлетворительного качества процесса управления системы (2) необходимо получение $\xi_2 > 0,5$. Тогда, согласно (19), относительный коэффициент затухания контура перегрузки всегда должен быть

$$\xi_{n_y} > 1/\sqrt{2}.$$

Заметим, что в теории автоматического управления величина $\xi_{n_y} = 1/\sqrt{2}$ является оптимальной [18] для динамического звена второго порядка в смысле максимального быстродействия без ухудшения качества процесса управления (перерегулирование 4,3%).

Полагая, что желаемое переходное движение системы (2) определяется доминирующим корнем аperiодического звена с постоянной времени T_1 , определим с помощью метода интегральной

оценки [19] степень приближения переходной функции системы

$$h(t) \doteq \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_1^2 p^2 + 2\xi_2 T_1 p + 1)} \quad (20)$$

к желаемой переходной функции

$$h_x(t) \doteq \frac{1}{p(T_1 p + 1)}. \quad (21)$$

Будем искать интегральную квадратичную оценку рассогласования $x_h(t) = h_x(t) - h(t)$ желаемого и фактического переходных процессов согласно функционалу

$$I_h = \int_0^{\infty} x_h(t)^2 dt. \quad (22)$$

Изображение разности желаемой (21) и фактической (20) переходных функций $x(t) = h_x(t) - h(t)$ примет вид:

$$X(p) = H_x(p) - H(p) = \frac{1}{p(T_1 p + 1)} - \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_1^2 p^2 + 2\xi_2 T_1 p + 1)},$$

$$H_x(p) = L^{-1}[h_x(t)], \quad H(p) = L^{-1}[h(t)]$$

или

$$X(p) = \frac{T_1^2 p + 2\xi_2 T_1}{T_1^3 p^3 + (2\xi_2 + 1)T_1^2 p^2 + (2\xi_2 + 1)T_1 p + 1}. \quad (23)$$

Исходя из (23), обозначим:

$$a_3 = T_1^3, \quad a_2 = (2\xi_2 + 1)T_1^2, \quad a_1 = (2\xi_2 + 1)T_1, \quad a_0 = 1, \quad b_{1_h} = T_1^2, \quad b_{0_h} = 2\xi_2 T_1. \quad (24)$$

Согласно [20], интегральная квадратичная оценка (22) определяются:

$$I_h = \frac{\det B_h}{2a_3 \det A_h},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B_h = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ B_{0_h} & B_{1_h} & B_{2_h} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$B_{0_h} = b_{0_h}^2 = 4\xi_2^2 T_1^2, \quad B_{1_h} = b_{1_h}^2 = T_1^4, \quad B_{2_h} = 0.$$

Подстановка (24) в (25) дает следующий результат:

$$I_h = \frac{T_1(8\xi_2^3 + 4\xi_2^2 + 1)}{8\xi_2(\xi_2 + 1)}. \quad (26)$$

Будем искать экстремум среднего квадрата (26), для этого продифференцируем равенство (26) по ξ_2 :

$$\frac{\partial I_h(T, \xi_2)}{\partial \xi_2} = \frac{(8\xi_2^4 + 16\xi_2^3 + 4\xi_2^2 - 2\xi_2 - 1)T_1}{8\xi_2^2(\xi_2 + 1)^2}. \quad (27)$$

Приравняем выражение (27) к нулю и получим

$$8\xi_2^4 + 16\xi_2^3 + 4\xi_2^2 - 2\xi_2 - 1 = 0. \quad (28)$$

Уравнению (28) удовлетворяет физически значимое оптимальное значение

$$\xi_2 = 0,394. \quad (29)$$

Заметим, что оптимальная в смысле минимума среднего квадрата отклонения переходного процесса системы от желаемого величина (29) не зависит от постоянной времени. Тогда для $T_1 = 1$ с построим графики (рис. 2) указанных переходных движений в относительных единицах измерения \bar{V}_y при воздействии на вход системы единичной ступеньки.

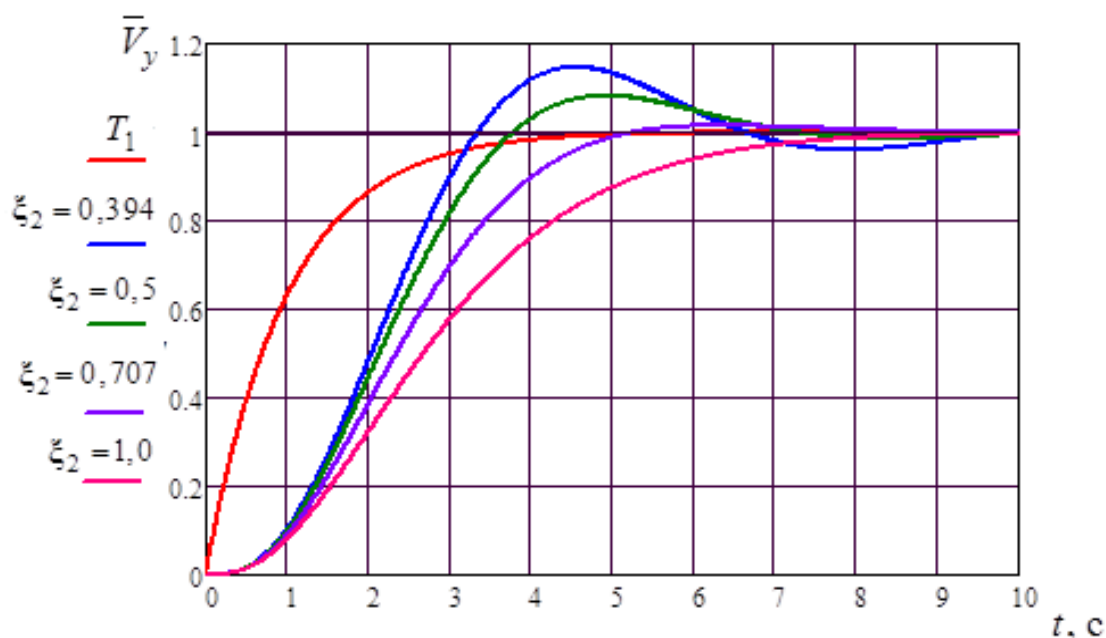


Рис. 2. Переходные процессы системы в форме структур Баттерворта в сравнении с желаемым процессом

На этом рисунке показаны нормированные переходные процессы: желаемого апериодического с постоянной времени T_1 , с оптимальной величиной относительного коэффициента затухания (29), процесс для $\xi_2 = 0,5$, при котором система превращается в систему фильтра Баттерворта [21], а также процессы при $\xi_2 = 0,707$ и $\xi_2 = 1,0$.

Для полученного оптимального решения перерегулирование составляет 14,6%, для системы в варианте Баттерворта 8%. Для оптимального по быстродействию звена второго порядка при $\xi_2 = 0,707$ в выражении (20) перерегулирование составляет 1,4%, кроме того, для него время регулирования практически совпадает со временем регулирования желаемого процесса. Для процесса с $\xi_2 = 1$ время регулирования неоправданно возрастает почти в 2 раза.

Найдем в классе структур Баттерворта с полиномами (17) диапазон относительных коэффициентов затухания, начиная от 0,5 и выше без ослабления требований к быстродействию. Напомним, что рассмотренные выше случаи определяются допущением о равенстве постоянных времени $T_2 = T_1$ в целях перевода системы (14) из неопределенной [22] в определенную (17), имеющую единственное аналитическое решение для настраиваемого коэффициента:

$$k_{V_y} = \frac{1}{g(2\xi_2 + 1)T_1}. \quad (30)$$

Из первого выражения (6) следует, что введенное равенство постоянных времени $T_2 = T_1$ выполняется при назначении желаемой постоянной времени

$$T_1 = 2\xi_{n_y} T_{n_y}. \quad (31)$$

Обратим внимание, что при увеличении ξ_{n_y} коэффициент усиления k_{V_y} в прямой цепи системы (1) уменьшается в гиперболической зависимости, что и снижает быстродействие системы. Тогда найдем решение следующей задачи, заключающейся в поддержании всегда оптимального по быстродействию при

$$\xi_2 = 1/\sqrt{2} = 0,707.$$

Сначала уточним область параметров контура перегрузки, обеспечивающих выполнение условий существования структурно подобных фильтру Баттерворта решений из (19). На основании (19) для желаемого интервала значений $\xi_2 = [0,5, 0,707]$ относительные коэффициенты затухания контура перегрузки должны находиться в пределах

$$0,707 \leq \xi_{n_y} \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}} = 0,777. \quad (32)$$

Если левая граница в (32) является обязательной с точки зрения допускаемого перерегулирования, то на практике часто встречаются контура с затуханием $\xi_{n_y} > 0,777$. Тогда изучаемый характеристический полином (17) должен с расщеплением постоянных времени вернуться к исходному полиному (3). Точкой перехода к исходному полиному будем считать точку

$$\xi_{n_y} = 0,777, \quad (33)$$

в которой ξ_2 достигает величины 0,707, которую будем сохранять при любом значении ξ_{n_y} , большем величины (33). Потребуем для (8) выполнения условия

$$\frac{2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y}}{\sqrt{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Для мягкого перехода от системы со структурой (17), порождаемой полиномом Баттерворта, с сохранением в нем выражения (31), введем множителем некоторый коэффициент пропорциональности k_1 , получим

$$T_1 = k_1 2\xi_{n_y} T_{n_y}. \quad (35)$$

Подставим (35) в (34), получим уравнение

$$\frac{4k_1\xi_{n_y}^2 - 1}{\sqrt{4k_1\xi_{n_y}^2(k_1 - 1) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

и найдем искомый коэффициент

$$k_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi_{n_y}\sqrt{2\xi_{n_y}^2 - 1}}. \quad (36)$$

После нахождения коэффициента коррекции k_1 (36) осталось найти коэффициент усиления k_{V_y} контура отработки вертикальной скорости, который определяется подстановкой (36) в (35) и далее в (5). Тогда формулы для вычисления коэффициента усиления, с учетом (19), для всех значений $\xi_{n_y} > 1/\sqrt{2}$ примут вид:

$$k_{V_{y1}} = \frac{1}{8gT_{n_y}\xi_{n_y}^3} \quad \text{при } 0,707 \leq \xi_{n_y} \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}; \quad (37)$$

$$k_{V_{y2}} = \frac{\sqrt{2}(4\xi_{n_y}^2 - 1)\sqrt{2\xi_{n_y}^2 - 1} - 4\xi_{n_y}(2\xi_{n_y}^2 - 1)}{gT_{n_y}} \quad \text{при } \xi_{n_y} > \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}. \quad (38)$$

Зависимость коэффициента k_{V_y} от ξ_{n_y} для $T_{n_y} = 0,5$ с в сопряжении двухдиапазонных ветвей $k_{V_{y1}}$ (37) и $k_{V_{y2}}$ (38) показана на рис. 3, на котором недействующие участки кривых показаны штриховыми линиями.

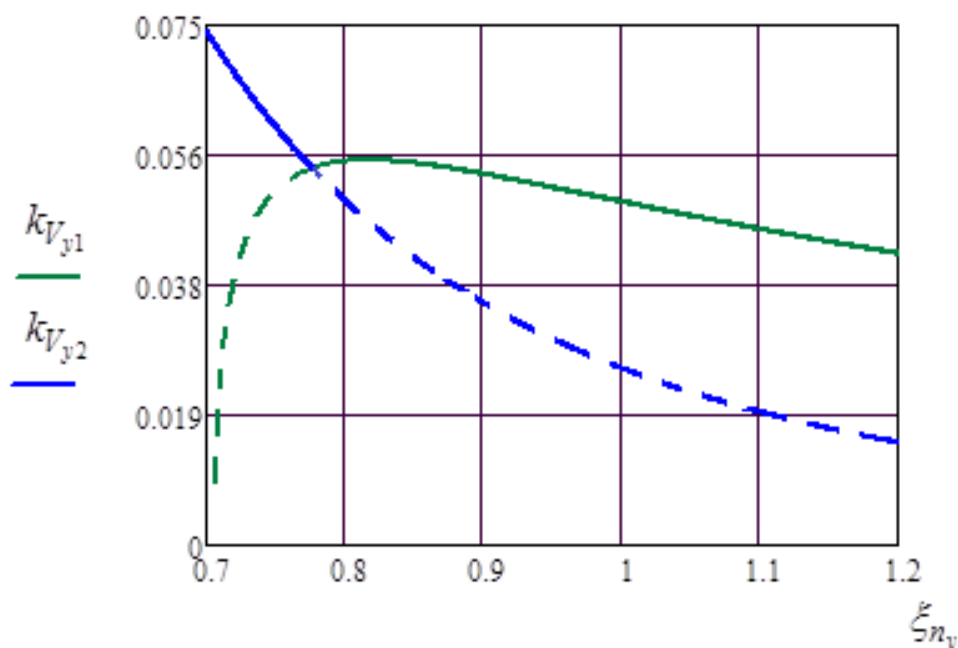


Рис. 3. Двухдиапазонный график зависимости коэффициента усиления от относительного коэффициента затухания контура перегрузки

Как видно из графика, коэффициент k_{V_y} при увеличении относительного коэффициента затухания от 0,777 до 1...1,2 возрастает в два раза по сравнению с ветвью работы системы в сохраненном варианте структуры Баттерворта и увеличивает быстродействие.

На рис. 4 показаны графики переходных процессов при $T_{n_y} = 0,5$ с для значений $\xi_{n_y} = 0,7, 0,75, 0,8, 0,9, 1,0$ и 1,2.

Величины перерегулирования не зависят от значений постоянной времени T_{n_y} . Это свойство найденного решения иллюстрирует рис. 5, на котором показано изменение переходных движений для $T_{n_y} = 0,3, 0,6$ с при $\xi_{n_y} = 0,7, 0,8$. Как видно из графиков, перерегулирование зависит только от относительного коэффициента затухания контура перегрузки, а увеличение постоянной времени приводит только к увеличению длительности переходного процесса без изменения его качества.

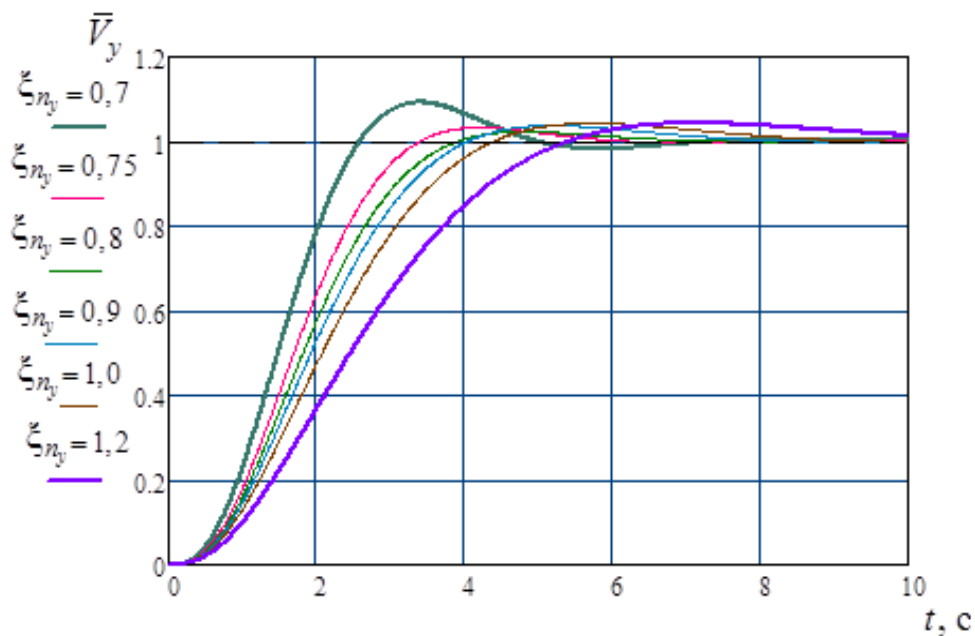


Рис. 4. Графики переходных процессов настроенной системы стабилизации V_y при различных значениях ξ_{n_y}

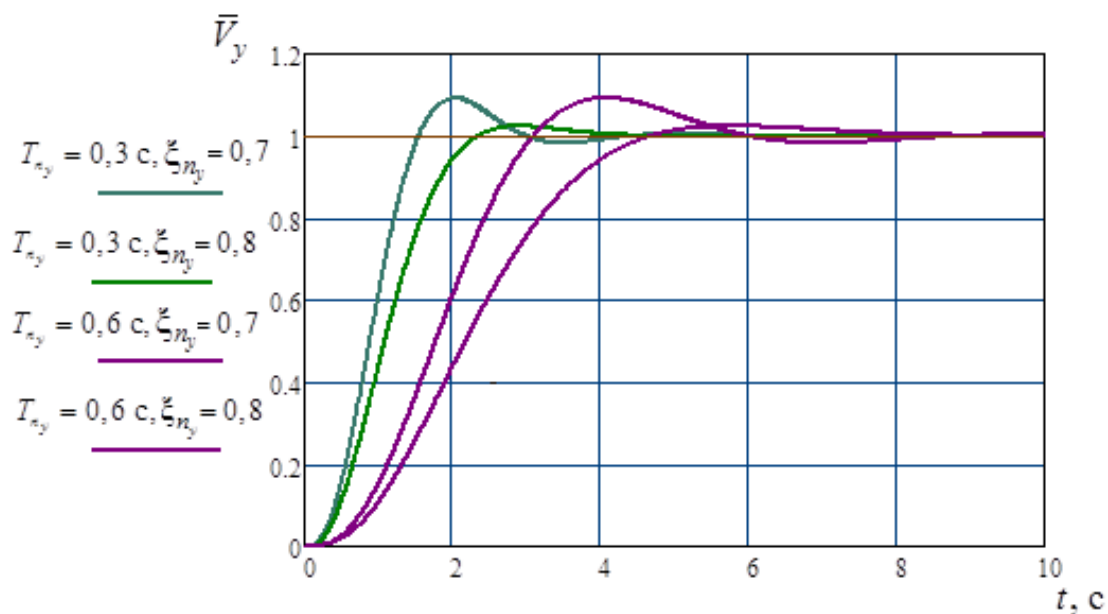


Рис. 5. Переходные движения с независимым от постоянных времени T_{n_y} перерегулированием

Проверим робастность полученного алгоритма (37, 38) синтеза контура стабилизации вертикальной скорости полета тяжелого самолета. Как было показано выше, нелинейная зависимость коэффициента усиления k_{V_y} проявляет себя от аргумента ξ_{n_y} . От постоянной времени T_{n_y} зависимость k_{V_y} носит характер обратной пропорциональности. Действительно, на графике расщепляющихся ветвей функциональной зависимости $k_{V_y} = f(\xi_{n_y})$ при $T_{n_y} = \text{const}$ в диапазоне $\xi_{n_y} = 0,75 \dots 1,1$ коэффициент k_{V_y} лежит в диапазоне $0,045 \dots 0,055$ при среднем значении $0,05$. То есть в этом диапазоне коэффициент усиления с точностью $\pm 10\%$ близок к постоянной величине, что определяет практическую инвариантность качества процесса от неточного знания относительного коэффициента затухания. Тогда в этом случае имеется относительная независимость между параметрами ξ_{n_y} и T_{n_y} , что позволяет провести проверку робастности синтезированного контура при вариации только постоянной времени. Так как диапазон изменения T_{n_y} составляет для тяжелых самолетов $0,3 \dots 0,6$ с, проведем при $\xi_{n_y} = 0,8$ оценку разброса параметра в указанном диапазоне. То есть при априорном значении $T_{n_y} = 0,6$ с, при котором рассчитывается по формулам (37, 38) k_{V_y} , будем считать при моделировании реальным значением $\hat{T}_{n_y} = 0,3$ с. Также проверим вариант для $T_{n_y} = 0,3$ с при реальном значении $\hat{T}_{n_y} = 0,6$ с.

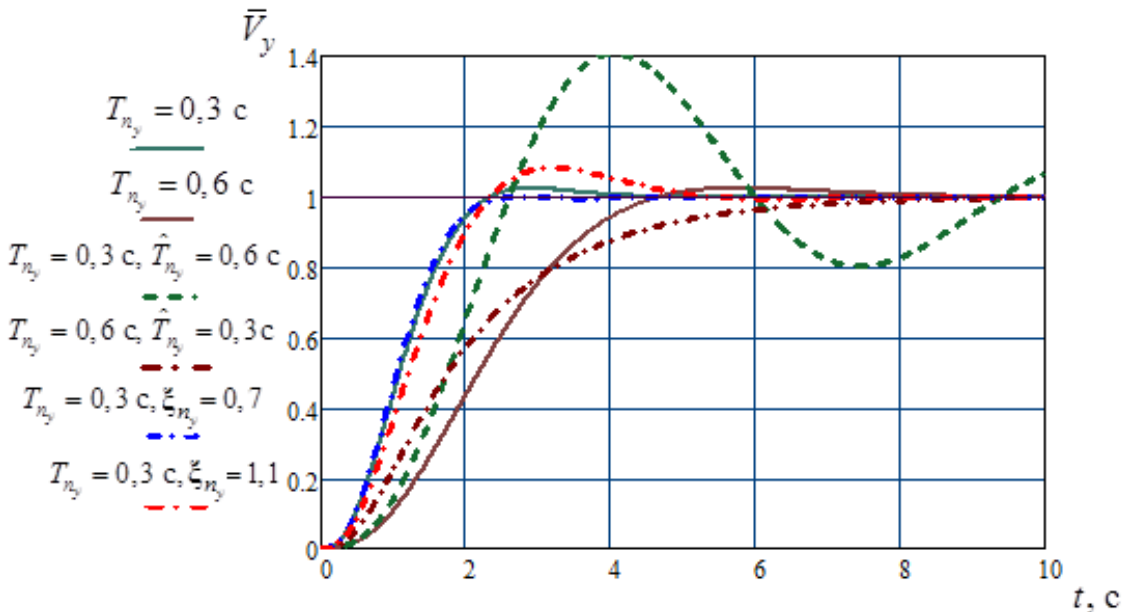


Рис. 6. Графики переходных движений при предельных разбросах априорных (сплошные кривые) и реальных значений \hat{T}_{n_y} и $\hat{\xi}_{n_y}$ — пунктирные линии

Результаты моделирования при разбросе T_{n_y} в своем полном диапазоне представлены на рис. 6. Здесь же приведен пример разброса только относительного коэффициента затухания при значениях $\xi_{n_y} = 0,7, 1,1$ и реальной величине $\xi_{n_y} = 0,8$.

Анализ графиков на рис. 6 показывает: практическую независимость по перерегулированию от ошибочного определения затухания, переход к апериодическому процессу при большем значении расчетной величины постоянной времени от практической (вариант $T_{n_y} = 0,6$ с, $\hat{T}_{n_y} = 0,3$ с) и появление колебательности в крайнем варианте $T_{n_y} = 0,3$ с, $\hat{T}_{n_y} = 0,6$ с. Для интервала расхождения значений $T_{n_y} = 0,3$ с, $\hat{T}_{n_y} = 0,4$ с перерегулирование не превышает 10%, что следует считать максимально допустимым разбросом оценки постоянной времени в сторону ее увеличения. Поэтому в целях сохранения приемлемого качества переходных процессов при использовании информации о параметрах контура перегрузки для расчетов желательно завышать постоянную времени относительно ее априорного значения не менее чем на 10%.

Вопрос выхода самолета на ограничение по перегрузке при обработке больших значений заданной вертикальной скорости не является препятствием для применения расчетов по формулам (37, 38) в силу того, что синтезированный контур является статическим, а контур перегрузки априорно устойчив. Только, в силу этого, будет увеличено время отработки V_y , а при входе в линейную зону управления по перегрузке при $\Delta V_{y_0} = \frac{\Delta n_y^{\text{доп}}}{k_{V_y}}$ и соответствующей ей производной по времени $V'_{y_0} = g \Delta n_y^{\text{доп}}$ качество процесса в силу линейности процесса управления будет соответствовать расчетному.

Для этого рассмотрим для нашей системы третьего порядка поведение свободной составляющей $V_{y_0}(p)$ движения, вызванного входом контура в линейную зону после нахождения на ограничении по перегрузке в наборе высоты. На основании [20] изображение Лапласа свободного переходного процесса $V_{y_0}(t)$ имеет вид:

$$V_y(p) = \frac{-\Delta V_{y_0} \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^2 + \left(-\Delta V_{y_0} \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} + V'_{y_0} \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} \right) p + (-\Delta V_{y_0}) \frac{1}{gk_{V_y}} + V'_{y_0} \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}}}{\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1} \quad (39)$$

Знак «минус» в (39) обозначает начальную изображающую точку $(-\Delta V_{y_0}, V'_{y_0})$ фазовой плоскости свободной системы, осуществляющей

движение при действии положительной перегрузки с устранением в наборе высоты начальной ошибки по вертикальной скорости, которая должна уменьшаться до нуля при стремлении к нулевому равносному состоянию. Поэтому проведено смещение положения равновесия на $-\Delta V_{y_0}$ для последующего движения свободной устойчивой системы к тривиальному нулевому состоянию, для которого действует формула (39).

На рис. 7 сведены по вертикальной оси два переходных процесса. Первый — свободное движение $V_{y_0}^{\text{своб}}(t)$, то есть оригинал изображения (39) при входе самолета в линейную зону по перегрузке менее ограничения $\Delta n_y^{\text{доп}} = 0,3$ и параметрах $T_{n_y} = 0,4$ с, $\xi_{n_y} = 0,75$. При соответствующем расчете k_{V_y} (37) начальная вертикальная скорость входа системы в линейную зону со своей полной структурой (2) составляет $\Delta V_{y_0} = 3,97$ м/с. Второй процесс — переходное вынужденное движение системы при отработке скачка заданной вертикальной скорости с $V_y^{\text{зад}} = 3,97$ м/с.

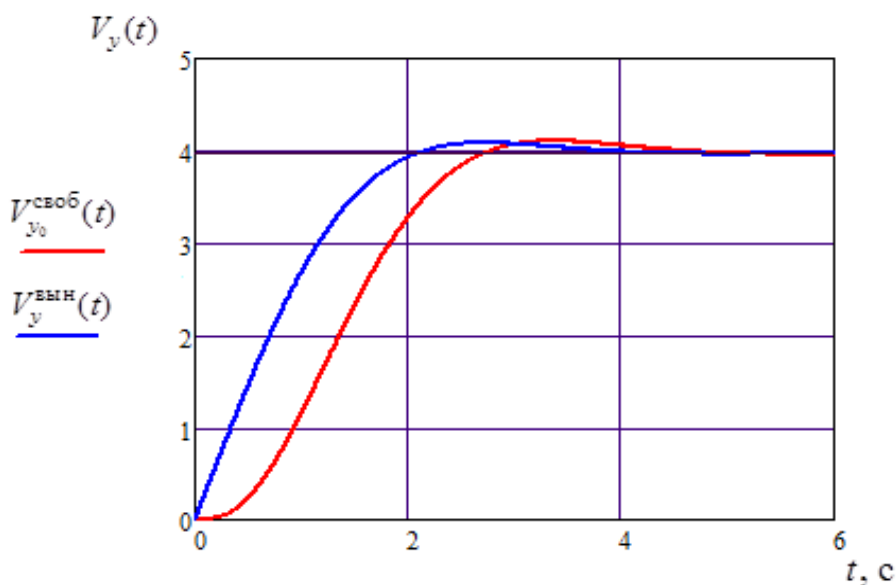


Рис. 7. Сравнение переходных процессов свободного и вынужденного движений при отработке одинаковых приращений по ошибке управления ΔV_y

Как видно из графиков рис. 7, перерегулирование обоих процессов совпадает, поэтому полученный метод синтеза можно применять с использованием ограничителя заданной перегрузки, на которую выходит контур перегрузки в силу своей устойчивости и высокого качества управления на интервале относительного коэффициента затухания $\xi_{n_y} = 0,707 \dots 1,2$.

В итоге на основе полученного аналитического решения обратной задачи модального управления найден высокоточный закон управления вертикальной скоростью полета с помощью простого регулятора минимального порядка, имеющего вид функции от параметров контура отработки перегрузки. Функциональный регулятор обеспечивает желаемое качество управления, инвариантен по качеству вписывания в заданную вертикальную скорость после действия ограничения по нормальной перегрузке, обладает робастными свойствами и может быть рекомендован для применения в системах автоматического управления тяжелых самолетов.

Литература

1. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 472 с.
3. *Ackermann J. E.* Pole Placement Control. Control Systems, Robotics and Automation. Vol. VIII, pp. 74–100.
4. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах». М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
5. *Воронов А. А.* Синтез минимальных модальных регуляторов, действующих от измеримых входа и выхода линейного объекта. // Автоматика и телемеханика, № 2, 1993. – С. 34–51.
6. *Лозгачев Г. И.* Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы. // Автоматика и телемеханика, № 5, 1995. – С. 49–55.
7. *Григорьев В. В., Журавлева Н. В., Лукьянова Г. В., Сергеев К. А.* Синтез систем автоматического управления методом модального управления. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2007. – 108 с
8. *Красовский А. А., Поспелов Г. С.* Основы автоматики и технической кибернетики. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 600 с.
9. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. Издание третье, исправленное. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 768 с.
10. *Ким Д. П.* Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 164 с.
11. *Гайдук А. Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 418 с.

12. *Воевода А. А., Мелешкин А. И.* О модальном синтезе линейных систем с регулятором пониженного порядка. // Сб. науч. тр. НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, №3(5), 1996. – С. 121–125.
13. *Мелешкин А. И.* О взаимном расположении корней полинома и его производных в задаче синтеза линейных регуляторов пониженного порядка. // Научные основы высоких технологий: Тр. Междунар. науч.-техн. конф. Новосибирск, т.1, 1997. – С. 27–28.
14. *Бойченко В. А., Курдюков А. П., Тимин В. Н., Чайковский М. М., Ядыкин И. Б.* Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры. // Управление большими системами: сборник трудов, т. 19, 2007. – С. 23–126.
15. *Воевода А. А., Вороной В. В., Шоба Е. В.* Модальный синтез многоканального регулятора пониженного порядка с использованием «обратной» производной на примере трехмассовой системы. // Науч. вестник НГТУ, №1(46), 2012. – С. 15–22.
16. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
17. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: ЛКВВИА, 1949.
18. *Попов Е. П.* Динамика систем автоматического управления. – М.: Гостехиздат, 1954. – 798 с.
19. *Кочетков Ю. А.* Основы автоматики авиационного оборудования. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1975. – 454 с.
20. *Кочетков Ю. А.* Основы автоматики авиационного оборудования. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1995. – 574 с.
21. *Р. Зааль.* Справочник по расчетам фильтров: пер. с нем. / Р. Зааль. – М.: Радио и связь, 1984. – 752 с.
22. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 416 с.