

УДК 629.7.05

## О ВЫЧИСЛЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ГЕОГРАФИЧЕСКОГО ОПОРНОГО ТРЕХГРАННИКА БИНС

*Александр Владимирович ФОМИЧЕВ, к. ф.-м. н.*

*ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»*

*E-mail: inbox@aomiea.ru*

*В навигационных алгоритмах авиационных БИНС используется географический опорный трехгранник с различными вариантами азимутальной ориентации. Его абсолютная угловая скорость складывается из угловой скорости Земли и угловой скорости движения относительно Земли, традиционно вычисляемой через разложение точных формул по высоте над поверхностью земного эллипсоида и его эксцентриситету.*

*В статье исследуются навигационные погрешности от ограничения числа членов стандартных разложений и приводятся альтернативные формулы для относительной угловой скорости, которые могут представлять интерес для навигационных систем высокой точности.*

**Ключевые слова:** *бесплатформенная инерциальная навигационная система, опорный географический трехгранник, угловая скорость, навигационные погрешности.*

## SINS GEOGRAPHIC REFERENCE TRIAD RELATIVE ANGULAR VELOCITY CALCULATION

*Alexander V. FOMICHEV, PhD in Phys. and Math.*

*‘Moscow Institute of Electromechanics and Automatics’ PJSC*

*E-Mail: inbox@aomiea.ru*

*Geographic reference triad with different types of azimuth orientation is used in aircraft Strapdown Inertial Navigation System (SINS) navigation algorithms. Its absolute angular velocity is the sum of the Earth angular velocity and the angular velocity of motion relative to the Earth traditionally calculated through an expansion of exact formulas for height above the Earth ellipsoid and its eccentricity.*

*The article examines the navigation errors caused by limiting the number of standard expansion terms and provides alternative formulas for relative angular velocity. Such formulas may be of interest for use in high-precision navigation systems.*

**Keywords:** *Strapdown Inertial Navigation System, geographic reference triad, angular velocity, navigation errors.*

## Введение

Большинство пилотажно-навигационных параметров, выдаваемых авиационной БИНС, связано с географическим опорным трехгранником — от него отсчитываются параметры ориентации, в нем же задаются составляющие вектора скорости, а ориентация опорного трехгранника относительно гринвичского задает текущее положение. Погрешности ориентации опорного трехгранника влияют на точность навигационного решения по всем параметрам.

В идеальном случае (т. е. при отсутствии инструментальных и вычислительных ошибок) одна из координатных плоскостей географического опорного трехгранника совпадает с касательной плоскостью к земному эллипсоиду, если БИНС находится на его поверхности. Эллипсоид является моделью поверхности Земли и близок к поверхности уровня сил тяготения и сил инерции, связанных с вращением Земли, из-за чего касательная плоскость к эллипсоиду практически ортогональна линии отвеса и называется горизонтальной.

При поднятии БИНС над поверхностью эллипсоида горизонтальная координатная плоскость опорного трехгранника переносится параллельно (см. рис. 1).

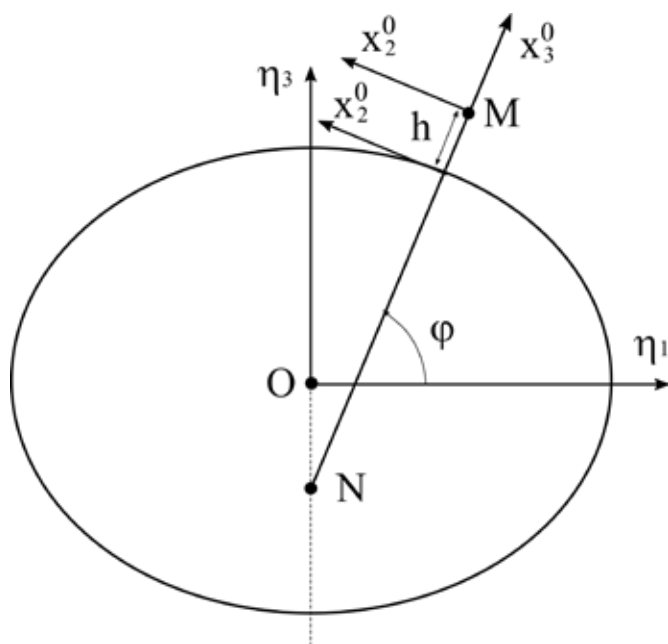


Рис. 1. Ориентация географического трехгранника  $x^0$  относительно гринвичской системы координат  $\eta$  при положении БИНС  $M$  в плоскости гринвичского меридиана; оси  $x_1^0$  и  $\eta_2$  ортогональны плоскости рисунка и не изображены

Различные способы азимутальной ориентации описаны, например, в [1–3]. В данной статье рассматривается наиболее распространенная азимутально полусвободная ориентация.

Для поддержания ориентации опорного трехгранника относительно Земли ему сообщается угловая скорость Земли  $u$  и относительная угловая скорость  $\Omega$ , обеспечивающая заданную ориентацию при произвольном движении БИНС в окрестности поверхности Земли. Угловая скорость  $\Omega$  вычисляется по текущему положению, скорости относительно Земли и параметрам эллипсоида.

Для заданных параметров эллипсоида  $\Omega$  вычисляется абсолютно точно, однако в алгоритмах вместо этого традиционно используются разложения точных формул с точностью до членов порядка  $h/a$  и  $e^2$ , где  $h$  — высота над поверхностью земного эллипсоида,  $e^2$  — эксцентриситет земного эллипсоида,  $a$  — его экваториальный радиус.

В статье оценивается точность этих разложений и анализируется необходимость учета членов более высокого порядка. Приводятся уточненные формулы для относительной угловой скорости.

### Точные и приближенные выражения относительной угловой скорости

В литературе по инерциальной навигации [1–3] выведены точные формулы, связывающие составляющие линейной скорости относительно Земли с проекциями относительной угловой скорости в осях опорного трехгранника при движении в окрестности земного эллипсоида с заданными параметрами. Приведем их без вывода, который можно найти в [1–3]:

$$\begin{aligned} V_1 &= (R_e + h)\Omega_2 - \frac{e^2 R_e b_{13}}{1 - e^2 b_{33}^2} (\Omega_2 b_{13} - \Omega_1 b_{23}), \\ V_1 &= -(R_e + h)\Omega_1 - \frac{e^2 R_e b_{23}}{1 - e^2 b_{33}^2} (\Omega_2 b_{13} - \Omega_1 b_{23}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь:

$V_1, V_2$  — проекции скорости относительно Земли на горизонтальные оси опорного трехгранника;

$\Omega_1, \Omega_2$  — проекции относительной угловой скорости на горизонтальные оси опорного трехгранника;

$R_e = a / \sqrt{1 - e^2 b_{33}^2}$  — долготный радиус кривизны;

$a$  — экваториальный радиус земного эллипсоида;

$e^2$  — квадрат его эксцентриситета;

$b_{ij}$  — элементы матрицы ориентации опорного трехгранника относительно гринвичского.

В бортовом алгоритме БИНС используются обратные выражения угловых скоростей  $\Omega_1, \Omega_2$  через линейные скорости  $V_1, V_2$ . При этом, как правило, применяются следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -\frac{V_2}{a} \left[ 1 + e^2 \left( b_{23}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) - \frac{h}{a} \right] - e^2 b_{13} b_{23} \frac{V_1}{a}, \\ \Omega_2 &= \frac{V_1}{a} \left[ 1 + e^2 \left( b_{13}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) - \frac{h}{a} \right] + e^2 b_{13} b_{23} \frac{V_2}{a},\end{aligned}\tag{2}$$

получающиеся при разложении (1) по малым параметрам  $e^2$  и  $h/a$ , либо аналогичные выражения того же порядка точности. Представляет интерес оценить остаточные члены этих разложений для характерных авиационных скоростей и высот, исследовать целесообразность их учета в навигационных алгоритмах и получить уточненные формулы.

Точные выражения для  $\Omega_1, \Omega_2$  получаются разрешением линейной системы (1) относительно  $\Omega_1, \Omega_2$ . Можно показать, что

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -\frac{\left[ R_e + h - e^2 (b_{13}^2 + b_{33}^2) R_e - e^2 b_{33}^2 h \right] V_2 + e^2 b_{13} b_{23} R_e V_1}{(R_e + h) \left[ R_e + h - e^2 (R_e + b_{33}^2 h) \right]}, \\ \Omega_2 &= \frac{\left[ R_e + h - e^2 (b_{23}^2 + b_{33}^2) R_e - e^2 b_{33}^2 h \right] V_1 + e^2 b_{13} b_{23} R_e V_2}{(R_e + h) \left[ R_e + h - e^2 (R_e + b_{33}^2 h) \right]}.\end{aligned}\tag{3}$$

Для оценки отличий выражений (2) и (3) в (3) подставляется  $R_e = a / \sqrt{1 - e^2 b_{33}^2}$ , а полученные формулы раскладываются в ряды Тейлора по малым параметрам  $e^2$  и  $\mu = h/a$  с точностью до членов порядка  $\sim e^4, \mu^2, \mu e^2$ . Они имеют вид:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -\frac{V_2}{a} - e^2 \left[ b_{13} b_{23} \frac{V_1}{a} + \left( b_{23}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) \frac{V_2}{a} \right] + \mu \frac{V_2}{a} - \\ &\quad - e^4 \frac{\left( 4b_{13} b_{23} b_{33}^2 + 8b_{13} b_{23}^3 + 8b_{13}^3 b_{23} \right) V_1 + \left( 8b_{13}^2 b_{23}^2 + 4b_{23}^2 b_{33}^2 + 8b_{23}^4 - b_{33}^4 \right) V_2}{8a} - \\ &\quad - \mu e^2 \frac{\left( b_{33}^2 - 2b_{23}^2 \right) V_2 - 2b_{13} b_{23} V_1}{a} - \mu^2 \frac{V_2}{a},\end{aligned}\tag{4}$$

$$\Omega_2 = \frac{V_1}{a} + e^2 \left[ b_{13} b_{23} \frac{V_2}{a} + \left( b_{13}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) \frac{V_1}{a} \right] - \mu \frac{V_1}{a} -$$

$$- e^4 \frac{(b_{33}^4 - 8b_{13}^4 - 8b_{13}^2 b_{23}^2 - 4b_{13}^2 b_{33}^2) V_1 - (4b_{13} b_{23} b_{33}^2 + 8b_{13} b_{23}^3 + 8b_{13}^3 b_{23}) V_2}{8a} -$$

$$- \mu e^2 \frac{(2b_{13}^2 - b_{33}^2) V_1 + 2b_{13} b_{23} V_2}{a} + \mu^2 \frac{V_1}{a}. \quad (4)$$

### Оценка порядков членов разложения и их влияния на точность навигационного решения

Формулы (4) позволяют легко оценить порядки величин каждого члена разложения для заданных скоростей и высот движения. Рассмотрим характерные авиационные скорости  $V_1 \sim V_2 \sim V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sim 500$  м/с, высоту  $h \sim 10$  км и учтем, что элементы матрицы  $b_{ij} \sim 1$ , поскольку матрица ортогональна и ее элементы — направляющие косинусы опорного трехгранника относительно гринвичского, не превышающие 1 по модулю. Это позволяет упорядочить члены (4) согласно таблице 1.

Таблица 1. Оценка порядков членов формул (4) с учетом  $e^2 \approx 6,7 \cdot 10^{-3}$ ,  $a \approx 6,38 \cdot 10^6$  м,  $b_{ij} \sim 1$

$V/a$	$\sim 16^\circ/\text{час}$
$e^2 V/a$	$\sim 0,1^\circ/\text{час}$
$\mu V/a$	$\sim 0,025^\circ/\text{час}$
$e^4 V/a$	$\sim 7 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{час}$
$\mu e^4 V/a$	$\sim 1,7 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{час}$
$\mu e^2 V/a$	$\sim 3,9 \cdot 10^{-5}^\circ/\text{час}$

Из теории инерциальной навигации известно, что одной из основных характеристик инерциальной системы является дрейф гироскопического тракта, который удобно измерять в градусах за час. Для систем стандартной точности (1–2 морских мили за час работы) характерен дрейф порядка  $0,01^\circ/\text{час}$ . Другая характерная величина — угловая скорость Земли  $\omega \approx 15^\circ/\text{час}$ . Эти две величины могут служить ориентирами для суждений о существенности либо малости величин из таблицы 1.

Первые три графы таблицы соответствуют членам формул (2). Каждая из величин превышает характерный дрейф гироскопов авиационных БИНС и поэтому существенна. Следующие члены оказываются как минимум на порядок меньшими, что оправдывает их исключение из алгоритмов БИНС.

Однако их учет в большинстве случаев может представлять интерес для точных БИНС либо, если по результатам испытаний погрешности БИНС находятся на грани допуска и устранение любого источника систематических ошибок смещает статистические характеристики погрешностей (математическое ожидание  $m$ , СКО  $\sigma$ , показатель  $|m|+2\sigma$ ) в зону допуска. Как видно из таблицы, в первую очередь должен учитываться член порядка  $\sim e^4$ , тогда как другими членами (4) естественно пренебрегать, что следует, в том числе, из приводимых ниже оценок члена  $\sim e^4$ .

Заметим, что в бортовых алгоритмах БИНС величина  $\Omega$  входит в кинематические уравнения Пуассона

$$\dot{B} = \hat{\Omega}B, \quad (5)$$

где  $\hat{\Omega}$  — кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора  $\Omega$  по правилу

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Если угловая скорость  $\Omega$  вычисляется с погрешностью  $v_\Omega$ , то вместо уравнений (5) получим систему

$$\dot{B}' = \hat{\Omega}'B', \quad \hat{\Omega}' = \hat{\Omega} + \hat{v}_\Omega, \quad (7)$$

где оператор  $\hat{v}_\Omega$  ставится в соответствие вектору  $v_\Omega$  по правилу (6).

Малое отличие вычисленной матрицы  $B'$  от идеальной  $B$  удобно характеризовать оператором малого поворота  $E + \hat{\gamma}$ , где  $\hat{\gamma}$  — кососимметрическая матрица, построенная по правилу (6). Соответствующий ему вектор  $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$  задает эйлеров поворот [4, 5], совмещающий трехгранники, задаваемые матрицами  $B$  и  $B'$ , причем

$$B' = (E + \hat{\gamma})B. \quad (8)$$

Горизонтальные компоненты вектора  $\gamma$  описывают ошибку вычисленного положения в угловой мере [1–3]. Подстановка (8) в (7), отбрасывание малых второго порядка и учет соответствия матрице  $\hat{\Omega}\hat{\gamma} - \hat{\gamma}\hat{\Omega}$  вектора  $\hat{\Omega}\gamma$  дает следующее уравнение для вектора  $\gamma$ :

$$\dot{\gamma} = \hat{\Omega}\gamma + v_{\Omega}. \quad (9)$$

Формулы (4) и (9) позволяют промоделировать эффект от ограничения порядка разложения (2) для любой траектории. Рассмотрим для примера движение от экватора ( $\varphi = 0$ ) по меридиану с постоянной скоростью 500 м/с и на нулевой высоте  $h = 0$ . Это движение подходит для оценки порядков погрешностей и характера их накопления при равномерном полете.

При таком движении изменяется только широта  $\varphi$ , а долгота и угол платформы постоянны. Без ограничения общности они могут считаться нулевыми:  $\lambda = \varepsilon = 0$ . Тогда  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 500$  м/с, т. к. вторая ось географического трехгранника ориентирована на север,  $\varphi = V_2 t (1 + O(e^2)) / a \approx V_2 t / a$ , где  $t$  — время движения в секундах. Также в выражениях (4) используются элементы третьего столбца матрицы  $B$ , выпишем их для рассматриваемого движения:

$$B = \begin{bmatrix} * & * & \cos\varphi \sin\varepsilon \\ * & * & \cos\varphi \cos\varepsilon \\ * & * & \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 0 \Rightarrow b_{13} = 0, \quad b_{23} = \cos\varphi, \quad b_{33} = \sin\varphi. \quad (10)$$

Для вычисления  $\hat{\Omega}$  в (9) достаточно использовать приближенные формулы  $\Omega_1 = -V_2 / a$ ,  $\Omega_2 = 0$ .

Явный вид уравнений (9) следующий:

$$\dot{\gamma}_1 = v_{\Omega 1},$$

$$\dot{\gamma}_2 = \Omega_1 \gamma_3 + v_{\Omega 2},$$

$$\dot{\gamma}_3 = -\Omega_1 \gamma_2.$$

$$\begin{aligned} v_{\Omega 1} &= -e^4 \frac{(4b_{13}^2 b_{23}^2 b_{33}^2 + 8b_{13}^3 b_{23}^3 + 8b_{13}^3 b_{23}^2)}{8a} V_1 + \frac{(8b_{13}^2 b_{23}^2 + 4b_{23}^2 b_{33}^2 + 8b_{23}^4 - b_{33}^4)}{8a} V_2 = \\ &= -e^4 \frac{(8b_{13}^2 b_{23}^2 + 4b_{23}^2 b_{33}^2 + 8b_{23}^4 - b_{33}^4)}{8a} V_2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$v_{\Omega 2} = -e^4 \frac{(b_{33}^4 - 8b_{13}^4 - 8b_{13}^2 b_{23}^2 - 4b_{13}^2 b_{33}^2) V_1 - (4b_{13} b_{23} b_{33}^2 + 8b_{13} b_{23}^3 + 8b_{13}^3 b_{23}) V_2}{8a} =$$

$$= e^4 \frac{(4b_{13} b_{23} b_{33}^2 + 8b_{13} b_{23}^3 + 8b_{13}^3 b_{23}) V_2}{8a} = 0. \quad (11)$$

Для выбранного движения уравнение для  $\gamma_1$  отделяется от остальных  $V_2 \approx a\dot{\varphi}$ , и с учетом (10) выражение для  $v_{\Omega 1}$  переписывается в виде

$$v_{\Omega 1} = -e^4 \frac{(4\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 8\sin^4 \varphi - \sin^4 \varphi) \dot{\varphi}}{8}. \quad (12)$$

Отсюда и из (11) следует, что

$$\gamma_1 = \int_0^t v_{\Omega 1}(\tau) d\tau, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad \text{если } \gamma_2(0) = \gamma_3(0) = 0. \quad (13)$$

Заметим, что формула (12) имеет вид  $v_{\Omega 1} = f(\varphi)\dot{\varphi}$ , поэтому (13) переписывается в виде

$$\gamma_1 = \int_0^t v_{\Omega 1}(\tau) d\tau = \int_0^t f(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}(\tau) d\tau = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi), \quad (14)$$

где  $F(\varphi)$  — первообразная функции  $f(\varphi)$ . Из этого следует независимость погрешности от скорости движения по меридиану, что является спецификой выбранной простейшей траектории.

Погрешность положения, соответствующая угловой ошибке  $\gamma_1$ , направлена по меридиану и описывается формулой

$$\Delta r_2 \approx -a\gamma_1.$$

На рис. 2 построен график для случая равномерного движения со скоростью  $V_2 = 500$  м/с.

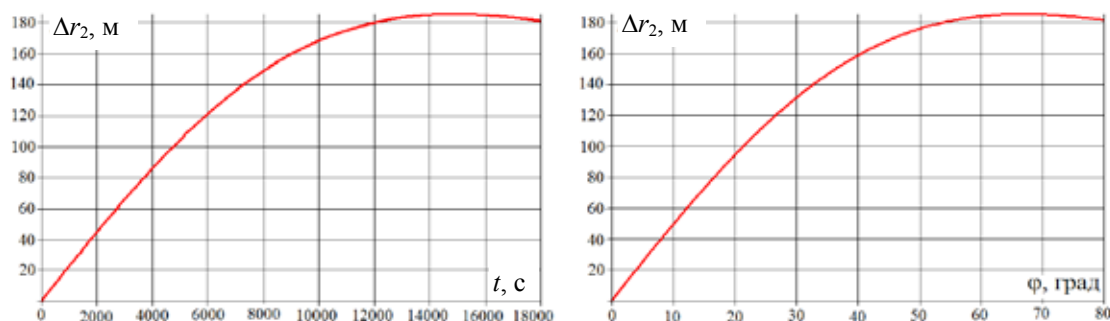


Рис. 2. Зависимости погрешностей положения, обусловленных использованием формул (2) вместо точных формул (3), от времени и широты для движения по меридиану



Таким образом, погрешности разложений (2) вносят методические погрешности вычисления координат, однако они на порядок меньше характерных погрешностей БИНС стандартного класса точности.

### **Заключение**

В статье исследовано влияние малых членов разложений формул для относительной угловой скорости географического трехгранника, обычно отбрасываемых в алгоритмах БИНС стандартной точности порядка морской мили за час. Показано, что это допущение естественно для систем данного класса.

Однако для некоторых маневров, простейший из которых рассмотрен в статье, отбрасывание малых членов ведет к методическим погрешностям порядка нескольких десятков метров за час работы системы при движении с характерными авиационными скоростями.

Приведены точные и приближенные формулы для относительных угловых скоростей, устраняющие установленные методические погрешности.

## Литература

1. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. – 136 с.
2. Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А. Краткий курс теории инерциальной навигации. М.: ИПУ РАН, 2022. – 148 с.
3. Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы инерциальных навигационных систем. Издательство Московского университета, 2020. – 164 с.
4. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. Москва. Физматлит. 2001. – 320 с.
5. Фомичев А. В. Кинематика точки и твердого тела. М.: МФТИ, 2021. – 125 с.