

УДК 629.7.05

АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Юрий Павлович НИКОЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук, с. н. с.

ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

E-mail: aomiea@aviapribor.ru

Основной геометрический объект исследований в данной работе — многомерная область устойчивости в пространстве коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n характеристического уравнения динамической системы. Исследование канонической области устойчивости (определение общих характеристик, разработка эффективных методов построения и т. д.) продолжает оставаться одной из важных проблем современной теории линейных динамических систем. Трудность ее решения связана со сложностью геометрии и структуры многомерной области устойчивости.

Прикладные результаты работы направлены на создание современных методов адаптации летательных аппаратов.

Ключевые слова: *адаптация, многомерная область устойчивости, параметрические уравнения кривой, выпуклость, число сочетаний, самопересечение граничной кривой, геометрия областей устойчивости, канал крена, алгоритм адаптации.*

ANALYSIS OF CHARACTERISTIC STABILITY DOMAINS GEOMETRY FOR ONE CLASS OF FEEDBACK SYSTEMS

Yury P. NIKOLAEV, D. Sc. in Phys and Math

'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

E-mail: aomiea@aviapribor.ru

The main geometrical subject of the study in this paper is multidimensional stability domain in a_0, a_1, \dots, a_n coefficient space of the dynamic system characteristic equation. The study of canonical stability domain (overall performance measurement, development of effective design methods etc.) continues to be an important problem of the linear dynamic systems modern theory. The difficulty of the problem solution is connected with multidimensional stability domain geometry and structure complexity. Practical results of the study are focused on creation of modern methods of aircraft adaptation.

Keywords: *adaptation, multidimensional stability domain, parametric equations of a curve, convexity, number of combinations, self-crossing of a boundary curve, geometry of stability domains, roll channel, adaptation algorithm.*

1. Введение

В настоящее время в теории и практике автоматического управления разрабатывается и реализуется универсальный подход к построению нового поколения методов адаптации.

Показательный пример современных достижений в данной области — система управления истребителя пятого поколения ATD-X Shinshin (Япония).

В этой системе бортовой компьютер сможет определить полученные повреждения конструкции самолета и скорректировать работу оставшихся целыми аэродинамических элементов так, чтобы полностью восстановить управляемость истребителем. Прогноз будущего авиационных компьютеров — см. [1].

В качестве базовой математической теории предлагаемых методов адаптации может рассматриваться алгебраическая геометрия, т. е. направление в математике, изучающее геометрические объекты, заданные как множества решений систем алгебраических уравнений. Основной алгебраический объект исследований — характеристическое уравнение произвольного порядка вида $P_n(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n = 0$.

Если считать действительные коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n декартовыми координатами некоторой *изображающей* точки в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1} , то условия Рауса — Гурвица будут определять в этом пространстве многомерную область асимптотической устойчивости. Пространство коэффициентов характеристического полинома называется *каноническим*, так как определение не связано с какой-либо конкретной системой.

Основной геометрический объект исследований: многомерная область устойчивости в пространстве коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n .

Исследование *канонической* области устойчивости (определение общих характеристик, разработка эффективных методов построения и т. д.) продолжает оставаться одной из важных проблем современной теории линейных динамических систем. Трудность ее решения связана со сложностью геометрии и структуры многомерной области устойчивости. В известных работах по теории управления тема вообще не рассматривается (см. [2], [3]). Конкретные полученные результаты — см., например, [4].

Отметим следующую теорему.

Теорема. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1} коэффициентов характеристического полинома при *нечетных* значениях n и при фиксированных (заранее заданных) значениях трех старших коэффициентов a_{n-2}, a_{n-1}, a_n

существует единственная точка, такая, что все ее координаты являются наибольшими (для граничной поверхности многомерной области устойчивости) и определяются формулами:

$$\max a_{2k} = \binom{(n-1)/2}{k} a_{n-1} \left(\frac{2}{(n-1)} \frac{a_{n-2}}{a_n} \right)^{(n-1)/2-k}, \quad k = 0, 1, \dots, (n-3)/2,$$

$$\max a_{2k+1} = \binom{(n-1)/2}{k} a_n \left(\frac{2}{(n-1)} \frac{a_{n-2}}{a_n} \right)^{(n-1)/2-k}, \quad k = 0, 1, \dots, (n-5)/2,$$

где $\binom{(n-1)/2}{k} = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)! k!}$ — число сочетаний из $(n-1)/2$ по k

При $n = 5$ точная верхняя граница для координат точек области устойчивости (при заданных трех старших коэффициентах a_3, a_4, a_5) определяется формулами:

$$\max a_0 = \frac{a_3^2 a_4}{4a_5^2}, \quad \max a_1 = \frac{a_3^2}{4a_5}, \quad \max a_2 = \frac{a_3 a_4}{a_5}, \quad a_3, a_4, a_5 \in R_+$$

Трехмерная область устойчивости (а) в пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2 и ее конструктивные параметры (б), $n = 5$, представлены ниже (рис. 1).

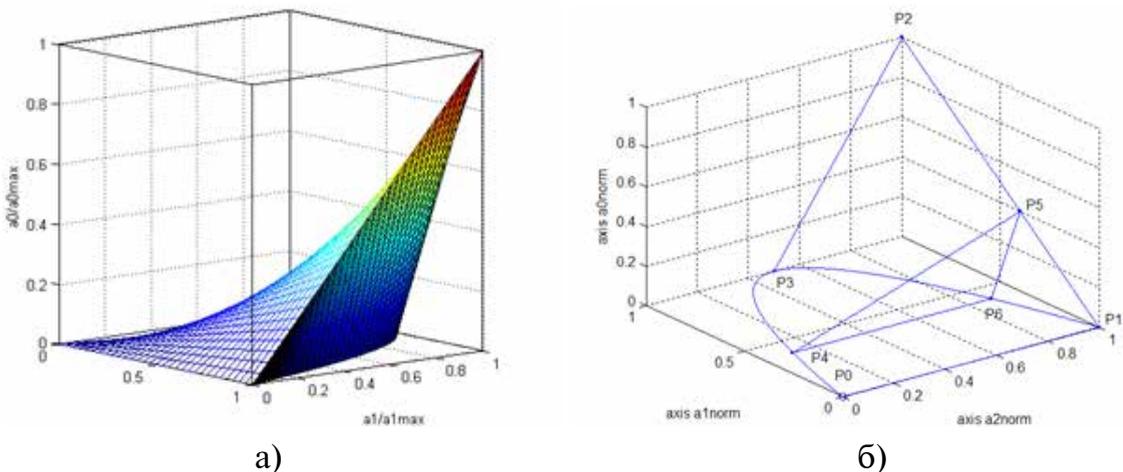


Рис. 1. Трехмерная область устойчивости ($n = 5$) в пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2 и ее конструктивные параметры

Предлагаемый новый подход к построению методов адаптации основан на рассмотренном выше положении о том, что многомерная область устойчивости является ограниченным множеством в пространстве коэффициентов характеристического полинома.

Так как область устойчивости — ограниченное множество, она может быть исследована простым, эффективным, универсальным методом — методом перебора.

Отметим, что построение областей устойчивости в плоскости каких-либо параметров, влияние которых на устойчивость исследуется, или же построение семейства областей в плоскости двух параметров при различных значениях третьего параметра уже давно и продуктивно применяется в теории и практике управления (см., например, [5]).

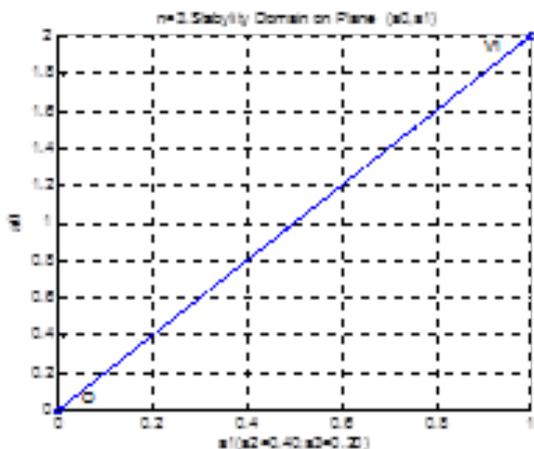
В данной работе будут анализироваться области устойчивости для систем фиксированного порядка $n = 3, 4, 5, 6$.

Характеристическое уравнение системы в общем виде:

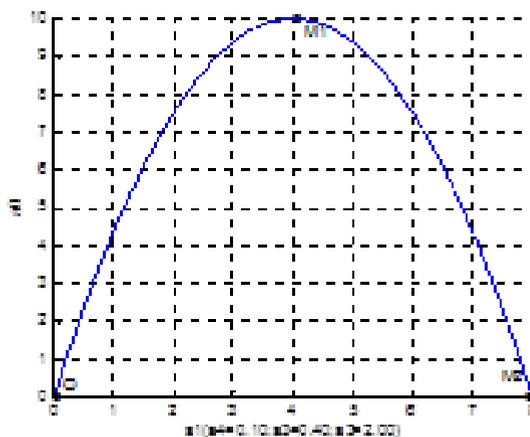
$$P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n = 0, \quad a_n > 0. \quad (1)$$

Для анализа используются плоскости коэффициентов $a_0, a_1; a_1, a_2; \dots$.

2. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n = 3, 4$



$n = 3$



$n = 4$

Рис. 2. Область устойчивости ($n = 3, n = 4$) на плоскости коэффициентов a_0, a_1

Параметрические уравнения граничной кривой для $n = 3$: $a_1 = a_3x$, $a_0 = a_2x$. Область устойчивости расположена в первом квадранте плоскости a_0, a_1 ; она ограничена сверху прямой $a_0 = a_1a_2 / a_3$, а снизу — полуосью a_1 .

Параметрические уравнения граничной кривой для $n = 4$: $a_1 = a_3x$, $a_0 = a_2x - a_4x^2$. Граничная кривая $a_0 = f(a_1)$ является «перевернутой» параболой с вершиной в точке M_1 .

Для доказательства этого утверждения воспользуемся известным положением: квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ является уравнением параболы и графически изображается той же параболой, что и $y = ax^2$, но в отличие от последней имеет вершину не в начале координат, а в некоторой точке M_1 , координаты которой вычисляются по формулам:

$$x(M_1) = -\frac{b}{2a}, \quad y(M_1) = -\frac{D}{4a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac \text{ — дискриминант}$$

квадратного трехчлена.

Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в рассматриваемом случае имеем:

$$y = a_0, \quad x = a_1, \quad a = \left(-\frac{a_4}{a_3}\right), \quad b = \left(\frac{a_2}{a_3}\right), \quad c = 0, \quad D = \frac{a_2^2}{a_3^2}.$$

Координаты вершины параболы (точки M_1):

$$a_1(M_1) = -\frac{b}{2a} = \frac{a_2a_3}{2a_4}, \quad a_0(M_1) = -\frac{D}{4a} = \frac{a_2^2}{4a_4}.$$

Парабола пересекает ось абсцисс в двух точках: в точке O (точка начала координат) и в точке M_2 с координатами $a_0(M_2) = 0$, $a_1(M_2) = \frac{a_2a_3}{a_4}$.

Лемма 1. Граничная кривая области устойчивости при $n = 4$ на плоскости коэффициентов a_0, a_1 является *самонепересекающейся* кривой.

Угол наклона граничной кривой.

Производная в точке O :

$$\left. \frac{da_0}{da_1} \right|_{a_0=0, a_1=0} = \left. \frac{da_0 / dx}{da_1 / dx} \right|_{x=0} = \frac{a_2}{a_3}.$$

Производная в точке M_2 :

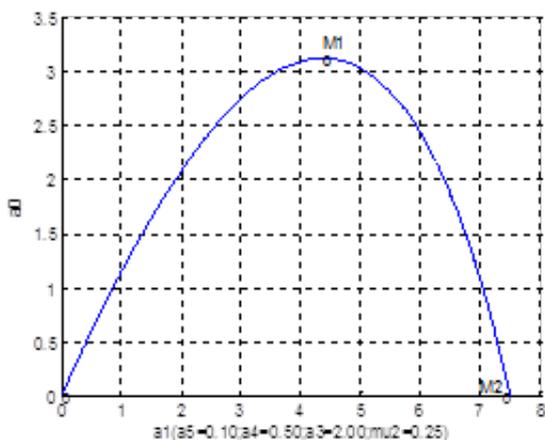
$$\left. \frac{da_0}{da_1} \right|_{a_0=a_0(M_2), a_1=a_1(M_2)} = \left. \frac{da_0/dx}{da_1/dx} \right|_{x=x(M_2)} = -\frac{a_2}{a_3}.$$

3. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n = 5$

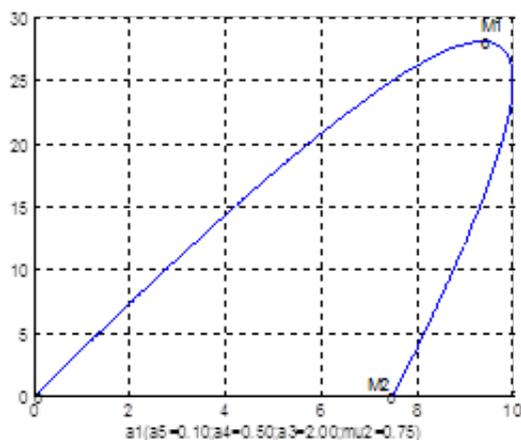
Уравнения граничной кривой.

$$a_1 = a_3x - a_5x^2, \quad a_0 = a_2x - a_4x^2. \quad (2)$$

Известным необходимым условием устойчивости является выполнение неравенства: $\mu_2 = (a_2a_5 / a_3a_4) < 1$.



$$n = 5; \mu_2 = 0,25$$



$$n = 5; \mu_2 = 0,75$$

Рис. 3. Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $\mu_2 = 0,25$ и $\mu_2 = 0,75$

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием отсутствия самопересечения граничной кривой (2) является выполнение неравенства:

$$\mu_2 < 1. \quad (3)$$

Для доказательства *Леммы 2* допустим, что граничная кривая самопересекается. Тогда для точки самопересечения должны выполняться очевидные равенства:

$$a_0(x_1) = a_0(x_2), \quad a_1(x_1) = a_1(x_2) \quad \text{при} \quad 0 \leq x_1 < x_2 < \infty \quad (4)$$

Попробуем определить x_1, x_2 . Получим из (4) с учетом (1), (2):

$$a_3x_1 - a_5x_1^2 = a_3x_2 - a_5x_2^2, \quad a_2x_1 - a_4x_1^2 = a_2x_2 - a_4x_2^2$$

или

$$a_3 - a_5(x_2 + x_1) = 0, \quad a_2 - a_4(x_2 + x_1) = 0.$$

Имеем два линейных уравнения с двумя неизвестными x_1, x_2 . Из этих двух уравнений:

$$x_1 + x_2 = \frac{a_2}{a_4} = \frac{a_3}{a_5}. \quad (5)$$

Т. е. самопересечение может быть только при $\frac{a_2}{a_4} = \frac{a_3}{a_5}$, т. е. только при условии $\mu_2 = 1$. При $\mu_2 < 1$ самопересечение граничной отсутствует, *Лемма 2* доказана.

4. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n = 5$

Уравнения граничной кривой.

$$a_1 = a_3x - a_5x^2, \quad (6)$$

$$a_2 = (a_0 + a_4x^2) / x. \quad (7)$$

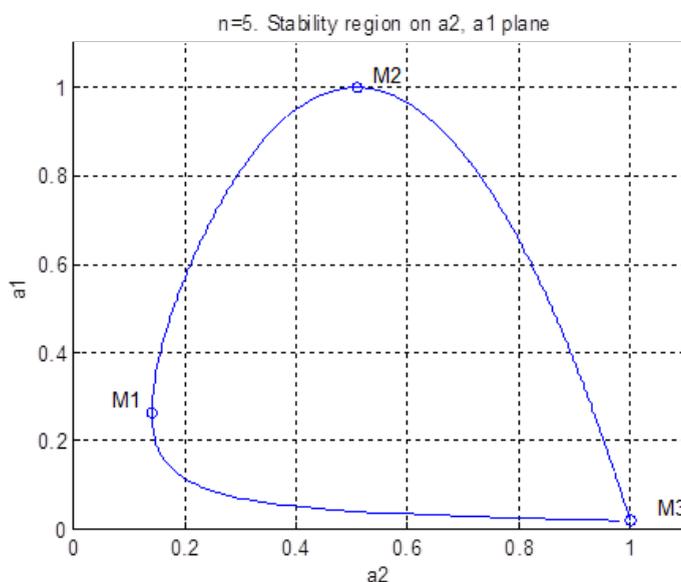


Рис. 4. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n = 5$

Остановимся на анализе точки самопересечения граничной кривой (точка M_3).

Частоты самопересечения x_1, x_2 ($x_1 < x_2$):

$$x_{1,2} = \frac{a_3 a_4 \mp \sqrt{a_3^2 a_4^2 - 4 a_0 a_4 a_5^2}}{2 a_4 a_5}. \quad (8)$$

Утверждение 2.1. Необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости коэффициентов a_2, a_1 является выполнение неравенства:

$$a_0 \leq \frac{a_3^2 a_4}{4 a_5^2}. \quad (9)$$

Примечание.

При $a_0 = a_{0 \max} = a_3^2 a_4 / 4 a_5^2$ имеем

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{a_3 a_4}{2 a_4 a_5} = \frac{a_3}{2 a_5} \quad (10)$$

и область устойчивости стягивается в точку с координатами

$$a_1 = \frac{a_3^2}{4 a_5}, \quad (11)$$

$$a_2 = \frac{a_3 a_4}{a_5}. \quad (12)$$

Проанализируем кривизну граничной кривой на плоскости коэффициентов a_2, a_1 .

Формула для определения кривизны граничной кривой в рассматриваемом случае:

$$K = \pm \frac{a_1'' a_2' - a_2'' a_1'}{(a_2'^2 + a_1'^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

Подставим в формулу (13) значения коэффициентов a_2, a_1 (формулы (6), (7)) и их производных. После преобразований получим:

$$K = \mp \frac{2B_1}{B_2} x, \quad (14)$$

где обозначено

$$B_1 = a_0'' a_1' - a_1'' a_0' = -2(-a_2 a_5 + a_3 a_4), \quad (15)$$

$$B_2 = a_1'^2 + a_0'^2 = (a_2^2 + a_3^2) - 4x(a_2a_4 + a_3a_5) + 4x^2(a_4^2 + a_5^2). \quad (16)$$

Из соотношений (15), (16), опуская выкладки, получим уравнение для вычисления частот самопересечения (см. точка M_3 на рис. 4):

$$a_4a_5x_2^2 - x_2a_3a_4 + a_0a_5 = 0, \quad (17)$$

$$x_1 + x_2 = a_3 / a_5. \quad (18)$$

Формула для вычисления двух частот самопересечения граничной кривой:

$$x_{1,2} = \frac{a_3a_4 \mp \sqrt{a_3^2a_4^2 - 4a_0a_4a_5^2}}{2a_4a_5}. \quad (19)$$

Утверждение 2.2. Необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости коэффициентов a_2 , a_1 является выполнение неравенства:

$$a_0 \leq \frac{a_3^2a_4}{4a_5^2}. \quad (20)$$

Примечание.

При $a_0 = a_{0\max} = a_3^2a_4 / 4a_5^2$ имеем

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{a_3a_4}{2a_4a_5} = \frac{a_3}{2a_5}$$

и область устойчивости стягивается в точку с координатами

$$a_1 = \frac{a_3^2}{4a_5}, \quad a_2 = \frac{a_3a_4}{a_5}. \quad (21)$$

5. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0 , a_1 при $n = 6$

Уравнения граничной кривой.

$$a_1 = a_3x - a_5x^2, \quad (22)$$

$$a_0 = a_2x - a_4x^2 + a_6x^3, \quad (23)$$

где параметр $x \in [0, \infty)$.

Самопересечение граничной кривой.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием отсутствия самопересечения граничной кривой (22), (23) является выполнение неравенства:

$$\mu_2 + \mu_3 < 1, \quad (24)$$

где:

$$\mu_2 = \frac{a_2 a_5}{a_3 a_4}, \quad \mu_3 = \frac{a_3 a_6}{a_4 a_5}. \quad (25)$$

Коротко остановимся на доказательстве *Леммы 2*. Пусть граничная кривая имеет i точек самопересечения ($i = 1, 2, \dots$) и для произвольной i -ой точки самопересечения граничной кривой имеем:

$$a_1(x_1) = a_1(x_2), \quad a_0(x_1) = a_0(x_2). \quad (26)$$

Предполагается, что x_1 и x_2 — действительные числа и для них выполняется соотношение:

$$0 < x_1 < x_2 < \infty. \quad (27)$$

Доказательство строится на определении условий, при выполнении которых значения x_1, x_2 всех точек ($i = 1, 2, \dots$) взаимопересечения граничной кривой на плоскости a_0, a_1 **не удовлетворяют** требованиям неравенства (24), (25).

Из предыдущих уравнений найдем:

$$a_3(x_2 - x_1) - a_5(x_2^2 - x_1^2) = 0, \quad (28)$$

$$a_2(x_2 - x_1) - a_4(x_2^2 - x_1^2) + a_6(x_3^2 - x_3^2) = 0. \quad (29)$$

Мы получили для самопересекающейся граничной кривой систему из двух алгебраических *нелинейных* уравнений с двумя неизвестными x_1, x_2 . Преобразуем уравнения (28), (29). Опуская выкладки, придем к эквивалентной (равносильной) системе из двух линейных уравнений с двумя указанными выше неизвестными:

$$x_1 + x_2 = \frac{a_3}{a_5}, \quad (30)$$

$$\mu_3 \frac{a_4^2}{a_6} (\mu_2 + \mu_3 - 1) - \mu_3 a_4 x_1 + a_6 x_1^2 = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) является квадратичным уравнением с переменной x_1 . Уравнение имеет два корня $x_1^{(i=1)}$ и $x_1^{(i=2)}$:

$$x_1^{(i=1)} = \frac{a_4}{2a_6} \left(\mu_3 - \sqrt{\mu_3^2 - 4\mu_3(\mu_2 + \mu_3 - 1)} \right),$$

$$x_1^{(i=2)} = \frac{a_4}{2a_6} \left(\mu_3 + \sqrt{\mu_3^2 - 4\mu_3(\mu_2 + \mu_3 - 1)} \right).$$
(32)

Из анализа соотношений (32) следует, что требование (27) **не выполняется** тогда и только тогда, когда $\mu_2 + \mu_3 < 1$.

Лемма 2 доказана.

Остановимся коротко на анализе геометрии областей устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 . Предварительно введем в рассмотрение «термин «след» для многомерной области устойчивости на плоскости коэффициентов a_2, a_3 (см. рис. 4).

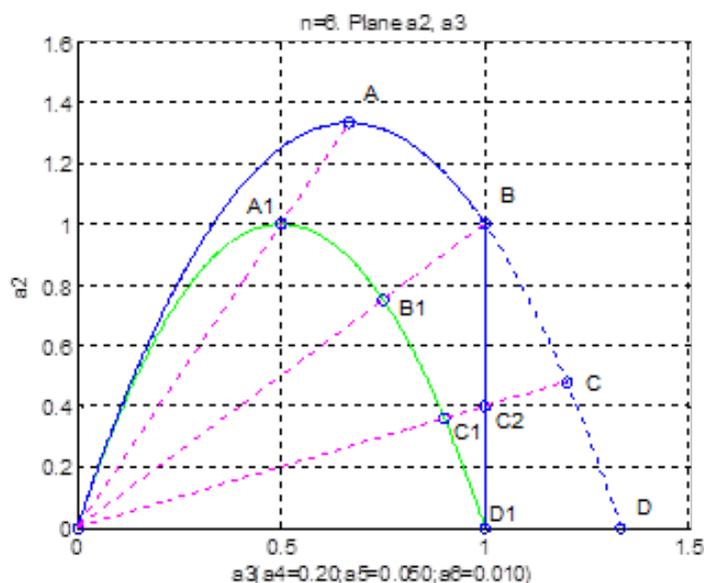
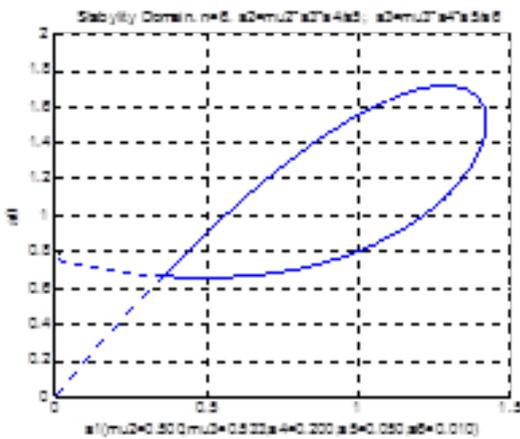
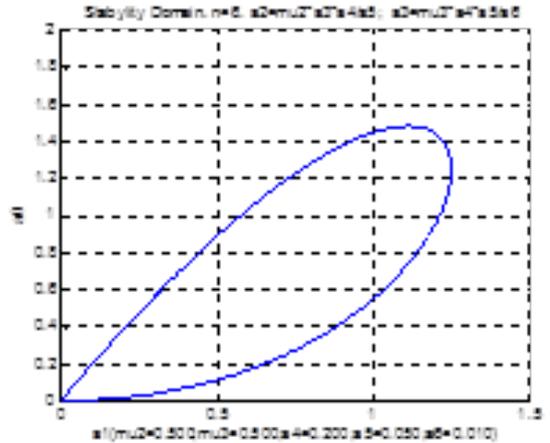


Рис. 5. Плоскость коэффициентов a_2, a_3 . «След» (зеленый цвет) многомерной области устойчивости и проекция (синий цвет, сплошная кривая) области устойчивости на плоскость a_2, a_3

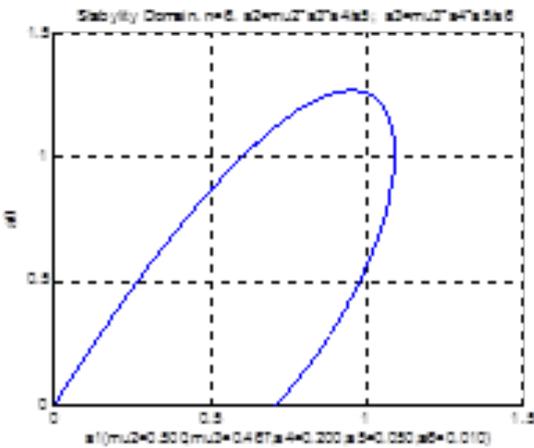
Ниже приводятся области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для характерных фиксированных точек на плоскости коэффициентов a_2, a_3 (см. рис. 5).



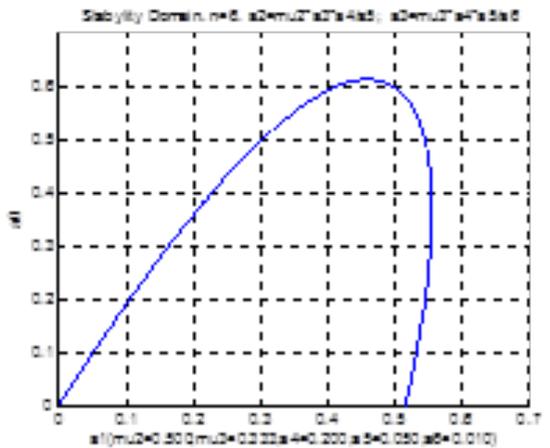
а) $a_3(P_1) = 0,80a_3(A)$



б) $a_3(P_2) = 0,75a_3(A)$



в) $a_3(P_3) = 0,70a_3(A)$

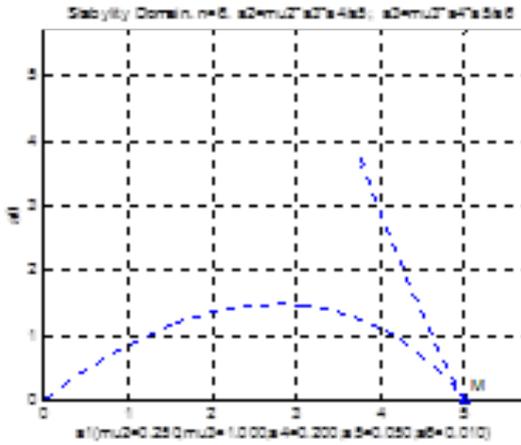


г) $a_3(P_4) = 0,50a_3(A)$

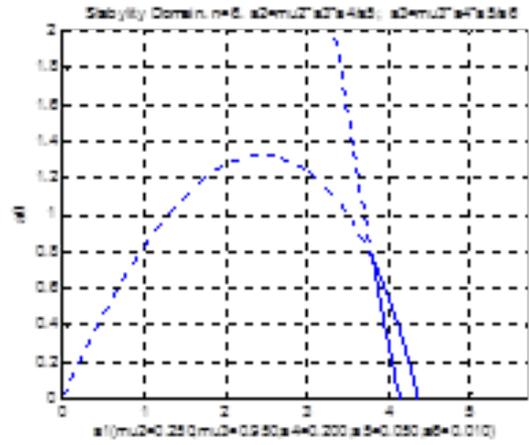
Рис. 6. Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 , соответствующие отдельным точкам на луче OA (см. рис. 5).

Значения координат контрольных точек A, A_j :

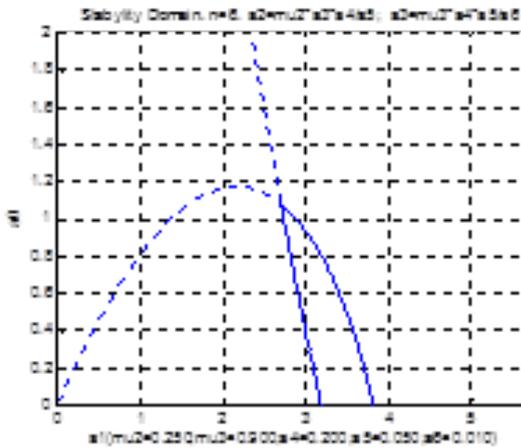
$$a_3(A) = \frac{2}{3} \frac{a_4 a_5}{a_6}, \quad a_2(A) = \frac{a_4^2}{3a_6}; \quad a_3(A_1) = \frac{a_4 a_5}{2a_6}, \quad a_2(A_1) = \frac{a_4^2}{4a_6}.$$



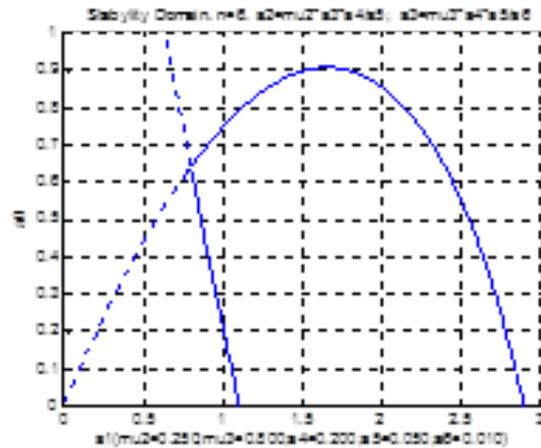
а) $a_3(q_1) = a_3(B) = a_4 a_5 / a_6$



б) $a_3(q_2) = 0,95a_3(B)$



в) $a_3(q_3) = 0,90a_3(B)$

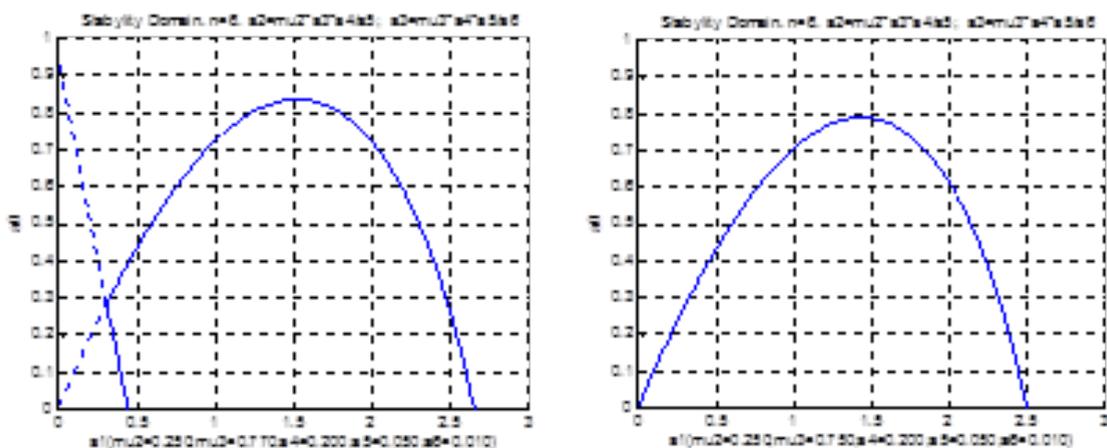


г) $a_3(q_4) = 0,80a_3(B)$

Рис. 7. Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 , соответствующие отдельным точкам на луче OB (см. рис. 5).

Значения координат контрольных точек B, B_1 :

$$a_3(B) = \frac{a_4 a_5}{a_6}, \quad a_3(B_1) = \frac{3}{4} \frac{a_4 a_5}{a_6}$$



д) $a_3(q_5) = 0,77a_3(B)$

е) $a_3(q_6) = 0,75a_3(B) = a_3(B_1)$

Рис. 7 (продолжение). Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 , соответствующие отдельным точкам на луче OB (см. рис. 5).
Значения координат контрольных точек B, B_1 :

$$a_3(B) = \frac{a_4 a_5}{a_6}, \quad a_3(B_1) = \frac{3}{4} \frac{a_4 a_5}{a_6}$$

6. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 . Общие свойства для $n = 3, 4, 5, 6$

Лемма 3. Область устойчивости систем с характеристическим уравнением (1) на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n \leq 6$ является выпуклым множеством.

Доказательство Леммы 3 основано на использовании данных предыдущих разделов.

РАЗДЕЛ 1. Канал крена. Алгоритм адаптации

Передаточная функция разомкнутого канала крена:

$$L^{\text{КРЕН}\Sigma}(s) = \frac{\bar{M}_x^{\delta_{\text{эл}}}}{s + \bar{M}_x^{\omega_x}} \left(k_{\omega_x} + \frac{k_\gamma}{s} \right) \frac{1}{T_1 s + 1} \frac{1}{T_2 s + 1}, \quad (1.1)$$

где обозначено:

s — оператор дифференцирования, $\delta_{\text{эл}}$ — угол отклонения элеронов (внутренних элеронов), $\bar{M}_x^{\delta_{\text{эл}}}$ — коэффициент эффективности элеронов, ω_x — угловая скорость самолета по крену, $\bar{M}_x^{\omega_x}$ — коэффициент угловой скорости, k_γ — передаточное число по крену, k_{ω_x} — передаточное число по угловой скорости, T_1 — постоянная времени привода САЗ, T_2 — постоянная времени рулевого привода.

Аэродинамические коэффициенты:

$$\bar{M}_x^{\omega_x} = \bar{m}_x^{\omega_x} \frac{qSl}{J_x} \frac{l}{2V}, \quad (1.2)$$

$$\bar{M}_x^{\delta_{\text{эл}}} = \bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}} \frac{qSl}{J_x}. \quad (1.3)$$

Примечание.

Аэродинамические коэффициенты — безразмерные величины, характеризующие аэродинамические силу и момент, действующие на тело, движущееся в газообразной (или жидкой) среде. Аэродинамические коэффициенты момента находят как отношение соответствующего аэродинамического момента M к скоростному напору $q = \rho V^2 / 2$, характерной площади S и характерной длине l . Характерные размеры выбираются достаточно произвольно, например, для самолета S — площадь несущих крыльев (в плане), а l — длина хорды крыла; для ракеты S — площадь миделевого сечения, а l — длина ракеты.

В приведенных формулах: V — скорость (истинная) полета, $q = \frac{\rho V^2}{2}$ — скоростной напор, ρ — плотность воздуха, J_x — момент инерции самолета (относительно оси x), S — площадь крыла, l — хорда крыла, $\bar{m}_x^{\omega_x}$, $\bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}}$ — вспомогательные (безразмерные) коэффициенты.

Разделим числитель и знаменатель формулы (1.1) на $\bar{M}_x^{\omega_x}$:

$$L^{\text{КРЕН}\Sigma}(s) = \left(\bar{M}_x^{\delta_{\text{эл}}} / \bar{M}_x^{\omega_x} \right) \frac{(k_{\omega_x} s + k_{\gamma})}{s(T_{\omega_x} s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (1.4)$$

где

$$T_{\omega_x} = 1 / \bar{M}_x^{\omega_x}. \quad (1.5)$$

$$\bar{M}_x^{\delta_{\text{эл}}} / \bar{M}_x^{\omega_x} = \frac{2 \bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}}}{l \bar{m}_x^{\omega_x}} V, \quad (1.6)$$

$$\bar{M}_x^{\omega_x} = \bar{m}_x^{\omega_x} \frac{qsl}{J_x} \frac{l}{2V}. \quad (1.7)$$

Примечание.

Преобразуем (1.5):

$$T_{\omega_x} = 1 / \bar{M}_x^{\omega_x} = \frac{2J_x V 2}{\bar{m}_x^{\omega_x} \rho V^2 S l^2} = \frac{4J_x}{\bar{m}_x^{\omega_x} S l^2 \rho V} = \frac{4}{\bar{m}_x^{\omega_x} S l^2} \frac{J_x}{\rho V}, \quad (1.8)$$

$$T_{\omega_x} = \frac{4}{\bar{m}_x^{\omega_x} S l^2} \frac{J_x}{\rho V}.$$

Коэффициенты характеристического полинома:

$$a_0 = \frac{2 \bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}}}{l \bar{m}_x^{\omega_x}} V k_{\gamma},$$

$$a_1 = \frac{2 \bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}}}{l \bar{m}_x^{\omega_x}} V k_{\omega_x} + 1,$$

$$a_2 = T_{\omega_x} + T_1 + T_2, \quad (1.9)$$

$$a_3 = T_{\omega_x} T_1 + T_{\omega_x} T_2 + T_1 T_2,$$

$$a_4 = T_{\omega_x} T_1 T_2.$$

Ставится задача: построить бортовой адаптивный алгоритм для определения передаточных чисел k_{γ} , k_{ω_x} как функции пяти переменных (V, ρ, J_x, T_1, T_2) . Коэффициенты $\bar{m}_x^{\omega_x}$, $\bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}}$ — заданные постоянные числа.

РАЗДЕЛ 2. Переход от физических переменных к M -переменным

Для удобства вычислений и отладки алгоритма адаптации перейдем от физических переменных V, ρ, J_x к *относительным* переменным M, h, j_x :

$$M = \frac{V}{a}, \quad (2.1)$$

где M — число Маха, V — скорость полета, a — скорость звука;

$$h = \frac{H}{H_{\max}}, \quad (2.2)$$

где H — текущая высота полета, H_{\max} — максимальная высота;

$$j_x = \frac{J_x}{J_{x_{\max}}}, \quad (2.3)$$

где J_x — момент инерции самолета в данной точке полета,

$J_{x_{\max}}$ — максимальный момент инерции.

Диапазон изменения всех трех указанных относительных переменных сравнительно мал. Так, для самолетов класса Ил-96-300:

$M \in (0, 1)$, $h \in [0, 1]$, $j_x \in (0, 1]$.

А) Аппроксимация зависимости плотности воздуха от высоты полета.

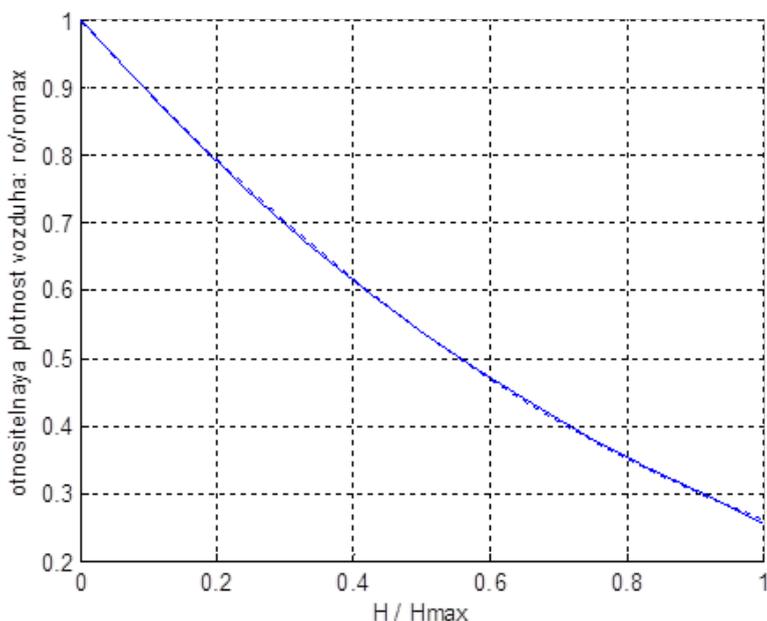


Рис. 2.1. Аппроксимация зависимости плотности воздуха от высоты полета

Задача об аппроксимации зависимости плотности воздуха от высоты известна давно. Существенные дополнительные вопросы — влияние температуры и влажности воздуха.

Аппроксимация рассматривается для «рабочего» диапазона высот гражданских самолетов класса Ил-96-300, т. е. для $0 \leq H \leq 12$ [км]. Для аппроксимации используются данные стандартной атмосферы [ГОСТ 4401-81 — Атмосфера стандартная. Параметры]. Функция `polyfit` находит коэффициенты полинома заданной степени n , который аппроксимирует данные (или функцию $y(x)$) по методу наименьших квадратов: $p = \text{polyfit}(x, y, n)$.

С учетом соотношений: $H_{\max} = 12$ [км], $\rho_{\max} = 1,2250$ [кг/м³] предлагается следующая формула для аппроксимации плотности воздуха как функции относительной высоты $h = H / H_{\max}$:

$$\rho(h) = x_p \rho_{\max}, \quad (2.4)$$

где $x_p = 0,9957 - 1,0912 \times h + 0,3567 \times h^2$.

Б) Аппроксимация зависимости скорости звука от высоты.

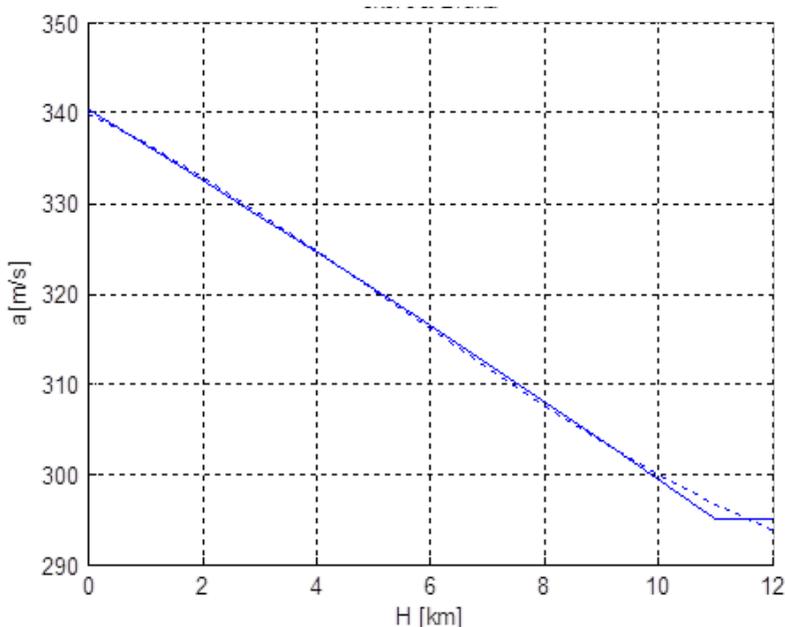


Рис. 2.2. Аппроксимация зависимости скорости звука от высоты полета

С учетом соотношений: $H_{\max} = 12$ [км], $a_{\max} = 340,3$ [м/с] предлагается следующая формула для аппроксимации скорости звука a как функции относительной высоты $h = H / H_{\max}$:

$$a = 340,3(1 - 0,1363 \cdot h). \quad (2.5)$$

РАЗДЕЛ 3. Преобразование коэффициентов характеристического полинома

Коэффициенты характеристического полинома:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2 \bar{m}_x^{\delta_{ЭП}}}{l \bar{m}_x^{\omega_x}} V k_\gamma, \\
 a_1 &= \frac{2 \bar{m}_x^{\delta_{ЭП}}}{l \bar{m}_x^{\omega_x}} V k_{\omega_x} + 1, \\
 a_2 &= T_{\omega_x} + T_1 + T_2, \\
 a_3 &= T_{\omega_x} T_1 + T_{\omega_x} T_2 + T_1 T_2, \\
 a_4 &= T_{\omega_x} T_1 T_2.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

А) Предварительно преобразуем постоянную времени T_{ω_x} .

Исходная формула — см. (1.9):

$$T_{\omega_x} = \frac{4}{\bar{m}_x^{\omega_x} S l^2} \frac{J_x}{\rho V}. \tag{3.2}$$

Преобразование (3.2) будет заключаться в переходе от *физических* переменных V, ρ, J_x к *относительным* переменным M, h, j_x . Основная задача при этом — получение возможно более простых формул (при достаточной их точности).

Из (2.1), (2.5):

$$V = Ma, \tag{3.3}$$

$$V = 340,3(1 - 0,1363 \cdot h)M.$$

Из (2.4) получим:

$$\rho(h) = 1,2250 \times (1,2197 - 1,3367 \times h + 0,4369 \times h^2). \tag{3.4}$$

В соответствие с (2.3) примем:

$$J_x = j_x J_{x_{\max}}, \quad \text{где } j_x \in (0, 1]. \tag{3.5}$$

Подставим (3.3), (3.4), (3.5) в исходную формулу (3.2):

$$T_{\omega_x} = \frac{J_{x_{\max}}}{104,217 \bar{m}_x^{\omega_x} S l^2} \frac{j_x / M}{(0,9957 - 1,0912 \times h + 0,3567 \times h^2)(1 - 0,1363 \cdot h)}. \tag{3.6}$$

Аппроксимируем полином в знаменателе формулы (3.6):

$$Y = (0,9957 - 1,0912 \times h + 0,3567 \times h^2)(1 - 0,8522 \times h). \quad (3.7)$$

В результате аппроксимации получим:

$$Y = 0,9884 - 1,7731 \times h + 0,8306 \times h^2.$$

После округления коэффициентов полинома:

$$Y = 1,00 - 1,77 \times h + 0,83 \times h^2. \quad (3.8)$$

Точность аппроксимации иллюстрируется на рис. 3.1:

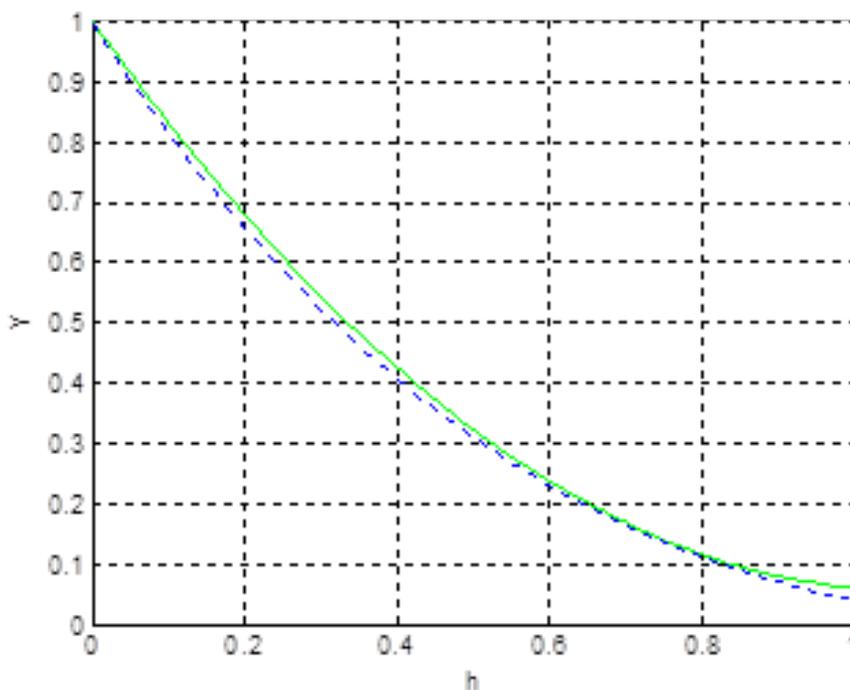


Рис. 3.1. Аппроксимация полинома $Y(h)$

Подставим (3.8) в (3.6):

$$T_{\omega_x} = \frac{J_{x_{\max}}}{104,217 \bar{m}_x^{\omega_x} SI^2} \frac{j_x / M}{1,00 - 1,77 \times h + 0,83 \times h^2}. \quad (3.9)$$

Окончательно получим:

$$T_{\omega_x} = B_1 \frac{j_x / M}{1,00 - 1,77 \times h + 0,83 \times h^2}, \quad (3.10)$$

где обозначено:

$$B_1 = \frac{J_{x_{\max}}}{104,2 \bar{m}_x^{\omega_x} S l^2}. \quad (3.11)$$

Б) Преобразование коэффициентов характеристического полинома.

С учетом формулы (3.3): $V = 340,3(1 - 0,1363 \cdot h)M$ получим из соотношений (3.1):

$$\begin{aligned} a_0 &= B_0 (1 - 0,14h) M k_\gamma, \\ a_1 &= B_0 (1 - 0,14h) M k_{\omega_x} + 1, \\ a_2 &= T_{\omega_x} + T_1 + T_2, \\ a_3 &= T_{\omega_x} T_1 + T_{\omega_x} T_2 + T_1 T_2, \\ a_4 &= T_{\omega_x} T_1 T_2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $T_{\omega_x} = f(M, h, j_x)$ — см. формулы (3.10), (3.11), а коэффициент B_0 является постоянной величиной:

$$B_0 = \frac{340,3 \bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}}}{l \bar{m}_x^{\omega_x}}. \quad (3.13)$$

Пример.

Рассматривается самолет (типа Ил-96-300) со следующими параметрами:

максимальное значение момента инерции относительно продольной оси самолета $J_{x_{\max}} = 20 \cdot 10^6$ [кГм²], площадь крыла $S = 350$ [м²], хорда крыла $l = 57,7$ [м], вспомогательные коэффициенты: $\bar{m}_x^{\omega_x} = -0,44 \cdot 1,03 \div 0,9 = -0,4080$, $\bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}} = -0,0065 \frac{0,67}{10} 1,0 \cdot 0,875 \cdot 57,3 = -0,2358$.

Примечание.

В дальнейшем принимается $\bar{m}_x^{\omega_x} = 0,4080$, $\bar{m}_x^{\delta_{\text{эл}}} = 0,2358$, т. е. знак «—» не учитывается (он компенсируется наличием отрицательной обратной связи в управлении).

Коэффициенты характеристического полинома для рассматриваемого примера:

$$a_0 = 3,41((1 - 0,14h)M k_\gamma,$$

$$a_1 = 3,41(1 - 0,14h)M k_{\omega_x} + 1,$$

$$a_2 = T_{\omega_x} + T_1 + T_2,$$

$$a_3 = T_{\omega_x} T_1 + T_{\omega_x} T_2 + T_1 T_2,$$

$$a_4 = T_{\omega_x} T_1 T_2.$$

Формулы (3.11), (3.10) для рассматриваемого примера примут вид:

$$B_1 = \frac{J_{x_{\max}}}{104,2 \bar{m}_x^{\omega_x} S l^2} \approx 0,40,$$

$$T_{\omega_x} = 0,40 \frac{j_x / M}{1,00 - 1,77 \times h + 0,83 \times h^2}.$$

РАЗДЕЛ 4. Алгоритм адаптации

Предлагаемый алгоритм адаптации обеспечивает в процессе полета самолета непрерывную настройку передаточных чисел k_γ , k_{ω_x} канала крена как функцию трех относительных переменных: M , h , j_x . Здесь M — число Маха, h — относительная высота полета ($h = H / H_{\max}$), j_x — относительный момент инерции самолета ($j_x = J_x / J_{x_{\max}}$).

Исходные данные при работе алгоритма:

$$B_0 = \frac{340,3}{l} \frac{\bar{m}_x^{\delta_{эл}}}{\bar{m}_x^{\omega_x}}, \quad (4.1)$$

$$B_1 = \frac{J_{x_{\max}}}{104,2 \bar{m}_x^{\omega_x} S l^2}. \quad (4.2)$$

Примечание.

В процессе отладки системы управления может быть использовано не три, а пять относительных переменных (M , h , j_x , T_1 , T_2), где T_1 , T_2 — постоянные времени рулевых приводов (без существенного изменения самого алгоритма).

Это существенно облегчает процесс отладки при изменении (уточнении) параметров рулевых приводов (значений T_1, T_2).

Вычисление текущих значений передаточных коэффициентов k_γ, k_{ω_x} по предлагаемому алгоритму сводится к следующим операциям:

$$h = H / H_{\max}, \quad (4.3)$$

$$j_x = J_x / J_{x\max}, \quad T_{\omega_x} = B_1 \frac{j_x / M}{1,00 - 1,77 \times h + 0,83 \times h^2}, \quad (4.4)$$

$$C_2 = T_{\omega_x} + T_1 + T_2, \quad C_3 = T_{\omega_x} T_1 + T_{\omega_x} T_2 + T_1 T_2, \quad C_4 = T_{\omega_x} T_1 T_2, \quad (4.5)$$

$$\omega = 0,44 \frac{C_2}{C_3}, \quad (4.6)$$

$$k_\gamma = \frac{0,14 C_2 \omega^2}{(1 - 0,14 h) M}, \quad (4.7)$$

$$k_{\omega_x} = \frac{2\omega(C_2 - 4C_4\omega^2) - 1}{3,41(1 - 0,4h)M}. \quad H = 10/12, \quad M = 0,79. \quad (4.8)$$

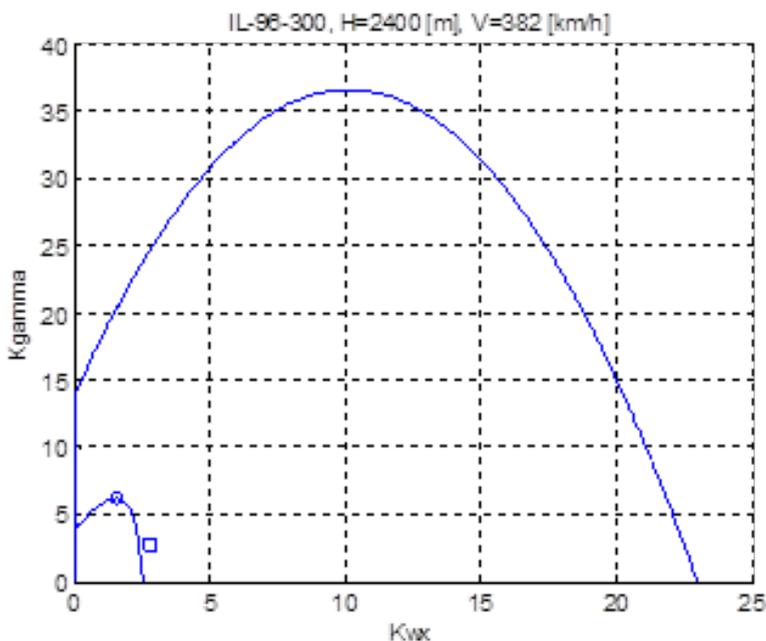


Рис. 4.1. Область устойчивости и область секторной устойчивости (заданной колебательности) для рассматриваемого режима полета самолета Ил-96-300.

«Квадратик» — рабочая точка для самолета типа Ил-96-300.

«Кружочек» — рекомендуемые передаточные числа K_γ, K_{ω_x}

Литература

1. Вероятное будущее гражданской авиации к 2050 году. AirbnbНавр, 2014.
2. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
3. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. Пер. с англ. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
4. Воронов А. А. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.-Л.: Энергия, 1965. – С. 151–152
5. Carlos M. Madrid Casado. Наука. Величайшие теории. Выпуск 34. Вначале была аксиома. Гильберт. Основания математики. Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2015.
6. Айзерман М. А. Краткий очерк становления и развития классической теории регулирования в управлении // АиТ, 1993. – С. 6–18.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 5-е изд. М.: Физматлит, 2004.
8. Солодовников В. В. Основы автоматического регулирования. Теория. М.: Машгиз, 1954.
9. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
10. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
11. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948. КомКнига, 2006.

12. *Николаев Ю. П.* Геометрия многомерной области устойчивости в пространстве четных (нечетных) коэффициентов характеристического полинома линейных систем // *АиТ*, №9, 2014. – С. 3–20.
Yu. P. Nikolaev. Geometry of the multidimensional stability domain in the space of even (odd) coefficients of the characteristic polynomial of linear systems // *Autom. and Remote Control*. № 9, 2014. Vol. 75, pp. 1541–1555.
13. *Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П.* Анализ геометрии многомерных областей устойчивости линейных систем управления с обратной связью // *Навигация и управление летательными аппаратами*. №22, 2018. – С. 2–9.
14. *Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П.* Критерий Гурвица. Модификация // *Навигация и управление летательными аппаратами*. № 28, 2020. – С. 2–10.
15. *Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П.* Декомпозиция и анализ характеристического уравнения линейных стационарных систем с обратной связью. Критерий Гурвица. // *Навигация и управление летательными аппаратами*. № 33, 2021. – С. 2–17.
16. *Погорелов А. И.* Дифференциальная геометрия (6-е издание). М.: Наука, 1974.
17. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии (3-е издание). М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
18. *Арнольд В. И.* Вещественная алгебраическая геометрия. М.: МЦНМО, 2009.
19. *Топоногов В. А.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. – Физматкнига, 2012.