МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И АВТОМАТИКИ (МИЭА)

НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

Под общей редакцией
доктора технических наук, профессора А. Г. Кузнецова

Выпуск 41

Москва
2023

УДК 629.7.05

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОНОМНЫХ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОВЕРТИКАЛЕЙ

Виктор Иванович ГАЛКИН, *к. т. н., с. н. с.,*
Евгений Владимирович КУЗИН
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru

В статье на основе передаточных функций исследованы статические и динамические характеристики автономных микромеханических гировертикалей с радиальной и интегральной коррекцией. Проанализированы их преимущества и недостатки, а также даны рекомендации по применению.

Ключевые слова: *автономная микромеханическая гировертикаль, радиальная коррекция, интегральная коррекция, передаточная функция.*

RESEARCH OF STATIC AND DYNAMIC PARAMETERS OF AUTONOMOUS MICROMECHANICAL VERTICAL GYRO

Victor I. GALKIN, *PhD in Engineering,*
Evgeny V. KUZIN
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-Mail: inbox@aomiea.ru

This article presents the research of static and dynamic parameters of autonomous micromechanical vertical gyro with radial and integral correction. The research is based on transfer functions of autonomous micromechanical vertical gyro. The advantages and disadvantages of the gyro are analyzed. The recommendations for its use are given.

Keywords: *autonomous micromechanical vertical gyro, radial correction, integral correction, transfer function.*

Введение

Основными параметрами, характеризующими точностные характеристики микромеханической гировертикали, являются погрешности измерения углов тангажа и крена в статических и динамических режимах ее работы: величина ошибок измерения углов, условие устойчивости работы, время переходного процесса, реакция на импульсные и знакопеременные возмущения.

В настоящей статье исследованы автономные микромеханические гировертикали с радиальной и интегральной коррекцией. Рассмотрены передаточные функции гировертикалей. Показаны преимущества и недостатки каждой из них. Приведены результаты математического моделирования.

Передаточная функция гировертикали с радиальной коррекцией

За основу построения структурной схемы и формирования передаточной функции принят способ, предложенный разработчиками инерциальных навигационных систем [1]. Структурная схема гировертикали с радиальной коррекцией представлена на рис. 1.

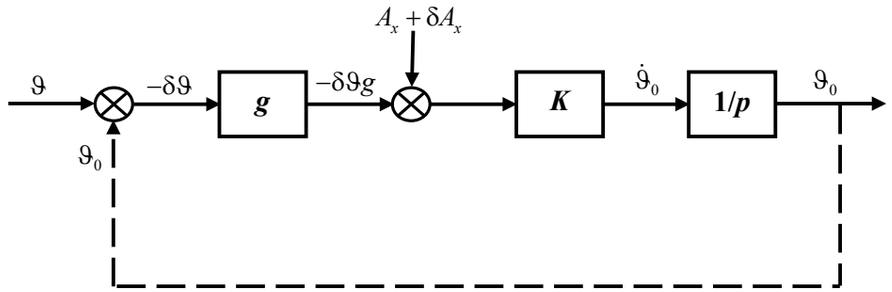


Рис. 1. Структурная схема микромеханической гировертикали с радиальной коррекцией

Уравнение, соответствующее этой структурной схеме можно записать в виде:

$$\left[\left(\vartheta-\vartheta_0\right)g+\left(A_x+\delta A_x\right)\right]\frac{K}{p}=\vartheta_0, \qquad (1)$$

где: ϑ_0 — угол тангажа с угловой погрешностью системы регулирования; ϑ — угол тангажа, измеренный гироскопами без погрешности; $\delta\vartheta$ — угловая погрешность системы регулирования; K[с/м] — коэффициент статического усиления; A_x — линейное ускорение;

δA_x — погрешность измерения линейного ускорения; g — ускорение силы тяжести; p — оператор дифференцирования.

Уравнение (1) преобразуем следующим образом:

$$-\delta\vartheta(p)gK + A_x(p)K + \delta A_x(p)K = p\vartheta(p) + p\delta\vartheta(p).$$

После вычитания установившегося режима работы системы получим:

$$(p + gK)\delta\vartheta(p) = \delta A_x(p)K. \quad (2)$$

Тогда передаточная функция запишется в виде:

$$W(p) = \frac{\delta\vartheta(p)}{\delta A_x(p)} = \frac{K}{(p + gK)}, \quad (3)$$

а характеристическое уравнение:

$$p + gK = 0. \quad (4)$$

Откуда следует, что система устойчива при любых положительных значениях K.

Реакция полученной передаточной функции (3) на единичное воздействие при начальном значении $\delta\vartheta(0) = \Delta\vartheta$ запишется в виде:

$$\delta\vartheta(t) = \delta\vartheta(0)e^{-gKt} = \Delta\vartheta_m e^{-\frac{t}{T}}. \quad (5)$$

То есть система регулирования гировертикали с радиальной коррекцией и статическим коэффициентом усиления представляет собой апериодическое звено с постоянной времени $T = 1/gK$ (рис. 2).

Величина угловой погрешности измерений при заданных значениях не скомпенсированных ошибок гироскопов $(\Delta\omega)$ и акселерометров (Δa) может быть рассчитана по следующей формуле:

$$\Delta\vartheta = \Delta\gamma = \frac{\Delta\omega}{K} + \frac{\Delta a}{g}. \quad (6)$$

Как следует из этой формулы, увеличение коэффициента усиления (K) приводит к уменьшению угловой погрешности, обусловленной дрейфом гироскопа, но не влияет на угловую погрешность, вызванную погрешностью акселерометра. Однако время переходного процесса при этом снижается.

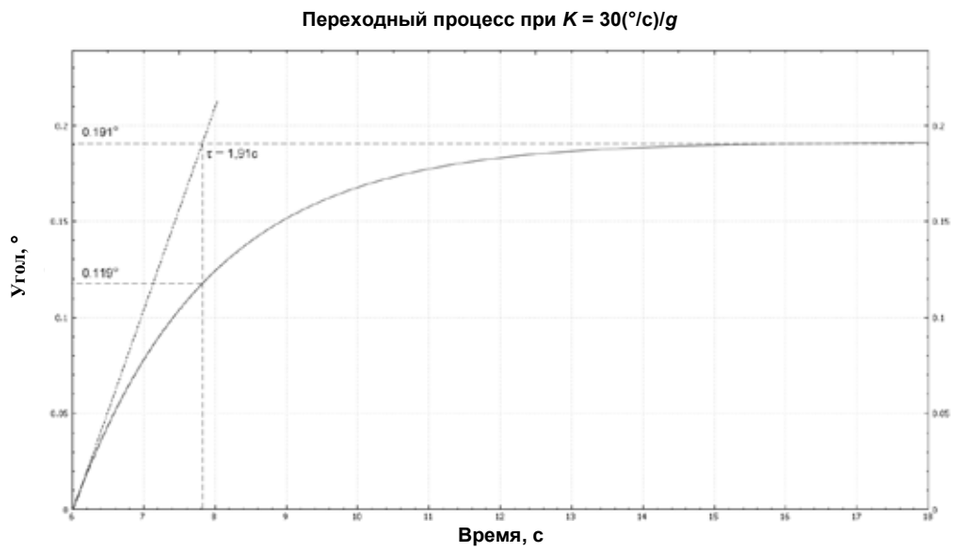


Рис. 2. Переходный процесс при $\Delta\omega = 0{,}1°/c$ и $K = 30(°/c)/g$

На рис. 3 приведено семейство графиков зависимости статической погрешности от дрейфа гироскопов. Откуда видно, что при очень больших $K = (170 \div 180)\frac{°/c}{g}$ из-за наличия интегрирующего звена возможно возникновение гармонических колебаний с перерегулированием.

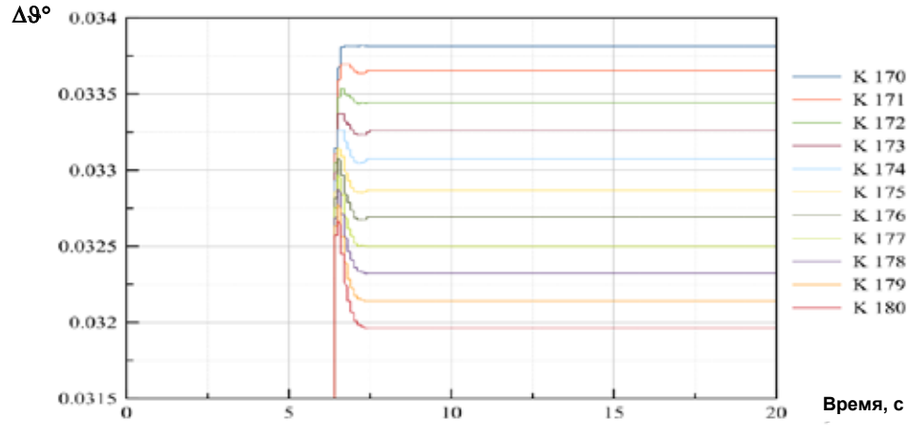


Рис. 3. Переходные процессы при $\Delta\omega = 0{,}1°/c$ и статических коэффициентах усиления K от $170(°/c)/g$ до $180(°/c)/g$

В разрабатываемых в ПАО «МИЭА» микромеханических курсовертикалях [2] коэффициент усиления принят равным $K = 30\frac{°/с}{g}$, что соответствует постоянной времени T = 1,91 с. Статическая угловая погрешность в установившемся режиме при $\Delta\omega = 0{,}1°/с$ и $\Delta a = 0{,}01g$ не превышает:

$$\Delta\vartheta = \frac{0{,}1}{30\Delta g}57{,}325 + \frac{0{,}01g}{g}57{,}325 = \left(0{,}19 + 0{,}57\right) = 0{,}76^{\circ}.$$

При этом угловая погрешность, вызванная дрейфом гироскопа, составляет 25% от суммарной угловой погрешности, обусловленной в основном погрешностью акселерометра. Однако надо иметь в виду, что в динамических режимах работы летательных аппаратов, когда линейные ускорения превышают допустимые, обратная связь в системе регулирования гировертикали отключается, и угловая погрешность от дрейфа гироскопа нарастает пропорционально времени отключения обратной связи.

Передаточная функция автономной гировертикали с интегральной коррекцией

Структурно-функциональная схема автономной гировертикали с интегральной коррекцией будет несколько отличаться от радиальной коррекции из-за появления дополнительного интегрирующего звена, преобразующего линейное ускорение в линейную скорость. В этом случае необходимо вводить дополнительное демпфирующее звено, так как при его отсутствии будут иметь место незатухающие гармонические колебания.

Структурно-функциональная схема автономной гировертикали с интегральной коррекцией представлена на рис. 4.

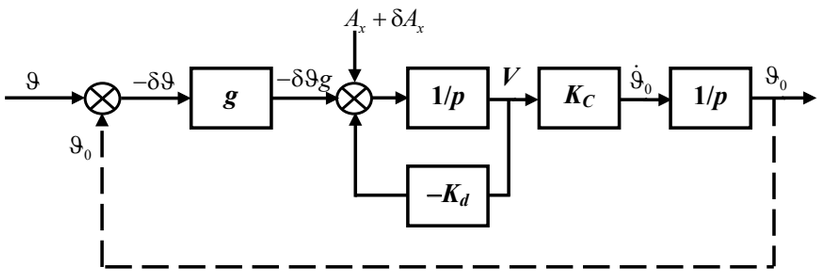


Рис. 4. Структурная схема гировертикали с интегральной коррекцией

Уравнение, соответствующее этой структурной схеме, может быть записано в виде:

$$\left[(\vartheta - \vartheta_0)g + A_x + \delta A_x\right]\frac{K_c}{\left(p + K_d\right)p} = \vartheta_0, \tag{7}$$

где: K_c [1/м] — коэффициент статического усиления; K_d[1/с] — коэффициент демпфирования; A_x — линейное ускорение. Учитывая, что: $(\vartheta - \vartheta_0) = -\delta\vartheta$:

$$\left[-\delta\vartheta g K_c + A_x K_c + \delta A_x K_c\right] = (\vartheta p^2 + \vartheta p K_d) + \delta\vartheta(p^2 + pK_d).$$

После вычитания установившегося режима получим:

$$\delta\vartheta\left(p^2 + \omega_0^2 + pK_d\right) = \delta A_x K_c - \vartheta p K_d. \tag{8}$$

Откуда:

$$\delta\vartheta_y = \frac{\delta A_x K_c - \delta p K_d}{p^2 + \omega_0^2 + pK_d}. \tag{9}$$

Тогда характеристическое уравнение запишется в виде:

$$p^2 + pK_d + \omega_0^2 = 0. \tag{10}$$

В соответствии с критерием Рауса – Гурвица необходимым и достаточным условием устойчивости такой системы является положительность всех коэффициентов в характеристическом уравнении (10).

При $K_d = 0$ уравнение (8) запишется в виде:

$$\delta\theta(p^2 + \omega_0^2) = \delta A_x K_c. \tag{11}$$

Общее решение однородного уравнения (11) может быть записано следующим образом:

$$\delta\vartheta\left(t\right) = B\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где B и φ — постоянные величины, которые должны быть выбраны в соответствии с начальными условиями; $\omega_0 = \sqrt{gK_c}$ — угловая частота колебаний угловой погрешности. При $K_c = 1/R$, где R — радиус Земли, ω_0 будет равна частоте Шулера.

Частное решение неоднородного уравнения (11), определяемое его правой частью, при $K_d = 0$ может быть представлено следующим образом [1]:

– при не скомпенсированном нулевом сигнале акселерометра ΔA_x:

$$\delta\vartheta_a(t) = \frac{\Delta A_x K_c}{\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t); \qquad (12)$$

– при не скомпенсированном нулевом сигнале гироскопа $\Delta\omega_z$:

$$\delta\vartheta_\omega(t) = \frac{\Delta\omega_z K_c}{\omega_0}\sin\omega_0 t. \qquad (13)$$

То есть при отсутствии коэффициента демпфирования будут иметь место незатухающие гармонические колебания с угловой частотой ω_0 и амплитудой, пропорциональной не скомпенсированным нулевым сигналам датчиков. На рис. 5 приведены графики временной зависимости погрешности измерений угла тангажа при отсутствии демпфирования и при его наличии.

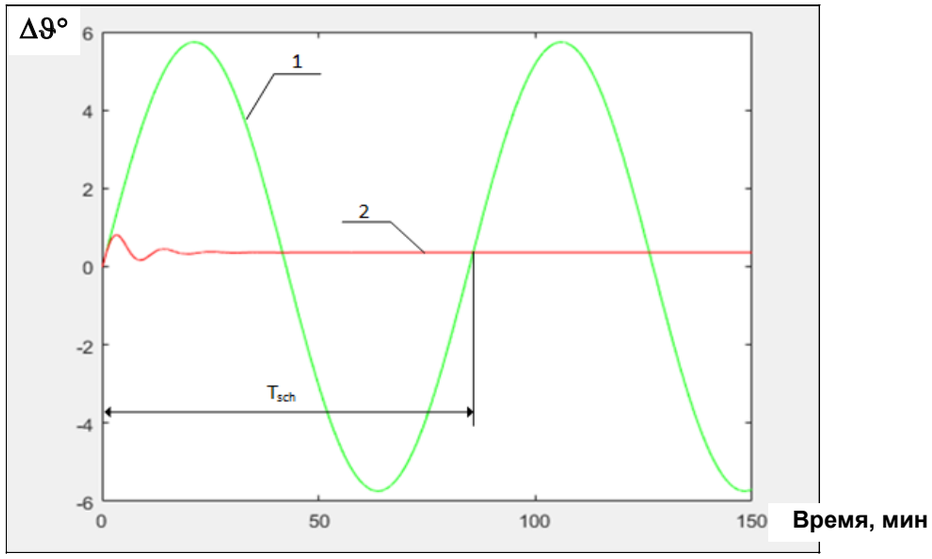


Рис. 5. Графики изменения погрешности измерения тангажа во времени $\Delta\vartheta = f(t)$ автономной гировертикали с интегральной коррекцией, где:
график 1 — при отсутствия демпфирования $(K_d = 0, K_c = 1/R)$;
график 2 — при оптимальных коэффициентах усиления $K_d = 0{,}005\ 1/c$ и $K_c = 64/R$ с одинаковым дрейфом датчика угловых скоростей по оси Z_1, равном $\Delta\omega_{z1} = 0{,}0071\ [°/c]$;
$T_{sch} = 84{,}4$ [мин] — период Шулера;
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ [м] — радиус Земли

На рис. 6 приведены графики изменений погрешности тангажа при постоянном статическом коэффициенте усиления и ряде коэффициентов демпфирования.

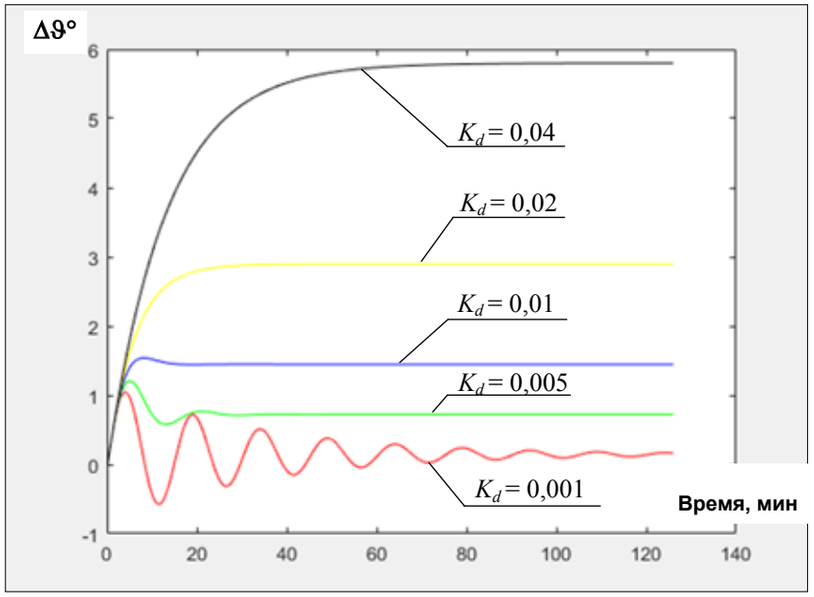


Рис 6. Графики изменения погрешностей тангажа во времени при постоянном статическом коэффициенте усиления $K_d[1/c] = 32/R = 32/6{,}4 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^{(-6)}$ [1/м] и ряде значений коэффициента динамического усиления $K_d[1/c]$

Как следует из приведенных графиков, с увеличением коэффициента демпфирования K_d динамическая погрешность тангажа уменьшается, а статическая погрешность растет. Используя такие графики, можно найти оптимальное значение коэффициентов усиления [3].

Выводы

1. Исследования показали, что в гировертикали с радиальной коррекцией переходные процессы носят апериодический характер. Обеспечение заданной точности измерений достигается подбором коэффициента статического усиления.

2. В автономной гировертикали с интегральной коррекцией необходимо введение демпфирования, так как только в этом случае возможно достижение заданной точности измерений в автономном режиме работы.

3. Исследования показали, что радиальная коррекция обеспечивает более высокую точность в статических режимах работы, а интегральная — в динамических режимах работы.

4. Выбор коррекции в автономной микромеханической гировертикали во многом зависит от типа и условий эксплуатации летательных аппаратов: для маломаневренных тяжелых летательных аппаратов предпочтительнее гировертикаль с радиальной коррекцией, для высокоманевренных — гировертикаль с интегральной коррекцией.

Литература

1. Инерциальная навигация, под редакцией К. Ф. О'Донолла, перевод с английского, изд. «Наука», 1969. 592 с.

2. *Галкин В. И.*, *Кузин Е. В.*, *Воробьев Д. Н.* Способ управления цифровой платформой в бесплатформенной гировертикали и устройство для его реализации. // Патент РФ №2667320, Бюллетень изобретений №26, 2018 г.

3. *Кузнецов А. Г.*, *Галкин В. И.*, *Кузин Е. В.* Оптимизация параметров обратной связи в автономной микромеханической гировертикали с интегральной коррекцией. // Навигация и управление летательными аппаратами. №36, 2022. — С. 2—10.

УДК 629.7.05

ШЕСТНАДЦАТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА. МОДИФИКАЦИЯ 1

Юрий Павлович НИКОЛАЕВ, *д-р физ.-мат. наук, с. н. с.*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: aomiea@aviapribor.ru

Предлагается модификация нерешенной к настоящему времени шестнадцатой проблемы Гильберта. Рассматривается область устойчивости на плоскости пары коэффициентов характеристического уравнения динамической системы произвольного порядка. Доказывается, что анализируемая область устойчивости является выпуклым множеством.

Ключевые слова: *Шестнадцатая проблема Гильберта, трактовка В. И. Арнольда, алгебраическая кривая, полиномы Эрмита—Билера, критерий Михайлова, годограф, выпуклость области устойчивости.*

HILBERT SIXTEENTH PROBLEM. MODIFICATION I

Yury P. NIKOLAEV, *D. Sc. in Phys and Math*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: aomiea@aviapribor.ru

The article proposes a modification of currently unsolved Hilbert sixteenth problem. It considers the stability domain on the plane of a pair of coefficients of random dynamic system characteristic equation. It is proved that the analyzed stability domain is a convex set.

Keywords: *Hilbert sixteenth problem, V. I. Arnold interpretation, algebraic curve, Hermite-Biehler polynomials, Michailov criterion, hodograph, stability domain convexity.*

1. Введение

Проблемы Гильберта [1, 2] — список из 23 кардинальных проблем математики, представленный Давидом Гильбертом на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Тогда эти проблемы (охватывающие основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, группы Ли, вещественный и комплексный анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и теорию вероятностей, а также вариационное исчисление) не были решены.

На данный момент решены 17 проблем из 23.

Шестнадцатая проблема Гильберта — одна из нерешенных к настоящему времени задач. Исходно она называлась «Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей» (Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen).

В настоящей работе используется следующая трактовка задачи — см. [3].

Пусть f — полином (с вещественными коэффициентами) степени n от двух переменных x и y.

Вопрос Гильберта состоит в том, чтобы исследовать, какое топологическое строение может иметь алгебраическая кривая, заданная на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x и y уравнением $f(x, y) = 0$.

Определение. Алгебраическая кривая, или плоская алгебраическая кривая — это геометрическое место (множество) точек на плоскости (O; x, y), которое определяется как множество нулей полинома от двух переменных. Степенью (или порядком) n этой кривой называется степень указанного полинома.

2. Анализ геометрии многомерной области устойчивости. Сечение области устойчивости линейным многообразием

Характеристическое уравнение замкнутой системы управления с обратной связью:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n,\ a_n > 0. \qquad (2.1)$$

Анализ выпуклости многомерной области устойчивости (множества устойчивых полиномов) в пространстве коэффициентов этого уравнения, наряду с анализом других существенных геометрических (топологических) ее характеристик, продолжает оставаться актуальной и в то же время сравнительно малоизученной проблемой (см., например, [4–10]).

Коротко об известной информации по данной проблеме. Многомерная область устойчивости «в целом» не является выпуклой.

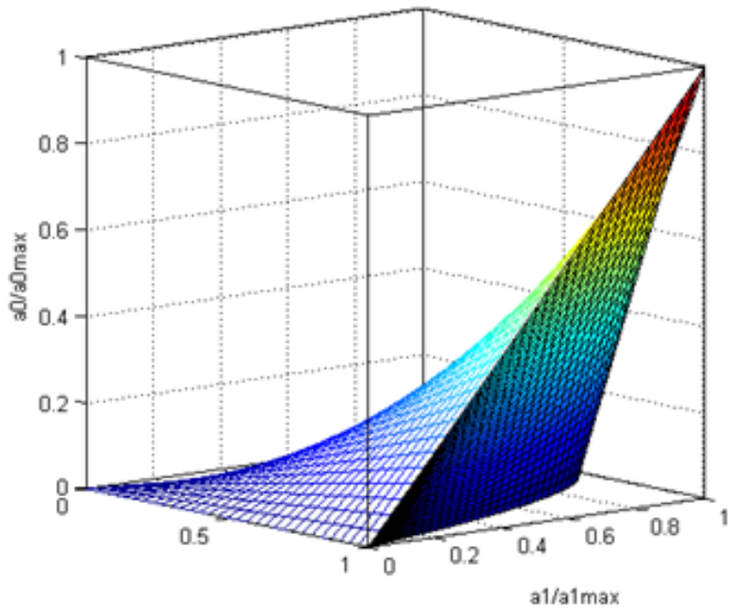


Рис. 2.1. Область устойчивости в пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2, $n = 5$

Сечения этой многомерной области линейными многообразиями могут быть, по-видимому, как невыпуклыми, так и выпуклыми, в зависимости от «типа» секущего линейного многообразия.

Во всяком случае, этот факт отмечался в работах [4, 5] для полиномов относительно невысокого порядка $(n \le 6)$.

Область устойчивости на комплексной плоскости *свободного коэффициента* характеристического полинома (при фиксированных значениях остальных коэффициентов) является выпуклым множеством [11].

Естественным представляется вопрос об исследовании связности и выпуклости *произвольных* двумерных сечений многомерной области устойчивости для полиномов *произвольного* порядка. Решение этой задачи рассматривается в данном разделе.

Покажем, что область устойчивости на двумерной плоскости сечения (плоскости x, y) в общем случае может быть и несвязным, и невыпуклым множеством.

а) Пусть задана трехмерная область устойчивости в пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2 полинома $P(s)$ произвольного порядка; остальные коэффициенты фиксированы: $a_r \in R_+$, $r = 3, \ldots, n$.

Требуется построить и проанализировать сечение этой области плоскостью, заданной уравнением в отрезках:

$$-\frac{a_0}{A_0}+\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}=1, \qquad A_0, A_1, A_2 \in R_+. \tag{2.2}$$

Граничная кривая сечения описывается следующей системой уравнений:

$$a_0 - a_2\Omega = F_0, \tag{2.3}$$

$$a_1 = F_1, \tag{2.4}$$

$$-\frac{a_0}{A_0}+\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}=1, \tag{2.5}$$

где обозначено

$$F_0 = -a_4\Omega^2 + a_6\Omega^3 - a_8\Omega^4 + \ldots, \qquad F_1 = a_3\Omega - a_5\Omega^2 + a_7\Omega^3 - \ldots.$$

Имеем три уравнения, три неизвестных коэффициента a_0, a_1, a_2 и параметр Ω. Так как коэффициент a_1 определяется непосредственно как функция параметра Ω из уравнения (2.4), мы имеем фактически систему из двух уравнений (2.3), (2.5). Поэтому решение можно представить в виде:

$$a_1 = F_1, \qquad a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \qquad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{2.6}$$

Определители системы (2.6) равны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\Omega \\ -\frac{1}{A_0} & \frac{1}{A_2} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_0 = \begin{vmatrix} F_0 & -\Omega \\ 1-\frac{F_1}{A_1} & \frac{1}{A_2} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & F_0 \\ -\frac{1}{A_0} & 1-\frac{F_1}{A_1} \end{vmatrix}.$$

Решая указанную систему уравнений, получим:

$$a_0 = \frac{A_0\left(\Omega + F_0 / A_2 - \Omega F_1 / A_1\right)}{\left(A_0 / A_2\right) - \Omega},$$

$$a_1 = F_1 = a_3\Omega - a_5\Omega^2 + \ldots,$$

$$a_2 = \frac{A_0 + F_0 - F_1 A_0 / A_1}{\left(A_0 / A_2\right) - \Omega},$$

где $\Omega = \omega^2$.

Полученные формулы позволяют, изменяя ω от 0 до ω_{max}, получить и проанализировать *D*-разбиение сечения трехмерного пространства плоскостью (2.2). «Ключом» к анализу особенностей геометрии сечения области устойчивости плоскостью является условие $\Delta = 1/A_2 - \Omega/A_0 = 0$, откуда следует, что сингулярное значение переменной Ω равно: $\Omega = A_0 / A_2$. Этому сингулярному значению переменной Ω соответствует следующее критическое значение a_1:

$$a_1^{\text{КРИТ}} = a_3\frac{A_0}{A_2} - a_5\frac{A_0^2}{A_2^2} + \ldots = \text{const}. \tag{2.8}$$

То есть мы получили уравнение особой прямой на плоскости (уравнение плоскости в трехмерном пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2). Можно показать, что по обе стороны от этой прямой располагаются подобласти устойчивости, то есть область устойчивости состоит, по меньшей мере, из двух отдельно расположенных подобластей, следовательно, область устойчивости — несвязное множество.

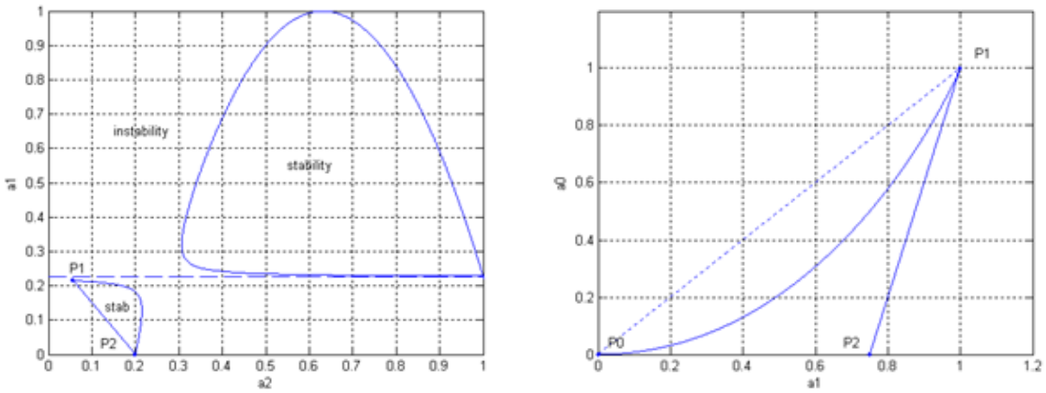
В качестве иллюстрации этого положения рассмотрим сечение области устойчивости плоскостью (2.2), точнее — проекцию сечения на координатную плоскость a_1, a_2 для частного случая n = 5 (см. рис. 2а). Как следует из рисунка, в данном случае область устойчивости является несвязным множеством, она состоит из двух областей, разделенных особой прямой $a_1 = a_1^{\text{КРИТ}}$ (пунктир).

Особая прямая является асимптотой для двух ветвей *D*-кривой: при $\Omega \to A_0 / A_2$ (слева или справа) коэффициент a_2 в соответствии с формулой (2.6) стремится к плюс (минус) бесконечности.

б) Рассматривается характеристический полином $P(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + \ldots + a_5 s^5$ и соответствующая ему область устойчивости в пространстве a_0, a_1, a_2. Требуется построить сечение этой области плоскостью, заданной соотношением $a_1 = a_2 \sup a_1 / \sup a_2 = a_2 a_3 / 4a_4$. Изображение сечения представлено на рис. 2.2б. Координаты характерных точек P_1, P_2 на рис. 2.2б: $a_0\left(P_1\right) = \sup a_0 = a_3^2 a_4 / 4a_5^2$, $a_1\left(P_1\right) = \sup a_1 = a_3^2 / 4a_5$; $a_0\left(P_2\right) = 0$, $a_1\left(P_2\right) = \left(a_3 - a_4\right)a_4 / a_5$.

Представленный рисунок иллюстрирует существенную невыпуклость сечения.

Точка P_1 на рис. 2.2б имеет некоторые отличия от остальных характерных точек кривой. Она является *особой* точкой, так как в ней одновременно выполняются два условия: $da_0(x) = 0$ и $da_1(x) = 0$. Точнее, это — *касп* (англ. *cusp* — заострение) или *точка возврата* — точка, в которой граничная кривая разделяется на две ветви, имеющие в этой точке одинаковый направляющий вектор.



а) б)

Рис. 2.2. Сечение трехмерной области устойчивости (n = 5) плоскостями разного типа

3. Сечение многомерной области устойчивости плоскостью коэффициентов a_0, a_1 характеристического полинома $P(s)$

Пусть два коэффициента a_{2q}, $a2_{q+1}$, $q = 0, 1, \ldots$ уравнения (2.1) являются переменными величинами, а остальные коэффициенты фиксированы.

В пространстве коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ рассматриваемому случаю будет соответствовать плоскость $P_2 := \{a_r = \text{const} \mid r = 0, 1, \ldots, r \neq 2q,\ 2q + 1q = 0, 1, \ldots\}$.

Результатом сечения многомерной области устойчивости рассматриваемой плоскостью будет двумерная область устойчивости на плоскости, координатные оси которой параллельны базовым координатным осям a_{2q}, a_{2q+1}.

Выбор плоскости коэффициентов a_{2q}, a_{2q+1} для анализа геометрии многомерной области устойчивости — сложная задача.

В данной работе выбрана плоскость коэффициентов a_0, a_1.

Теорема 3.1. Область устойчивости на плоскости коэффициентов полинома является выпуклым множеством.

Лемма 3.2. Необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является устойчивость вспомогательного полинома

$$\widehat{P}(s) = \left(a_2 + 2a_4 s^2 + 3a_6 s^4 + \ldots\right) + s\left(a_3 + 2a_5 s^2 + 3a_7 s^4 + \ldots\right).$$

Отметим, что порядок вспомогательного полинома $\widehat{P}(s)$ равен $n - 2$.

Доказательство этих двух взаимосвязанных утверждений проведем в несколько этапов.

Этап 1. Исходные данные

При мнимом значении аргумента $s = j\omega$ получим из (1.1):

$$P(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots + j\left(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \ldots\right) = u(\omega) + j\,v(\omega), \qquad (3.1)$$

где обозначено

$$u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots, \qquad v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \ldots \qquad (3.2)$$

Используем полиномы Эрмита – Билера $U(\omega^2), V(\omega^2)$ от переменной $\Omega = \omega^2$, см. [12]:

$$U(\Omega) = U(\omega) = a_0 - a_2\Omega + a_4\Omega^2 - \ldots,$$

$$V(\Omega) = V(\omega)/\omega = a_1 - a_3\Omega + a_5\Omega^2 - \ldots, \qquad (3.3)$$

$$\Omega = \omega^2.$$

Тогда (3.1) примет вид: $P(j\omega) = U(\omega^2) + j\omega V(\omega^2) = U(\Omega) + j\sqrt{\Omega}\,V(\Omega)$. Отметим, что порядок полиномов $U(\omega^2)$, $V(\omega^2)$ вдвое (примерно вдвое) меньше порядка полиномов $U(\omega), V(\omega)$, что, естественно, облегчает последующие выкладки.

Так как функция $P(j\omega)$ задается параметрическими уравнениями $x = U(\omega)$, $y = V(\omega)$ с параметром ω, то ее аргумент также может быть представлен в параметрическом виде: $\arg P(\omega)$. При этом

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{U(\omega)}{V(\omega)}. \qquad (3.3)$$

Для полинома $P(s)$ аргумент $\arg P(\omega)$. называется также *фазовой функцией полинома*, а график этой функции — *фазовой характеристикой полинома* [12, стр. 25]. Фазовая функция описывает, как вращается радиус-вектор точки амплитудно-фазовой характеристики $P(j\omega)$ при изменении ω.

Теорема 3.3 [10]. Следующие условия эквивалентны:

1) полином $P(s)$ гурвицев.

2) годограф $P(j\omega)$ проходит через n квадрантов последовательно, начиная с первого, не проходя через начало координат (*критерий Михайлова* [13]).

3) аргумент годографа $\arg P(\omega)$ определен, монотонно возрастает и меняется от 0 до $\pi n/2$.

4) полиномы $U(\Omega)$, $V(\Omega)$ имеют только положительные вещественные корни, которые перемежаются, то есть найдутся $0<\Omega_1<\Omega_2<\ldots$ такие, что $U(\Omega_1)=U(\Omega_3)=\ldots=0$, $V(\Omega_2)=V(\Omega_4)=\ldots=0$, и, кроме того, $U(0)>0$ (*критерий Эрмита – Билера для вещественных полиномов*).

Лемма 3.4. [12, стр. 43]. Фазовая функция $\varphi(\omega)$ произвольного полинома $P(s)$ в любой точке ω имеет производную. Эта производная выражается формулой

$$\varphi'(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left[\operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right]=\frac{v'(\omega)u(\omega)-v(\omega)u'(\omega)}{v^2(\omega)+u^2(\omega)}. \qquad (3.4)$$

Формула справедлива для всех значений ω, не являющихся корнями вспомогательного полинома $u(\omega)$.

Этап 2. Вспомогательная кривая (кривая Эрмита – Билера) и ее свойства

Введем в рассмотрение комплексную функцию, действительная и мнимая части которой являются полиномами Эрмита – Билера: $P(j,\Omega)=U(\Omega)+jV(\Omega)$. Как отмечалось выше, полиномы $U(\Omega)$, $V(\Omega)$ для гурвицева полинома $P(s)$ имеют только положительные вещественные корни, которые перемежаются, то есть найдутся $0<\Omega_1<\Omega_2<\ldots$ такие, что $U(\Omega_1)=U(\Omega_3)=\ldots=0$, $V(\Omega_2)=V(\Omega_4)=\ldots=0$, и, кроме того, $U(0)>0$.

Годограф функции $P(j\Omega)$ можно назвать *кривой Эрмита – Билера* по аналогии с известной кривой Михайлова.

P. S. *Годографом* функции $P(j\omega)$ называется кривая, описываемая точкой $P(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от 0 до ∞.

Годограф (англ. *Hodograph*, от греческих слов «ὁδός» – «путь» и «γράφω» – «пишу») — кривая, соединяющая концы вектора переменной величины (скорости, ускорения, силы и так далее), отложенного в разные моменты времени от одной точки. Впервые понятие годографа было введено в 1846 году ирландским математиком, механиком, физиком-теоретиком, сэром Гамильтоном.

Сравнивая функцию $P(j,\Omega)=U(\Omega)+jV(\Omega)$ с функцией $P(j\omega)=U(\Omega)+j\omega V(\Omega)$, убедимся, что единственное отличие между ними — отсутствие (наличие) множителя ω во втором слагаемом. Поэтому естественно, что основные свойства годографов обеих функций аналогичны. Для последующих выкладок существенно, что

· годограф $P(j\omega)$ проходит через n квадрантов *последовательно*, начиная с первого, не проходя через начало координат (как и кривая Михайлова).

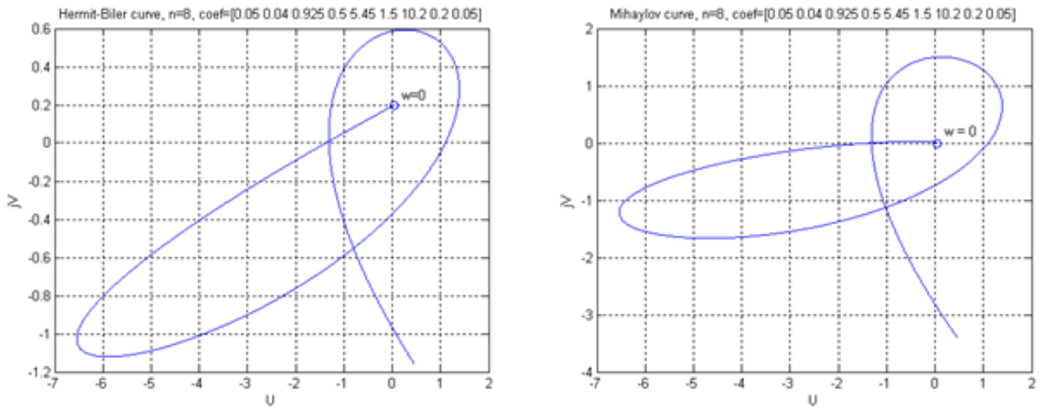
· значения параметра Ω, соответствующие точкам пересечения кривой Эрмита – Билера с координатными осями, идентичны соответствующим значениям того же параметра Ω для кривой Михайлова (у кривой Михайлова есть одна «дополнительная» точка пересечения с осью абсцисс при $\omega = 0$).

· аргумент годографа $\arg P(\omega)$ определен, *монотонно* возрастает и меняется от $\varphi_0=\operatorname{arctg}(a_1/a_0)$ до $\pi(n-1)/2$.

· ***Лемма 3.5***. Фазовая характеристика $\varphi(\Omega)$ для функции $P(j\omega)$ в любой точке Ω имеет производную. Эта производная выражается формулой

$$\varphi'(\Omega)=\left(\operatorname{arctg}\frac{V(\Omega)}{U(\Omega)}\right)'=\frac{V'(\Omega)U(\Omega)-V(\Omega)U'(\Omega)}{V^2(\Omega)+U^2(\Omega)}. \qquad (3.5)$$

Формула справедлива для всех значений Ω, не являющихся корнями вспомогательного полинома $U(\Omega)$.



а) б)

Рис. 3.1. Кривая Эрмита – Билера (а) и кривая Михайлова (б) для полинома P(s), n = 8

В качестве иллюстрации на рис. 3.1 представлены:

а) кривая Эрмита – Билера $P(j\omega)$ и б) кривая Михайлова $p(jw)$ для конкретного полинома (n = 8).

Этап 3. Вспомогательный полином степени *n* = 2 и его свойства

Выполним дифференцирование многочленов Эрмита – Билера по параметру Ω и обозначим:

$$\hat{U}=-U'(\Omega)=a_2-2a_4\Omega+3a_6\Omega^2-\ldots,\quad \hat{V}=-V'(\Omega)=a_3-2a_5\Omega+3a_7\Omega^2-\ldots \qquad (3.6)$$

Утверждение 3.6. Полиномы $\widehat{U} = -U'(\Omega)$, $\widehat{V} = -V'(\Omega)$ имеют (для гурвицева полинома $P(s)$ только положительные вещественные корни, которые перемежаются, то есть найдутся $0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \ldots$ такие, что $\widehat{U}(\Omega_1) = \widehat{U}(\Omega_3) = \ldots = 0$, и, кроме того, $\widehat{U}(0) > 0$.

Доказательство утверждения начнем с анализа корней полинома $\widehat{U}$. Покажем, что для гурвицева полинома $P(s)$ эти корни вещественны и положительны. Для этого рассмотрим полином $U(\Omega) = u(\omega) = a_0 - a_2\Omega + a_4\Omega^2 - \ldots$ Обозначим порядок полинома $U(\Omega)$ через m. В соответствии с критерием Эрмита – Билера, все m корней этого полинома для гурвицева полинома $P(s)$ вещественны и положительны.

Полином $\widehat{U} = -U'(\Omega)$ является производной от полинома $U(\Omega)$ (изменение знака для последующих выкладок не имеет значения).

По теореме Ролля, между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится по меньшей мере один корень ее производной. Следовательно, между m корнями полинома $U(\Omega)$ должно содержаться по меньшей мере (m − 1) корней его производной $\widehat{U} = -U'(\Omega)$.

Но производная $\widehat{U} = -U'(\Omega)$ как полином (m − 1)-го порядка имеет всего (m − 1) корней. Следовательно, все корни полинома $\widehat{U}$ для гурвицева полинома $P(s)$ вещественны и положительны.

Аналогичные выкладки можно сделать и для полинома $\widehat{V} = -V'(\Omega)$.

Доказательство чередования корней полиномов $\widehat{U} = -U'(\Omega)$, $\widehat{V} = -V'(\Omega)$ следует из анализа геометрии годографа $P(j\omega)$ — см. рис. 3.1а.

Выполнение условия $\widehat{U}(0) > 0$ эквивалентно выполнению очевидного неравенства $a_2 > 0$. Утверждение доказано.

Сформируем вспомогательный полином степени n − 2:

$$\widehat{P}(s) = \left(a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \ldots\right) + s\left(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + \ldots\right),$$

для которого полиномы Эрмита – Билера равны $\widehat{U}, \widehat{V}$ — см. (3.6).

На основании критерия Эрмита – Билера убедимся, что сформированный полином $\widehat{P}(s)$ устойчив.

Для устойчивого полинома $\widehat{P}(s)$ сформируем функцию Эрмита – Билера.

$$\widehat{P}(j\Omega) = \widehat{U}(\Omega) + j\widehat{V}(\Omega).$$

Аргумент годографа $\arg\widehat{P}(\omega)$ определен и *монотонно возрастает*. Фазовая характеристика $\varphi(\Omega)$ для функции $\widehat{P}(j\omega)$ в любой точке Ω имеет производную.

Эта производная выражается формулой

$$\varphi'(\Omega) = \left(\operatorname{arctg}\frac{\widehat{V}(\Omega)}{\widehat{U}(\Omega)}\right)' = \frac{\widehat{V}'(\Omega)\widehat{U}(\Omega) - \widehat{V}(\Omega)\widehat{U}'(\Omega)}{\widehat{V}^2(\Omega) + \widehat{U}^2(\Omega)}. \qquad (3.7)$$

Формула справедлива для всех значений Ω, не являющихся корнями вспомогательного многочлена $\widehat{U}(\Omega)$.

Для монотонно возрастающей функции производная положительна, поэтому справедливо неравенство $\widehat{V}'(\Omega)\widehat{U}(\Omega) - \widehat{V}(\Omega)\widehat{U}'(\Omega) > 0$.

Этап 4. Предварительные результаты

Из приведенных выше данных следует

Лемма 3.5. Следующие условия эквивалентны:

1. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является непустым множеством.

2. Полином (n − 2)-го порядка

$$\widehat{P}(s) = \left(a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \ldots\right) + s\left(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^3 + \ldots\right)$$

устойчив.

3. Выполняется неравенство

$$\widehat{V}'(\Omega)\widehat{U}(\Omega) - \widehat{V}(\Omega)\widehat{U}'(\Omega) > 0, \qquad (3.8)$$

где

$$\widehat{U} = a_2 - 2a_4\Omega + 3a_6\Omega^2 - \ldots, \quad \widehat{V} = a_3 - 2a_5\Omega + 3a_7\Omega^2 - \ldots, \quad \Omega = \omega^2. \qquad (3.9)$$

Пример 2. Пусть n = 5. В соответствии с *Леммой 3.1*, необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости a_0, a_1 является устойчивость полинома $\widehat{P}(s) = a_2 + a_3s + 2a_4s^2 + 2a_5s^3$, то есть выполнение неравенства $a_2 < a_3a_4 / a_5$.

Пример 3. Пусть n = 6. Тогда, в соответствии с (3.8), необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости a_0, a_1 является устойчивость полинома $\widehat{P}(s) = a_2 + a_3s + 2a_4s^2 + 2a_5s^3 + 3a_6s^4$, то есть выполнение неравенства

$$a_2 < \frac{a_3}{a_5}\left(a_4 - \frac{3}{4}\frac{a_3a_6}{a_5}\right).$$

Этап 5. Кривая *D*-разбиения и область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1. Общие положения

Для построения области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ воспользуемся известным методом *D*-разбиения [4]. Граничная кривая *D*-разбиения находится из характеристического уравнения $P(s)=0$ после подстановки $s=j\omega$:

$$P(j\omega,\, a_0,\, a_1) = 0, \tag{3.10}$$

где a_0, a_1 — искомые переменные, а ω — параметр, принимающий произвольные вещественные значения. Комплексное уравнение (3.8) разбивается на два вещественных уравнения:

$$\operatorname{Re} P\left(j\omega, a_0\right)=0, \qquad \operatorname{Im} P\left(j\omega, a_1\right)=0, \tag{3.11}$$

где $\operatorname{Re} P\left(j\omega, a_0\right)$, $\operatorname{Im} p\left(j\omega, a_1\right)$ — вещественная и мнимая части $p\left(j\omega\right)$.

Рассматривая ω как заданную величину, решим уравнения (3.11) относительно a_0 и a_1:

$$a_0(\Omega)=a_2\Omega-a_4\Omega^2+a_6\Omega^3-\ldots, \qquad a_1(\Omega)=a_3\Omega-a_5\Omega^2+a_7\Omega^3-\ldots, \tag{3.12}$$

где обозначено $\Omega=\omega^2\in[0,\infty]$. $\in[0,\infty]$

Придавая параметру Ω различные значения в пределах от 0 до ∞, построим граничную кривую *D*-разбиения плоскости a_0, a_1.

Пример 4. В качестве иллюстрации на рис. 3.2 приведена *D*-кривая для конкретного полинома восьмого порядка.

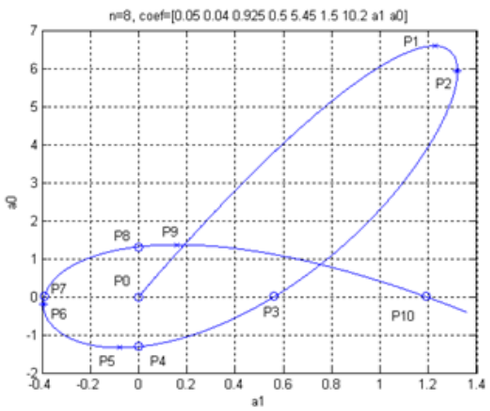


Рис. 3.2. D-кривая для конкретного полинома P(s), n = 8

На рис. 3.2 отмечены следующие характерные точки *D*-кривой:

- точки пересечения кривой с координатной осью a_1 (точки P_0, P_3, P_7, P_{10}) и с координатной осью a_0 (точки P_0, P_4, P_9),
- точки, в которых касательная к кривой параллельна оси a_1 (точки P_1, P_5, P_9) и оси a_0 (точки P_2, P_6).

Этап 6. Условие выпуклости кривой *D*-разбиения

Рассматривается гладкая кривая *D*-разбиения плоскости a_0, a_1, являющаяся графиком непрерывной функции $a_0=f(a_1)$.

Функция $a_0=f(a_1)$ задана *параметрически* равенствами (3.12), где ω — параметр. Вспомогательные функции $a_0(\omega)$, $a_1(\omega)$ в (3.11) имеют непрерывные, одновременно не равные нулю производные. Первая производная функции $a_0=f(a_1)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{da_0}{da_1}=\frac{da_0}{d\Omega}\frac{d\Omega}{da_1}=\frac{da_0/d\Omega}{da_1/d\Omega}. \tag{3.13}$$

Формула (3.13) выражает производную от функции $a_0=f(a_1)$ в *параметрическом виде*. Вторая производная функции $a_0=f(a_1)$, выраженная в параметрическом виде, может быть представлена следующим соотношением:

$$\left(\frac{d^2a_0(a_1)}{da_1^2}\right)=\frac{d}{da_1}\left(\frac{da_0(a_1)}{da_1}\right)=\frac{d}{da_1}\left(\frac{da_0/d\Omega}{da_1/d\Omega}\right)=\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{da_0/d\Omega}{da_1/d\Omega}\right)\frac{d\Omega}{da_1}. \tag{3.14}$$

Коротко о терминологии. Кривая $a_0=f(a_1)$ в точке $(a_0,\, a_1)$ обращена *выпуклостью вверх*, если существует такая окрестность точки $(a_0,\, a_1)$, что часть кривой, соответствующая этой окрестности, лежит *под* касательной к этой кривой, проведенной в анализируемой точке. Кривая $a_0=f(a_1)$ в точке $(a_0,\, a_1)$ обращена *выпуклостью вниз*, если существует такая окрестность точки $(a_0,\, a_1)$, что часть кривой, соответствующая этой окрестности, лежит *над* касательной к этой кривой, проведенной в анализируемой точке.

Будем называть кривую $a_0=f(a_1)$ выпуклой *вверх* (*вниз*) в интервале $(a_{1,1},\, a_{1,2})$, если она выпукла вверх (вниз) в каждой точке этого интервала.

Теорема 3.6. Пусть $a_0=f(a_1)$ дифференцируема на $(a_{1,1},\, a_{1,2})$. Если во всех точках интервала $(a_{1,1},\, a_{1,2})$ вторая производная функции $a_0=f(a_1)$ отрицательная, то есть $f''\left(a_1\right)<0$, то график функции на этом интервале выпуклый вверх (выпуклый), если же $f''\left(a_1\right)>0$ — выпуклый вниз (вогнутый).

Говорят, что параметр Ω *ориентирует* данную *D*-кривую. На ней можно нанести стрелку, указывающую общее направление движения точки $P(\Omega)$ при возрастании Ω. Так, *D*-кривая на приведенном выше рис. 3.2 начинается при (Ω=0) в точке P_0 (в точке начала координат), дальнейшему увеличению параметра Ω соответствуют точки $P_1, P_2, ..., P_{10}, ...$

Вернемся к кривой *D*-разбиения для общего случая с параметрическими уравнениями (3.12). Продифференцируем эти уравнения по параметру Ω:

$$\frac{da_0(\Omega)}{d\Omega} = \widehat{U}(\Omega), \qquad \frac{da_1(\Omega)}{d\Omega} = \widehat{V}(\Omega), \tag{3.15}$$

где $\widehat{U} = a_2 - 2a_4\Omega + 3a_6\Omega^2 - ...,\ \widehat{V} = a_3 - 2a_5\Omega + 3a_7\Omega^2 - ...,\ \Omega = \omega^2.$

С учетом свойств полиномов $\widehat{U}(\Omega), \widehat{V}(\Omega)$, справедливо следующее положение.

Утверждение 3.7. Если область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является непустым множеством, то все корни уравнений $\frac{da_0(\Omega)}{d\Omega} = 0,\ \frac{da_1(\Omega)}{d\Omega} = 0$ положительны.

Обозначим корни уравнения $\frac{da_1(\Omega)}{d\Omega} = 0$ через $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, ...,$ где $0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 < \Omega_4 < ...$ Предположим, что на интервалах $(0, \Omega_1)$, (Ω_2, Ω_3), ..., $(\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}), ...,\ m = 0, 1, 2, ...$ числовой оси парметра Ω график функции $a_0 = f(a_1)$ выпуклый вверх, а на интервалах (Ω_1, Ω_2), (Ω_3, Ω_4), ...,$(\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2}), ...,\ m = 0, 1, 2, ...$ — выпуклый вниз. Достаточное условие для выполнения этого предположения — справедливость двух неравенств:

$$f''(a_1) < 0 \text{ при } \Omega \in (\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}),$$

$$f''(a_1) > 0 \text{ при } \Omega \in (\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2}),\ m = 0, 1, 2, ... \tag{3.16}$$

Кроме того, для указанных интервалов изменения параметра Ω с учетом свойства ориентированности кривой и сделанного предположения о выпуклости графика функции $a_0 = f(a_1)$ выполняются и следующие неравенства:

$$da_1(\Omega)/d\Omega > 0 \text{ при } \Omega \in (\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}),$$

$$da_1(\Omega)/d\Omega < 0 \text{ при } \Omega \in \Omega \in (\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2}),\ m = 0, 1, 2, ... \tag{3.17}$$

Вместо *двух* неравенств (3.16) можно получить *одно* тождественное им неравенство. Для этого умножим левые части неравенств на $da_1(\Omega)/d\Omega$. Тогда, с учетом (3.17), имеем для любого интервала $(\Omega_{2m},\ \Omega_{2m+1})$ или $(\Omega_{2m+1},\ \Omega_{2m+2})$ на числовой оси параметра Ω:

$$\left(\frac{d^2a_0(a_1)}{d\ {}^2_1}\right)\left(\frac{d^2a_0(a_1)}{da_1^2}\right)\left(\frac{da_1(\Omega)}{d\Omega}\right) < 0. \tag{3.18}$$

Вторая производная в (3.18) определяется формулой (3.13), с учетом (3.6), получим:

$$\left(\frac{d^2a_0(a_1)}{da_1^2}\right) = \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{\widehat{U}(\Omega)}{\widehat{V}(\Omega)}\right)\frac{1}{\widehat{V}(\Omega)} = \frac{\widehat{U}'(\Omega)\widehat{V}(\Omega) - \widehat{U}(\Omega)\widehat{V}'(\Omega)}{\widehat{V}^3(\Omega)}.$$

Тогда неравенство (3.18) примет вид:

$$\left(\frac{\widehat{U}'(\Omega)\widehat{V}(\Omega) - \widehat{U}(\Omega)\widehat{V}'(\Omega)}{\widehat{V}^3(\Omega)}\right)\widehat{V}(\Omega) < 0 \quad \text{или} \quad \widehat{U}'(\Omega)\widehat{V}(\Omega) - \widehat{U}(\Omega)\widehat{V}'(\Omega) < 0.$$

Очевидно, что полученное неравенство $\widehat{U}'(\Omega)\widehat{V}(\Omega) - \widehat{U}(\Omega)\widehat{V}'(\Omega) < 0$ тождественно неравенству (3.8). Поэтому справедливо следующее положение.

Лемма 3.11. Если вспомогательный полином (n − 2)-го порядка $\widehat{P}(s) = (a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + ...) + s(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + ...)$ устойчив, то

- область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является непустым множеством;
- для интервалов $(0, \Omega_1)$, (Ω_2, Ω_3), ..., $(\Omega_{2m}, \Omega_{2m+1}),..,\ m = 0, 1, 2, ...$ числовой оси параметра Ω график *D*-кривой на плоскости коэффициентов a_0, a_1, то есть функции $a_0 = f(a_1)$, выпуклый вверх, а для интервалов (Ω_1, Ω_2), (Ω_3, Ω_4), ..., $(\Omega_{2m+1}, \Omega_{2m+2})$, $m = 0, 1, 2,$ ... — выпуклый вниз.

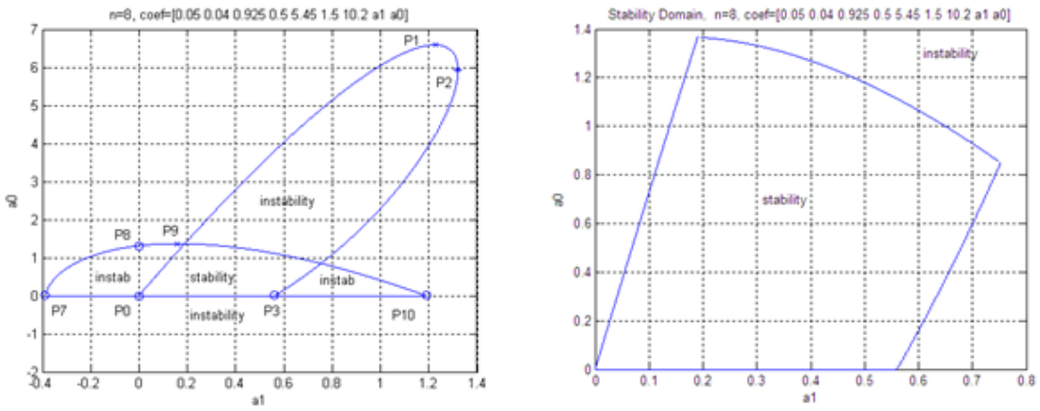
Отметим, что из Леммы 3.11 следует теорема 3.3.

Этап 7. О выпуклости области устойчивости

С учетом изложенного, можно показать, что область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 является пересечением нескольких выпуклых множеств, образованных соответствующими участками (дугами) *D*-кривой и отрезками оси абсцисс (или одними дугами) и поэтому, на основании известной теоремы, является выпуклым множеством.

В качестве примера рассмотрим снова D-кривую на рис. 3.2. На дополнительном рис. 3.3а для этой D-кривой показаны два выпуклых множества, формирующих область устойчивости: одно множество ограничено сверху дугой $P_0P_1P_2P_3$ кривой D-разбиения, а снизу — отрезком P_0P_3 и дугой P_2P_3; другое множество ограничено сверху дугой $P_7P_8P_9P_{10}$, а снизу — отрезком P_7P_{10} оси абсцисс.

Пересечение двух выпуклых множеств является выпуклой областью устойчивости (см. рис. 3.3б).



а) б)

Рис. 3.3. Формирование области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1

Таким образом, основная теорема 3.4 также доказана.

Этап 8. Примеры. Область устойчивости на плоскости коэффициентов (a_0, a_1), $n = 5$.

Предварительно рассмотрим след области устойчивости на плоскости коэффициентов a_2, a_3.

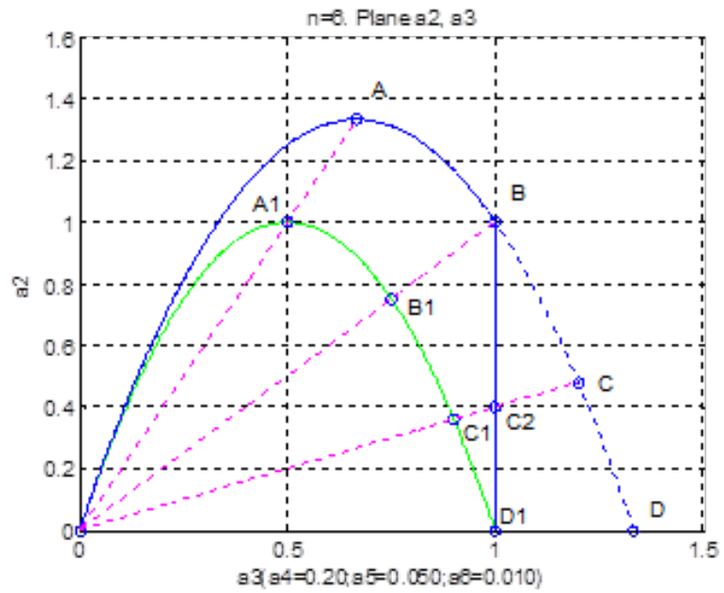
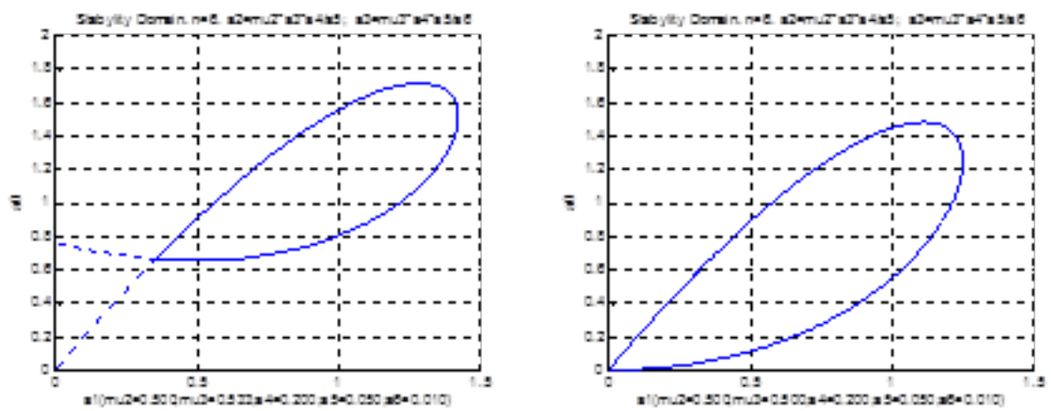


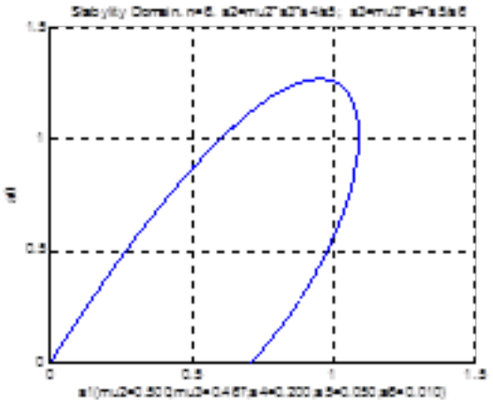
Рис. 3.4. След (синий) и проекция (зеленый) области устойчивости на плоскости коэффициентов a_2, a_3

Выберем на плоскости коэффициентов a_2, a_3 характерные точки и для них построим искомые области устойчивости на плоскости коэффициентов (a_0, a_1).

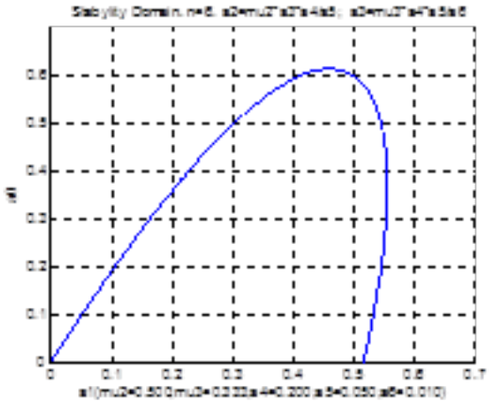


а) $a_3(p_2) = 0{,}80a_3(A)$ б) $a_3(A_1) = 0{,}75a_3(A)$

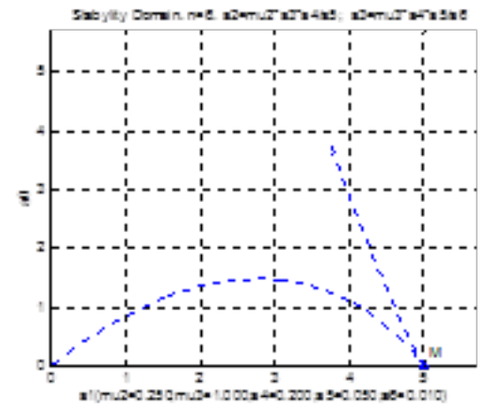
Рис. 3.5. Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для различных значений коэффициентов a_2, a_3



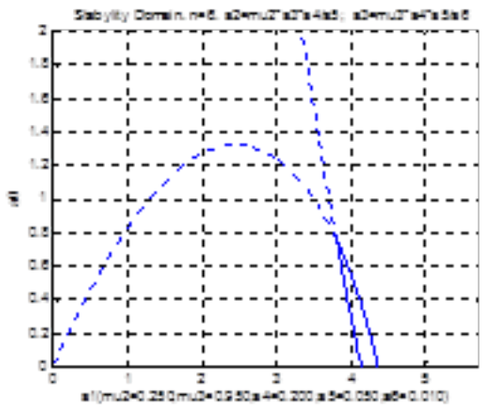
в) $a_3(\mathrm{p}_3) = 0{,}70a_3(A)$



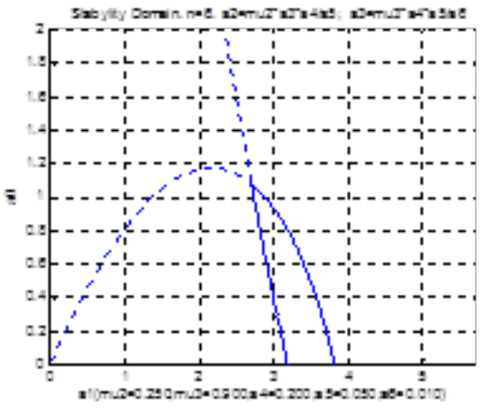
г) $a_3(\mathrm{p}_4) = 0{,}50a_3(A)$



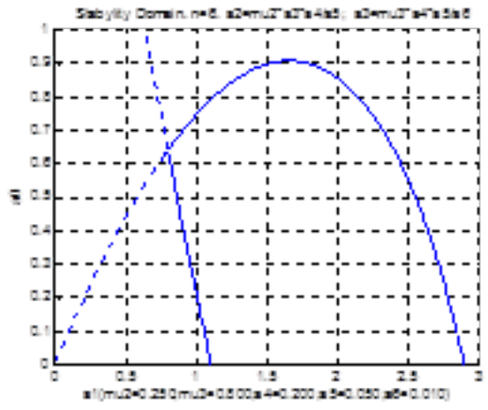
д) $a_3(B) = a_4a_5/a_6$



е) $a_3b_{21} = 0{,}95a_3(B)$

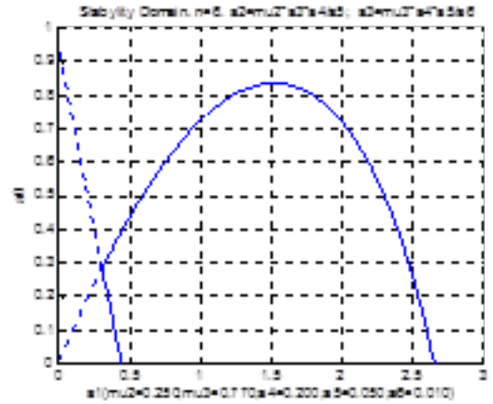


ж) $a_3b_{22} = 0{,}90a_3(B)$

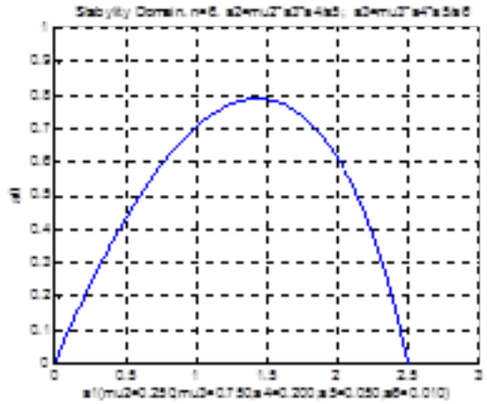


з) $a_3b_{23} = 0{,}8a_3(B)$

Рис. 3.5 (продолжение). Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для различных значений коэффициентов a_2, a_3



и) $a_3b_{24} = 0{,}77a_3(B)$



к) $a_3(B_1) = (3/4)a_3(B)$

Рис. 3.5 (окончание). Области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для различных значений коэффициентов a_2, a_3

Выводы

· Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1, $r = 0, 1, \ldots$ полинома $P(s)$ является выпуклым множеством.

· Необходимым и достаточным условием существования области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 полинома $P(s)$ является устойчивость вспомогательного полинома

$$\widehat{P}(s) = \left(a_2 + 2a_4s^2 + 3a_6s^4 + \ldots\right) + s\left(a_3 + 2a_5s^2 + 3a_7s^4 + \ldots\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Остановимся кратко на устойчивости по Ляпунову и на критериях устойчивости динамических систем с обратной связью, используемых в данной работе.

Первым методом Ляпунова называют метод исследования устойчивости положений равновесия, основанный на анализе линеаризованных уравнений в окрестности положения равновесия.

В основе этого метода лежит следующая теорема.

Теорема П1. Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы лежат слева от мнимой оси, то положение равновесия асимптотически устойчиво, а если среди этих корней имеется хотя бы один, лежащий справа от мнимой оси, то положение равновесия неустойчиво.

Устойчивость по Ляпунову названа в честь Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918), защитившего диссертацию «Общая проблема устойчивости движения» в Харьковском университете в 1892 году [16–17].

А. М. Ляпунов был пионером в успешных попытках разработать глобальный подход к анализу устойчивости нелинейных динамических систем по сравнению с широко распространенным локальным методом их линеаризации относительно точек равновесия.

Самым главным преимуществом метода функций Ляпунова перед всеми остальными подходами к решению разнообразных задач устойчивости является его универсальность.

Сейчас метод функций Ляпунова является единственным математическим методом, который может использоваться для исследования устойчивости динамических систем любого нелинейного вида и любой размерности.

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (1852–1938)

Задача отыскания критерия устойчивости для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, была сформулирована Максвеллом в 1868 году. Максвелл обратился к членам Лондонского королевского общества с предложением подыскать метод, который бы не требовал прямого нахождения всех корней характеристического полинома, но давал бы суждение только о знаке их вещественной части.

КРИТЕРИЙ СТОДОЛЫ

Линейная система устойчива, если все коэффициенты характеристического полинома положительны.

Доказательство критерия — см. [12, стр.13].

P. S. Аурель Болеслав Стодола (англ. *Aurel Stodola*; 1859—1942) — словацкий ученый, педагог, инженер-конструктор. Основатель прикладной термодинамики турбиностроения.

С марта 1892 года был профессором в области машиностроения в Швейцарском политехническом институте (в настоящее время — швейцарская высшая техническая школа Цюриха). Одним из его студентов был Альберт Эйнштейн.

КРИТЕРИЙ ЭРМИТА–БИЛЕРА [1852, 1879]

Примечание. Задача об определении условий расположения корней характеристического уравнения в левой полуплоскости была решена в 1851 г. французским математиком Ш. Эрмитом [14]. Спустя 28 лет, в 1879 г. его результаты получили более простую математическую трактовку в статье Билера [15] и стали доступными для специалистов.

КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА [1895]

В конце XIX века словацкий инженер, создатель теории регулирования турбин, А. Стодола, не зная работ Рауса, доказал необходимое условие устойчивости полиномов с вещественными коэффициентами (1892) и поставил задачу об отыскании необходимых и достаточных условий перед выдающимся немецким математиком А. Гурвицем (*Adolf Hurwitz*).

Гурвиц работал профессором Политехнической школы в Цюрихе. Среди его студентов в Цюрихе были Давид Гильберт и Альберт Эйнштейн.

Алгебраический критерий устойчивости системы любого порядка, предложенный Гурвицем, был опубликован в 1895 году.

В работе [18] предложена декомпозиция характеристического уравнения линейных систем — изучение влияния отдельных групп коэффициентов уравнения на запасы устойчивости системы в целом. Для исследования используются основные положения критерия Гурвица и их модификация (диагональные матрицы).

Результаты работы направлены на получение простых необходимых условий устойчивости, удобных для решения прикладных задач, в частности — для оперативного определения причин возникновения автоколебаний во время отработки новых систем управления.

В частности, показано, что необходимым условием устойчивости является выполнение простых неравенств: $a_k < \mu_k \dfrac{a_{k+1}a_{k+2}}{a_{k+3}}$, ..., $k = 0, 1, ..., n-3$, $\mu_k \in (0, 1)$.

КРИТЕРИЙ МИХАЙЛОВА [1938]

Критерий был опубликован в журнале АиТ (1938 г.) — см. [13].

Литература

1. *Carlos M. Madrid Casado*. Наука. Величайшие теории: вып. 34: Вначале была аксиома. Гильберт. Основания математики. ISSN 2409-0069. Пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2015. — 176 с.

2. *Гильберт Д.* Избранные труды. Т.1, 2. М.: «Факториал», 1998.

3. *Арнольд В. И.* Вещественная алгебраическая геометрия. Москва. МЦНМО, 2009.

4. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВА, 1949.

5. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954.

6. *Мееров М. В.* Синтез структур систем автоматического управления высокой точности. М.: Наука, 1967.

7. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука,1975.

8. *Marden M.* Geometry of polynomials. N.Y.: Amer. Math. Soc, 1989 (4th edition).

9. *Филлипс Ч.*, *Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
Phillips C., Harbor R. Feedback Control Systems, 4th Edition, 2000. Prenticehall, Inc., 2000.

10. *Поляк Б. Т.*, *Хлебников М. В.*, *Рапопорт Л. Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.

11. *Barmish B. R.* New tools for robustness of linear systems. New York: MacMillan, 1995.

12. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. М., Наука, 1981.

13. *Михайлов А. В.* Гармонический метод в теории регулирования. // АиТ, №3, 1938. — С. 27—38.

14. *Hermite C.* Sur le nombre des racines d'une equation algebrique comprise entre des limites donnees. // J. Reine Angew. Math. 1852. Vol. 52. — P. 39—51.

15. *Biehler M.* Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont rйelles. // J. Reine Angew. Math. 87 (1879). — P. 350—352.

16. Общая задача об устойчивости движения. *Ляпунов, А. М.*, докторская диссертация, Унив. Харьков. 1892.

17. *Руш Н.*, *Абетс П.*, *Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

18. *Кузнецов А. Г.*, *Николаев Ю. П.* Критерий Гурвица. Модификация. // Навигация и управление летательными аппаратами. №28, 2020. — С. 2—10.

19. *Рахман Q. Я.*, *Шмайссер Г.* Аналитическая теория многочленов, том 26 монографий Лондонского математического общества. Новая серия. Пресса Оксфордского университета Clarendon Press, Оксфорд, 2002.

20. *Васильев О.* (*Grey Violet*). Геометрия задач *D*-устойчивости. Universitat Konstanz. Москва, 2017.

21. *Николаев Ю. П.* Анализ геометрии характеристических областей устойчивости одного класса систем с обратной связью. // Навигация и управление летательными аппаратами. №36, 2022. — С. 11—35.

УДК 629.7.054.07

ВЛИЯНИЕ ВЕТРА НА ВЫПОЛНЕНИЕ ПОЛЕТА

Михаил Дмитриевич ТУМАЕВ
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru

В докладе рассматривается поведение параметров ветра при выполнении полета на маршруте. На основе данных испытательного полета среднемагистрального самолета приводятся графики поведения параметров и оцениваются маршрутные параметры.

Ключевые слова: *влияние параметров ветра, зональная навигация.*

WIND EFFECT ON FLIGHT OPERATIONS

Mikhail D. TUMAEV
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru

The report considers wind parameters behavior during en-route operations. Parameters behavior graphs are given and flight path parameters are estimated based on the data of medium-haul aircraft test flight.

Keywords: *wind effect, area navigation.*

Метеорологические условия, такие как температура, давление, влажность, ветер и т. д. оказывают значительное влияние на выполнение полета. Знание метеорологических условий в полете является одним из факторов его успешного выполнения, т. е. позволяют обеспечить безопасность, регулярность и экономическую эффективность полета воздушного судна (ВС). Среди всех характеристик состояний атмосферы ветер оказывает существенное влияние на движение ВС на всех этапах полета [1].

Ветром называется движение воздуха относительно земной поверхности. Особое влияние ветер оказывает на взлет и посадку ВС, за счет чего может значительно изменяться длина разбега при взлете и длина пробега при посадке. Что определяется изменением температуры и давления в приземных слоях атмосферы.

Современная авиация имеет высокие скорости, а полеты выполняются на больших высотах, где наблюдаются большие скорости ветра, что требует его учета. С учетом ветра выбирается не только маршрут, но и его профиль, что позволяет сэкономить топливо и уменьшить продолжительность полета.

Для решения задач самолетовождения воздушные суда используют широкий спектр навигационных систем, включая инерциальную навигационную систему (ИНС), систему воздушных сигналов (СВС), спутниковую навигационную систему (СНС) и другие. Однако ядром ПНК является система самолетовождения (ФМС) Flight Management System (FMS), которая решает различные задачи, такие как прием, обработку и выдачу данных от взаимодействующего оборудования, расчет и поддержание высоты, формирование плана полета и управление сигналами для выдерживания заданных параметров. На рис. 1 представлена упрощенная схема навигационного комплекса [2].

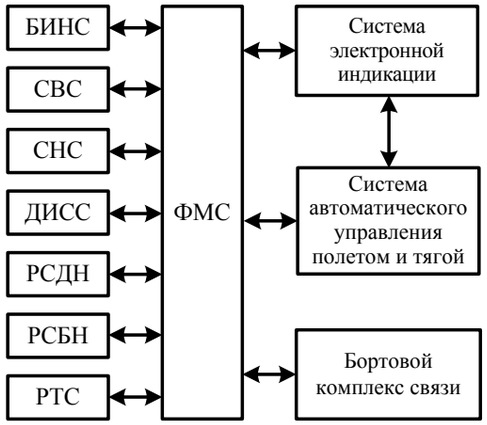


Рис. 1. Упрощенная схема навигационного комплекса

БИНС — бесплатформенная инерциальная навигационная система
СВС — система воздушных сигналов
СНС — спутниковая навигационная система
ДИСС — Доплеровский измеритель скорости и сноса
РСДН — радиосистема дальней навигации
РСБН — радиосистема ближней навигации
РТС — радиотехническая система

Системы воздушных сигналов широко используются для определения различных параметров движения самолетов в воздушной среде, таких как барометрическая высота, скорость полета, число Маха. Кроме того, они могут измерять температуру наружного воздуха, давления и относительную плотность воздуха [3].

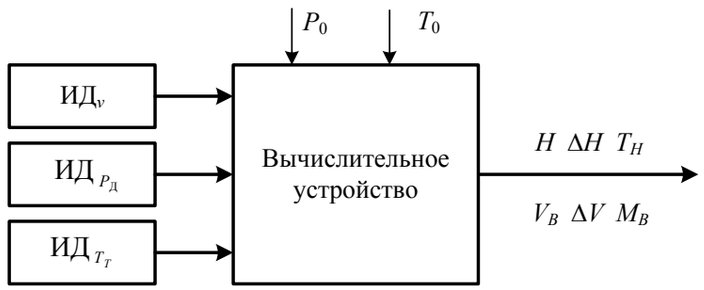


Рис. 2. Схема системы воздушных сигналов

На рис. 2 представлена схема системы воздушных сигналов, где ИДv, ИД$_{P_Д}$, ИД$_{T_Т}$ — датчики, измеряющие соответствующие плотности на высоте, динамическое давление набегающего потока и статическое давление в атмосфере у поверхности земли, температуру соответственно. Стрелкой на рис. 2 показаны выдаваемые электрические сигналы параметров (H, V, M, T_H). Эти сигналы используются для определения текущих параметров полета.

Ветер — это физический процесс перемещения воздуха от области с более высоким давлением к области с более низким давлением, возникающий вследствие разницы в температуре и давлении. Воздушные массы, движущиеся под влиянием ветра, создают сложную аэродинамическую среду, которая оказывает воздействие на самолеты, летающие в атмосфере. Одним из важных параметров, определяющих успешность полета, является скорость полета, которая измеряется относительно поверхности Земли [4].

Скорости разделяются на истинную, приборную и путевую. Истинная воздушная скорость определяется как скорость самолета относительно окружающего воздуха, а индикаторная (приборная) скорость измеряется при помощи бортовых инструментов.

Однако для оценки эффективности полета, особенно на больших расстояниях, наиболее важной является путевая скорость [5].

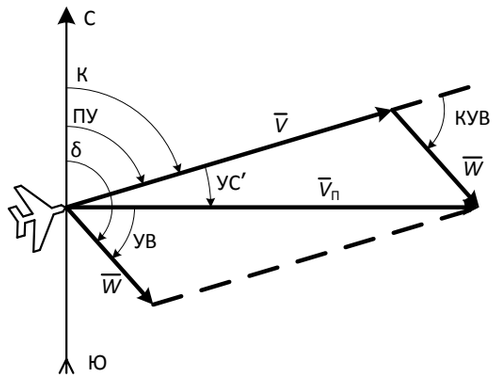


Рис. 3. Навигационный треугольник скоростей

Путевая скорость определяется как сумма векторов скорости самолета относительно воздуха и скорости ветра. Таким образом, при полете против ветра путевая скорость снижается, а при полете по ветру — увеличивается. Именно путевая скорость характеризует реальную скорость передвижения самолета относительно земной поверхности, и поэтому ее учет является критически важным для планирования и выполнения полетов.

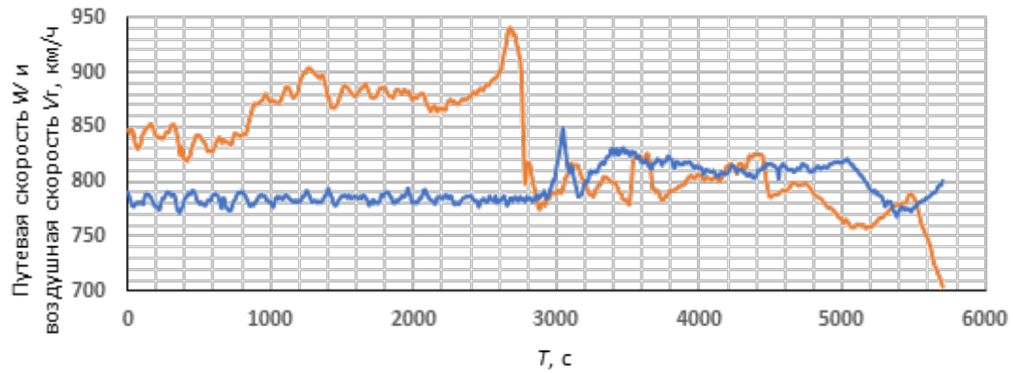


Рис. 4. Графики зависимости путевой и воздушной скорости от времени

В данном исследовании были проанализированы результаты летных испытаний среднемагистрального самолета, направленные на изучение влияния ветра на путевую скорость. Данные о путевой скорости были получены с помощью датчиков БИНС и СНС, тогда как истинная скорость определялась с использованием данных СВС. Анализ

графиков показал, что воздушная скорость наблюдала лишь небольшие колебания, в то время как путевая скорость изменялась значительно. В ходе исследования графиков установлено, что на первой половине маршрута ветер дул в попутном направлении, а на второй половине — встречном, что привело к заметному изменению путевой скорости.

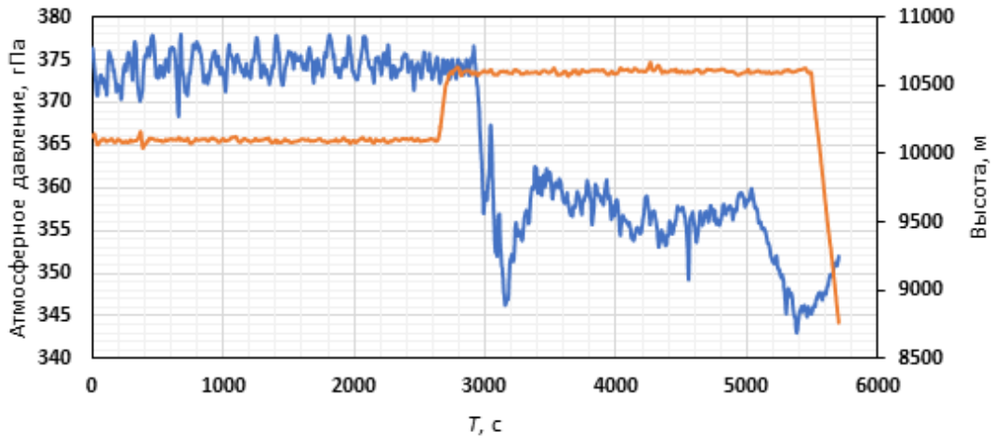


Рис. 5. Графики зависимости атмосферного давления и высоты от времени

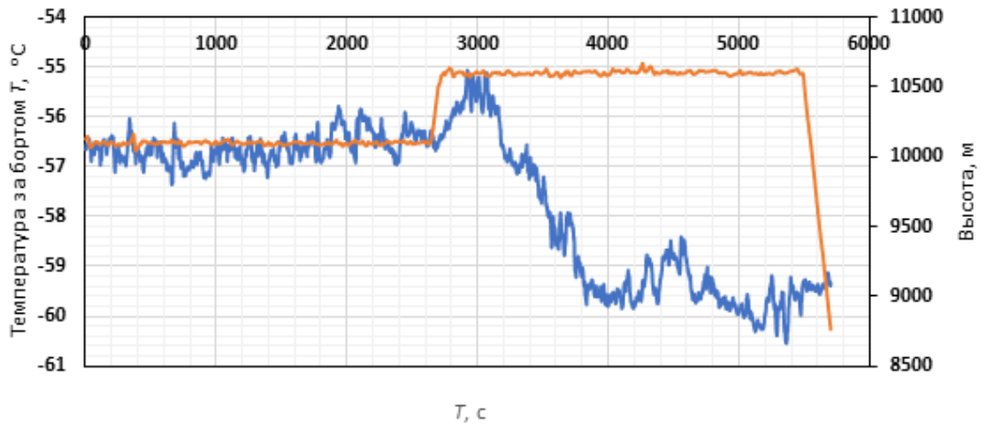


Рис. 6. Графики зависимости температуры за бортом и высоты от времени

На рис. 6 представлены графики, отображающие зависимость температуры, атмосферного давления и скорости ветра от высоты полета. Можно заметить, что при увеличении высоты полета самолета все три параметра снижаются. Данное явление объясняется изменением характеристик атмосферы на разных высотах, что приводит к изменению параметров воздуха.

Полученные данные позволяют сделать вывод о возможности прогнозирования параметров ветра на различных этапах полета и корректировании маршрута в соответствии с полученными результатами. Это особенно важно для обеспечения безопасности полетов и оптимизации их эффективности.

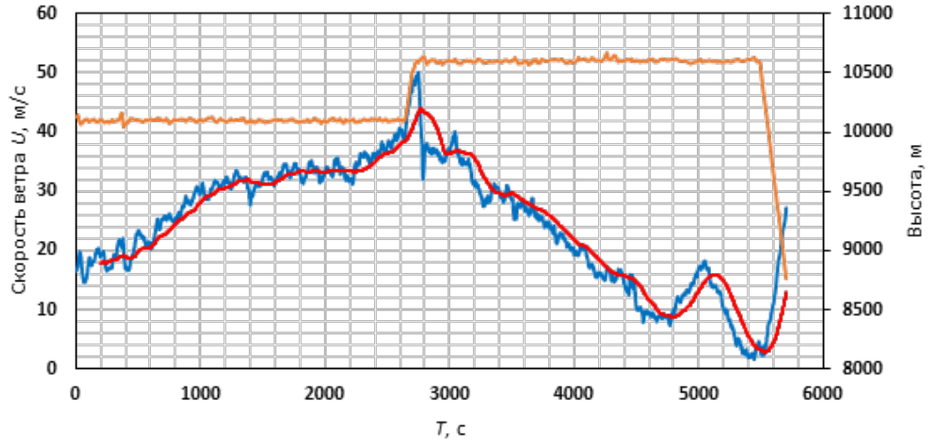


Рис. 7. Графики зависимости скорости ветра и высоты от времени

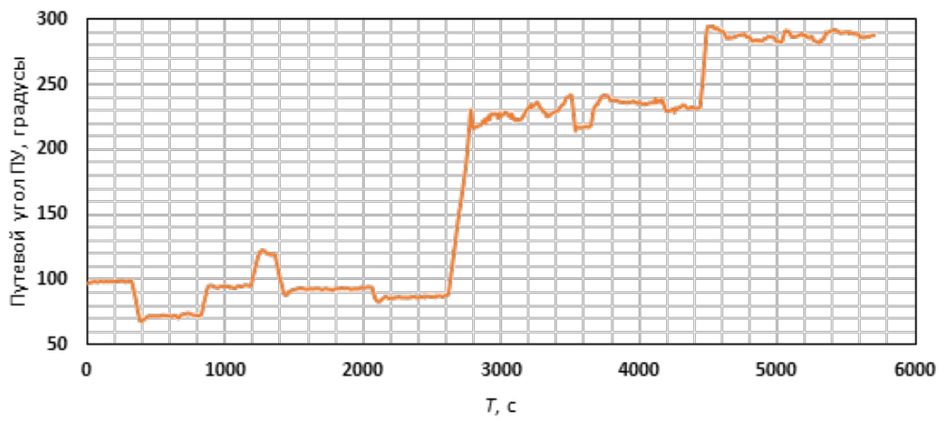


Рис. 8. График зависимости путевого угла (ПУ) от времени

Для более точной оценки поведения скорости и направления ветра при движении самолета были построены соответствующие графики. Анализ полученных данных позволяет установить, что скорость ветра изменяется не только в зависимости от высоты полета, но также оказывается подвержена влиянию различных факторов, таких как развороты.

На рис. 7 представлена зависимость скорости ветра (U) и высоты полета (H) от времени. Видно, что зашумленность сигнала скорости ветра связана с нестабильностью воздушной среды и шумовой составляющей датчиков. Однако осредненный на t-секундном интервале график, показанный красным цветом, позволяет лучше видеть реальные изменения скорости ветра на маршруте, скорость ветра резко меняется при изменении высоты полета и путевого угла (рис. 8).

Анализ данных, полученных при помощи построенных графиков, может быть полезен для определения оптимальной высоты полета и принятия мер по повышению безопасности полетов.

Современные требования к структуре воздушного пространства и обслуживанию воздушного движения предъявляются с целью повышения безопасности и эффективности полетов. В этом контексте особое значение приобретает метод зональной навигации (RNAV — Area Navigation), который позволяет воздушным судам выполнять полет по заданной пространственной траектории.

В целом, данное исследование является важным шагом в развитии авиационной индустрии и может привести к новым достижениям в области управления полетом. Благодаря использованию новейших технологий и методик, можно рассчитывать на более точный анализ данных и более точную оценку влияния ветра на работу самолета, что, в свою очередь, может значительно повысить безопасность полетов и улучшить экономические показатели авиаперевозок.

Литература

1. *Кузнецов А. Г.*, *Зайцева Н. А.* К вопросу анализа концепции организации воздушного пространства. // Навигация и управление летательными аппаратами. Выпуск 27, 2019-4. — С. 41.

2. *Зайцева Н. А.*, *Калинина И. В.*, *Добрянин Е. А.* О выдерживании времени прибытия в контрольную точку. // Навигация и управление летательными аппаратами. Выпуск 39, 2022-4. — С. 75.

3. *Шакина Н.П.* Прогнозирование метеорологических условий для авиации [Текст]: научно-методическое пособие / Н. П. Шакина, А. Р. Иванова; Федеральная служба по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды (Росгидромет), Федеральное государственное бюджетное учреждение "Гидрометеорологический научно-исследовательский центр Российской Федерации". — Москва: Гидрометцентр России, 2016. — 306 с, [4] с.: ил., табл., цв. ил., табл.; 24 см.; ISBN 978-5-9908623-2-6: 600 экз.

4. *Сафонова Т. В.* Авиационная метеорология: учебное пособие / Т. В. Сафонова; М-во трансп. Российской Федерации, Федеральное гос. образовательное учреждение высш. проф. образования Ульяновское высш. авиационное училище гражданской авиации (ин-т). — Ульяновск: УВАУ ГА(И), 2009. — 240 с.: ил., карт., табл.; 21 см.; ISBN 978-5-7514-0184-9.

5. RTCA DO-283A. Minimum Operational Performance Standards for Required Navigation Performance for Area Navigation. RTCA, Inc. Washington, 2015.

Правила оформления материалов, направляемых для опубликования в журнале «Навигация и управление летательными аппаратами»

- Для опубликования в журнале принимаются статьи объемом до 30 с., а также краткие сообщения объемом до 5 стр.
- Статья должна иметь аннотацию не более 600 знаков, ключевые слова.
- На первой странице должны быть указаны: фамилии и инициалы авторов, полное название текста статьи без сокращений, проставлен индекс УДК.
- Материалы должны быть подготовлены в формате *.doc, лист А4, ориентация книжная (вертикальное расположение), шрифт Times New Roman, размер шрифта 12, интервал между строками одинарный, поля (мм): верхнее 22, нижнее 50, левое 30, правое 28, расположение страниц зеркальное. Установить «Автоматическую расстановку переносов». Переносы вручную не ставить.
- Формат формул в MathType или Microsoft Equation: Define Sizes, Full 12 pt, Subscript/Superscript 7 pt, Sub-Subscript/Superscript 5 pt, Symbol 18 pt, Sub-Symbol 12 pt.
- Иллюстрированный материал представляется в формате *.jpg, *.bmp, *.png (разрешение не менее 300 точек на дюйм) или в виде рисунка Word, фрагменты которого объединены в единый объект. Цветные иллюстрации приветствуются.
- В конце текста указывается информация о каждом авторе: Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, полное название и почтовый адрес организации, должность, контактные телефоны (служебный, мобильный или домашний), адрес электронной почты.
- В редакцию предоставляется электронный носитель с текстом статьи и ее распечатка в двух экземплярах, подписанная всеми авторами.
- К статье прилагается экспертное заключение о возможности ее открытой публикации, рецензия, лицензионный договор.
- Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Содержание