

---

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И АВТОМАТИКИ (МИЭА)

**НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

Под общей редакцией  
доктора технических наук, профессора А. Г. Кузнецова

**Выпуск 38**

Москва  
2022

---

УДК 629.7.05

## О ВЫЧИСЛЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ГЕОГРАФИЧЕСКОГО ОПОРНОГО ТРЕХГРАННИКА БИНС

*Александр Владимирович ФОМИЧЕВ, к. ф.-м. н.*

*ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»*

*E-mail: inbox@aomiea.ru*

*В навигационных алгоритмах авиационных БИНС используется географический опорный трехгранник с различными вариантами азимутальной ориентации. Его абсолютная угловая скорость складывается из угловой скорости Земли и угловой скорости движения относительно Земли, традиционно вычисляемой через разложение точных формул по высоте над поверхностью земного эллипсоида и его эксцентриситету.*

*В статье исследуются навигационные погрешности от ограничения числа членов стандартных разложений и приводятся альтернативные формулы для относительной угловой скорости, которые могут представлять интерес для навигационных систем высокой точности.*

**Ключевые слова:** *бесплатформенная инерциальная навигационная система, опорный географический трехгранник, угловая скорость, навигационные погрешности.*

## SINS GEOGRAPHIC REFERENCE TRIAD RELATIVE ANGULAR VELOCITY CALCULATION

*Alexander V. FOMICHEV, PhD in Phys. and Math.*

*‘Moscow Institute of Electromechanics and Automatics’ PJSC*

*E-Mail: inbox@aomiea.ru*

*Geographic reference triad with different types of azimuth orientation is used in aircraft Strapdown Inertial Navigation System (SINS) navigation algorithms. Its absolute angular velocity is the sum of the Earth angular velocity and the angular velocity of motion relative to the Earth traditionally calculated through an expansion of exact formulas for height above the Earth ellipsoid and its eccentricity.*

*The article examines the navigation errors caused by limiting the number of standard expansion terms and provides alternative formulas for relative angular velocity. Such formulas may be of interest for use in high-precision navigation systems.*

**Keywords:** *Strapdown Inertial Navigation System, geographic reference triad, angular velocity, navigation errors.*

## Введение

Большинство пилотажно-навигационных параметров, выдаваемых авиационной БИНС, связано с географическим опорным трехгранником — от него отсчитываются параметры ориентации, в нем же задаются составляющие вектора скорости, а ориентация опорного трехгранника относительно гринвичского задает текущее положение. Погрешности ориентации опорного трехгранника влияют на точность навигационного решения по всем параметрам.

В идеальном случае (т. е. при отсутствии инструментальных и вычислительных ошибок) одна из координатных плоскостей географического опорного трехгранника совпадает с касательной плоскостью к земному эллипсоиду, если БИНС находится на его поверхности. Эллипсоид является моделью поверхности Земли и близок к поверхности уровни сил тяготения и сил инерции, связанных с вращением Земли, из-за чего касательная плоскость к эллипсоиду практически ортогональна линии отвеса и называется горизонтальной.

При поднятии БИНС над поверхностью эллипсоида горизонтальная координатная плоскость опорного трехгранника переносится параллельно (см. рис. 1).

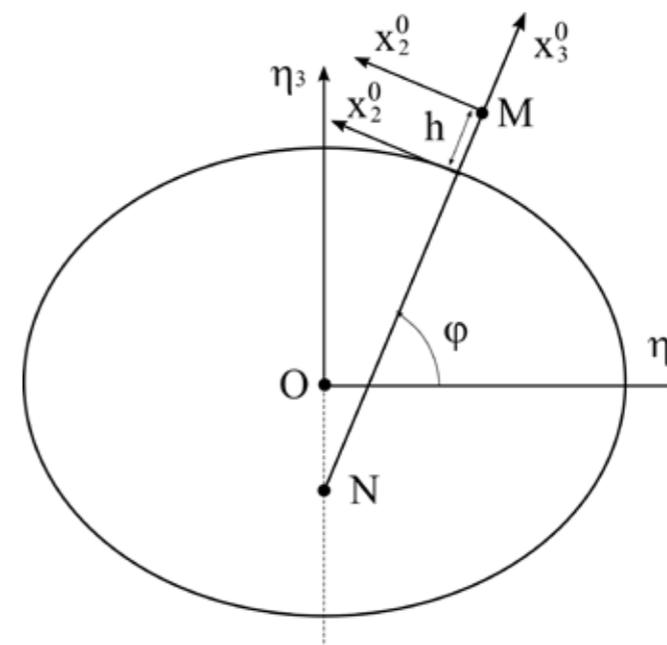


Рис. 1. Ориентация географического трехгранника  $x^0$  относительно гринвичской системы координат  $\eta$  при положении БИНС  $M$  в плоскости гринвичского меридиана; оси  $x_1^0$  и  $\eta_2$  ортогональны плоскости рисунка и не изображены

Различные способы азимутальной ориентации описаны, например, в [1–3]. В данной статье рассматривается наиболее распространенная азимутально полусвободная ориентация.

Для поддержания ориентации опорного трехгранника относительно Земли ему сообщается угловая скорость Земли  $u$  и относительная угловая скорость  $\Omega$ , обеспечивающая заданную ориентацию при произвольном движении БИНС в окрестности поверхности Земли. Угловая скорость  $\Omega$  вычисляется по текущему положению, скорости относительно Земли и параметрам эллипсоида.

Для заданных параметров эллипсоида  $\Omega$  вычисляется абсолютно точно, однако в алгоритмах вместо этого традиционно используются разложения точных формул с точностью до членов порядка  $h/a$  и  $e^2$ , где  $h$  — высота над поверхностью земного эллипсоида,  $e^2$  — эксцентриситет земного эллипсоида,  $a$  — его экваториальный радиус.

В статье оценивается точность этих разложений и анализируется необходимость учета членов более высокого порядка. Приводятся уточненные формулы для относительной угловой скорости.

### Точные и приближенные выражения относительной угловой скорости

В литературе по инерциальной навигации [1–3] выведены точные формулы, связывающие составляющие линейной скорости относительно Земли с проекциями относительной угловой скорости в осях опорного трехгранника при движении в окрестности земного эллипсоида с заданными параметрами. Приведем их без вывода, который можно найти в [1–3]:

$$\begin{aligned} V_1 &= (R_e + h)\Omega_2 - \frac{e^2 R_e b_{13}}{1 - e^2 b_{33}^2} (\Omega_2 b_{13} - \Omega_1 b_{23}), \\ V_1 &= -(R_e + h)\Omega_1 - \frac{e^2 R_e b_{23}}{1 - e^2 b_{33}^2} (\Omega_2 b_{13} - \Omega_1 b_{23}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь:

$V_1, V_2$  — проекции скорости относительно Земли на горизонтальные оси опорного трехгранника;

$\Omega_1, \Omega_2$  — проекции относительной угловой скорости на горизонтальные оси опорного трехгранника;

$R_e = a / \sqrt{1 - e^2 b_{33}^2}$  — долготный радиус кривизны;

$a$  — экваториальный радиус земного эллипсоида;

$e^2$  — квадрат его эксцентриситета;

$b_{ij}$  — элементы матрицы ориентации опорного трехгранника относительно гринвичского.

В бортовом алгоритме БИНС используются обратные выражения угловых скоростей  $\Omega_1, \Omega_2$  через линейные скорости  $V_1, V_2$ . При этом, как правило, применяются следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{V_2}{a} \left[ 1 + e^2 \left( b_{23}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) - \frac{h}{a} \right] - e^2 b_{13} b_{23} \frac{V_1}{a}, \\ \Omega_2 &= \frac{V_1}{a} \left[ 1 + e^2 \left( b_{13}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) - \frac{h}{a} \right] + e^2 b_{13} b_{23} \frac{V_2}{a}, \end{aligned} \quad (2)$$

получающиеся при разложении (1) по малым параметрам  $e^2$  и  $h/a$ , либо аналогичные выражения того же порядка точности. Представляет интерес оценить остаточные члены этих разложений для характерных авиационных скоростей и высот, исследовать целесообразность их учета в навигационных алгоритмах и получить уточненные формулы.

Точные выражения для  $\Omega_1, \Omega_2$  получаются разрешением линейной системы (1) относительно  $\Omega_1, \Omega_2$ . Можно показать, что

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{[R_e + h - e^2(b_{13}^2 + b_{33}^2)R_e - e^2 b_{33}^2 h]V_2 + e^2 b_{13} b_{23} R_e V_1}{(R_e + h)[R_e + h - e^2(R_e + b_{33}^2 h)]}, \\ \Omega_2 &= \frac{[R_e + h - e^2(b_{23}^2 + b_{33}^2)R_e - e^2 b_{33}^2 h]V_1 + e^2 b_{13} b_{23} R_e V_2}{(R_e + h)[R_e + h - e^2(R_e + b_{33}^2 h)]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для оценки отличий выражений (2) и (3) в (3) подставляется  $R_e = a / \sqrt{1 - e^2 b_{33}^2}$ , а полученные формулы раскладываются в ряды Тейлора по малым параметрам  $e^2$  и  $\mu = h/a$  с точностью до членов порядка  $\sim e^4, \mu^2, \mu e^2$ . Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{V_2}{a} - e^2 \left[ b_{13} b_{23} \frac{V_1}{a} + \left( b_{23}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) \frac{V_2}{a} \right] + \mu \frac{V_2}{a} - \\ & - e^4 \frac{(4b_{13} b_{23} b_{33}^2 + 8b_{13} b_{23}^3 + 8b_{13}^3 b_{23})V_1 + (8b_{13}^2 b_{23}^2 + 4b_{23}^2 b_{33}^2 + 8b_{23}^4 - b_{33}^4)V_2}{8a} - \\ & - \mu e^2 \frac{(b_{33}^2 - 2b_{23}^2)V_2 - 2b_{13} b_{23} V_1}{a} - \mu^2 \frac{V_2}{a}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Omega_2 = \frac{V_1}{a} + e^2 \left[ b_{13} b_{23} \frac{V_2}{a} + \left( b_{13}^2 - \frac{b_{33}^2}{2} \right) \frac{V_1}{a} \right] - \mu \frac{V_1}{a} - e^4 \frac{(b_{33}^4 - 8b_{13}^4 - 8b_{13}^2 b_{23}^2 - 4b_{13}^2 b_{33}^2) V_1 - (4b_{13} b_{23} b_{33}^2 + 8b_{13} b_{23}^3 + 8b_{13}^3 b_{23}) V_2}{8a} - \mu e^2 \frac{(2b_{13}^2 - b_{33}^2) V_1 + 2b_{13} b_{23} V_2}{a} + \mu^2 \frac{V_1}{a}. \quad (4)$$

**Оценка порядков членов разложения и их влияния на точность навигационного решения**

Формулы (4) позволяют легко оценить порядки величин каждого члена разложения для заданных скоростей и высот движения. Рассмотрим характерные авиационные скорости  $V_1 \sim V_2 \sim V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \sim 500$  м/с, высоту  $h \sim 10$  км и учтем, что элементы матрицы  $b_{ij} \sim 1$ , поскольку матрица ортогональна и ее элементы — направляющие косинусы опорного трехгранника относительно гринвичского, не превышающие 1 по модулю. Это позволяет упорядочить члены (4) согласно таблице 1.

Таблица 1. Оценка порядков членов формул (4) с учетом  $e^2 \approx 6,7 \cdot 10^{-3}$ ,  $a \approx 6,38 \cdot 10^6$  м,  $b_{ij} \sim 1$

$V/a$	$\sim 16^\circ/\text{час}$
$e^2 V/a$	$\sim 0,1^\circ/\text{час}$
$\mu V/a$	$\sim 0,025^\circ/\text{час}$
$e^4 V/a$	$\sim 7 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{час}$
$\mu e^4 V/a$	$\sim 1,7 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{час}$
$\mu e^2 V/a$	$\sim 3,9 \cdot 10^{-5}^\circ/\text{час}$

Из теории инерциальной навигации известно, что одной из основных характеристик инерциальной системы является дрейф гироскопического тракта, который удобно измерять в градусах за час. Для систем стандартной точности (1–2 морских мили за час работы) характерен дрейф порядка  $0,01^\circ/\text{час}$ . Другая характерная величина — угловая скорость Земли  $\mu \approx 15^\circ/\text{час}$ . Эти две величины могут служить ориентирами для суждений о существенности либо малости величин из таблицы 1.

Первые три графы таблицы соответствуют членам формул (2). Каждая из величин превышает характерный дрейф гироскопов авиационных БИНС и поэтому существенна. Следующие члены оказываются как минимум на порядок меньшими, что оправдывает их исключение из алгоритмов БИНС.

Однако их учет в большинстве случаев может представлять интерес для точных БИНС либо, если по результатам испытаний погрешности БИНС находятся на грани допуска и устранение любого источника систематических ошибок смещает статистические характеристики погрешностей (математическое ожидание  $m$ , СКО  $\sigma$ , показатель  $|m|+2\sigma$ ) в зону допуска. Как видно из таблицы, в первую очередь должен учитываться член порядка  $\sim e^4$ , тогда как другими членами (4) естественно пренебрегать, что следует, в том числе, из приводимых ниже оценок члена  $\sim e^4$ .

Заметим, что в бортовых алгоритмах БИНС величина  $\Omega$  входит в кинематические уравнения Пуассона

$$\dot{B} = \hat{\Omega} B, \quad (5)$$

где  $\hat{\Omega}$  — кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора  $\Omega$  по правилу

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Если угловая скорость  $\Omega$  вычисляется с погрешностью  $v_\Omega$ , то вместо уравнений (5) получим систему

$$\dot{B}' = \hat{\Omega}' B', \quad \hat{\Omega}' = \hat{\Omega} + \hat{v}_\Omega, \quad (7)$$

где оператор  $\hat{v}_\Omega$  ставится в соответствие вектору  $v_\Omega$  по правилу (6).

Малое отличие вычисленной матрицы  $B'$  от идеальной  $B$  удобно характеризовать оператором малого поворота  $E + \hat{\gamma}$ , где  $\hat{\gamma}$  — кососимметрическая матрица, построенная по правилу (6). Соответствующий ему вектор  $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$  задает эйлеров поворот [4, 5], совмещающий трехгранники, задаваемые матрицами  $B$  и  $B'$ , причем

$$B' = (E + \hat{\gamma}) B. \quad (8)$$

Горизонтальные компоненты вектора  $\gamma$  описывают ошибку вычисленного положения в угловой мере [1–3]. Подстановка (8) в (7), отбрасывание малых второго порядка и учет соответствия матрице  $\hat{\Omega}\hat{\gamma} - \hat{\gamma}\hat{\Omega}$  вектора  $\hat{\Omega}\gamma$  дает следующее уравнение для вектора  $\gamma$ :

$$\dot{\gamma} = \hat{\Omega}\gamma + v_{\Omega}. \quad (9)$$

Формулы (4) и (9) позволяют промоделировать эффект от ограничения порядка разложения (2) для любой траектории. Рассмотрим для примера движение от экватора ( $\varphi = 0$ ) по меридиану с постоянной скоростью 500 м/с и на нулевой высоте  $h = 0$ . Это движение подходит для оценки порядков погрешностей и характера их накопления при равномерном полете.

При таком движении изменяется только широта  $\varphi$ , а долгота и угол платформы постоянны. Без ограничения общности они могут считаться нулевыми:  $\lambda = \varepsilon = 0$ . Тогда  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 500$  м/с, т. к. вторая ось географического трехгранника ориентирована на север,  $\varphi = V_2 t (1 + O(e^2)) / a \approx V_2 t / a$ , где  $t$  — время движения в секундах. Также в выражениях (4) используются элементы третьего столбца матрицы  $B$ , выпишем их для рассматриваемого движения:

$$B = \begin{bmatrix} * & * & \cos\varphi \sin\varepsilon \\ * & * & \cos\varphi \cos\varepsilon \\ * & * & \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 0 \Rightarrow b_{13} = 0, \quad b_{23} = \cos\varphi, \quad b_{33} = \sin\varphi. \quad (10)$$

Для вычисления  $\hat{\Omega}$  в (9) достаточно использовать приближенные формулы  $\Omega_1 = -V_2 / a$ ,  $\Omega_2 = 0$ .

Явный вид уравнений (9) следующий:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= v_{\Omega 1}, \\ \dot{\gamma}_2 &= \Omega_1 \gamma_3 + v_{\Omega 2}, \\ \dot{\gamma}_3 &= -\Omega_1 \gamma_2. \\ v_{\Omega 1} &= -e^4 \frac{(4b_{13}b_{23}b_{33}^2 + 8b_{13}b_{23}^3 + 8b_{13}^3b_{23})V_1 + (8b_{13}^2b_{23}^2 + 4b_{23}^2b_{33}^2 + 8b_{23}^4 - b_{33}^4)V_2}{8a} = \\ &= -e^4 \frac{(8b_{13}^2b_{23}^2 + 4b_{23}^2b_{33}^2 + 8b_{23}^4 - b_{33}^4)V_2}{8a}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_{\Omega 2} &= -e^4 \frac{(b_{33}^4 - 8b_{13}^4 - 8b_{13}^2b_{23}^2 - 4b_{13}^2b_{33}^2)V_1 - (4b_{13}b_{23}b_{33}^2 + 8b_{13}b_{23}^3 + 8b_{13}^3b_{23})V_2}{8a} = \\ &= e^4 \frac{(4b_{13}b_{23}b_{33}^2 + 8b_{13}b_{23}^3 + 8b_{13}^3b_{23})V_2}{8a} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для выбранного движения уравнение для  $\gamma_1$  отделяется от остальных  $V_2 \approx a\dot{\varphi}$ , и с учетом (10) выражение для  $v_{\Omega 1}$  переписывается в виде

$$v_{\Omega 1} = -e^4 \frac{(4\sin^2\varphi \cos^2\varphi + 8\sin^4\varphi - \sin^4\varphi)\dot{\varphi}}{8}. \quad (12)$$

Отсюда и из (11) следует, что

$$\gamma_1 = \int_0^t v_{\Omega 1}(\tau) d\tau, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad \text{если } \gamma_2(0) = \gamma_3(0) = 0. \quad (13)$$

Заметим, что формула (12) имеет вид  $v_{\Omega 1} = f(\varphi)\dot{\varphi}$ , поэтому (13) переписывается в виде

$$\gamma_1 = \int_0^t v_{\Omega 1}(\tau) d\tau = \int_0^t f(\varphi(\tau))\dot{\varphi}(\tau) d\tau = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi), \quad (14)$$

где  $F(\varphi)$  — первообразная функции  $f(\varphi)$ . Из этого следует независимость погрешности от скорости движения по меридиану, что является спецификой выбранной простейшей траектории.

Погрешность положения, соответствующая угловой ошибке  $\gamma_1$ , направлена по меридиану и описывается формулой

$$\Delta r_2 \approx -a\gamma_1.$$

На рис. 2 построен график для случая равномерного движения со скоростью  $V_2 = 500$  м/с.

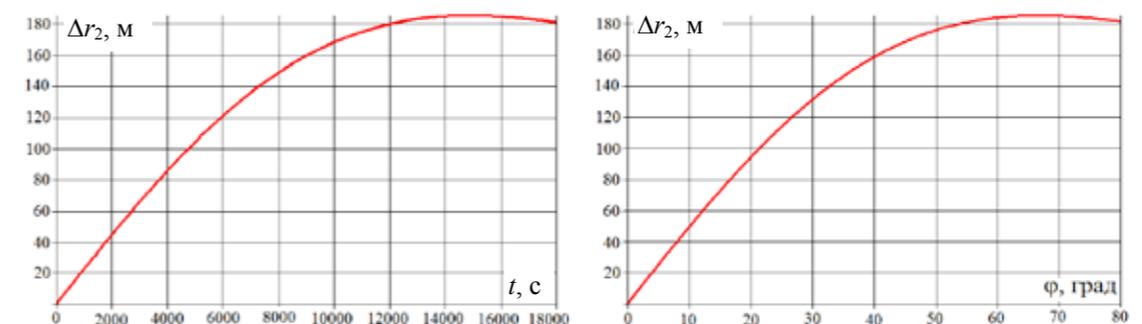


Рис. 2. Зависимости погрешностей положения, обусловленных использованием формул (2) вместо точных формул (3), от времени и широты для движения по меридиану

Таким образом, погрешности разложений (2) вносят методические погрешности вычисления координат, однако они на порядок меньше характерных погрешностей БИНС стандартного класса точности.

### Заключение

В статье исследовано влияние малых членов разложений формул для относительной угловой скорости географического трехгранника, обычно отбрасываемых в алгоритмах БИНС стандартной точности порядка морской мили за час. Показано, что это допущение естественно для систем данного класса.

Однако для некоторых маневров, простейший из которых рассмотрен в статье, отбрасывание малых членов ведет к методическим погрешностям порядка нескольких десятков метров за час работы системы при движении с характерными авиационными скоростями.

Приведены точные и приближенные формулы для относительных угловых скоростей, устраняющие установленные методические погрешности.

### Литература

1. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. – 136 с.
2. Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А. Краткий курс теории инерциальной навигации. М.: ИПУ РАН, 2022. – 148 с.
3. Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы инерциальных навигационных систем. Издательство Московского университета, 2020. – 164 с.
4. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. Москва. Физматлит. 2001. – 320 с.
5. Фомичев А. В. Кинематика точки и твердого тела. М.: МФТИ, 2021. – 125 с.

УДК 621.373.826

## КОМПЕНСАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ЗАХВАТА В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРНОМ ГИРОСКОПЕ

Георгий Витальевич ДАВЫДОВ<sup>1</sup>,  
Юлия Романовна ИВАНЕНКО<sup>1</sup>,  
Валерий Юрьевич МИШИН<sup>1</sup>, к. т. н.  
Алексей Владимирович МОЛЧАНОВ<sup>2</sup>, к. т. н., доцент,  
Андрей Евгеньевич СЕРЕБРЯКОВ<sup>1</sup>, к. т. н.,  
Михаил Викторович ЧИРКИН<sup>1</sup>, д. ф-м. н., профессор  
<sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет  
им. В.Ф. Уткина»,  
<sup>2</sup> ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»  
E-mail: inbox@aomiea.ru

Статья содержит описание математической модели первичных сигналов лазерного гироскопа с учетом связи встречных волн, угловой скорости вращения и аддитивного шума в квадратурных сигналах. Рассмотрена возможность применения метода обработки первичных сигналов, позволяющего компенсировать влияние динамического захвата. Проанализирован случай использования синусоидальной вибрационной частотной подставки без ошумления. Представленные результаты моделирования позволяют: сравнить различные методы обработки первичных квадратурных сигналов, сопоставить способы задания вибрационной частотной подставки, оценить реализуемость и эффективность нового подхода.

**Ключевые слова:** лазерный гироскоп, динамическая зона захвата, вибрационная частотная подставка, фаза Саньяка, вариация Аллана, режекторный фильтр.

## DYNAMIC LOCK-IN COMPENSATION IN A RING LASER GYRO

Georgy V. DAVYDOV<sup>1</sup>,  
Yuliya R. IVANENKO<sup>1</sup>,  
Valery Yu. MISHIN<sup>1</sup>, PhD in Engineering,  
Alexey V. MOLCHANOV<sup>2</sup>, PhD in Engineering,  
Andrey E. SEREBRYAKOV<sup>1</sup>, PhD in Engineering,  
Mikhail V. CHIRKIN<sup>1</sup>, chancellor, D. Sc. in Physics and Mathematics, professor  
<sup>1</sup> Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,  
<sup>2</sup> 'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC  
E-mail: inbox@aomiea.ru

The article describes a mathematical model of the laser gyro primary signals, with consideration to coupling of counter-propagating waves, angular rate and additive noise in quadrature signals. The possibility of using the primary signals processing method to compensate the influence of dynamic lock-in is considered. The case of using a sinusoidal mechanical dither without noise is analyzed. The presented simulation results allow: to compare different methods of primary quadrature signals processing, to compare methods of setting the mechanical dither, to assess the feasibility and effectiveness of the new approach.

**Keywords:** laser gyro, dynamic lock-in, mechanical dither, Sagnac phase, Allan variance, notch filter.

## Введение

В современной авиационной технике гироскопы на основе кольцевых гелий-неоновых лазеров находят широкое применение в бесплатформенных инерциальных системах навигации [1–2]. Слабая связь генерируемых кольцевым лазером встречных волн приводит к методической погрешности в измерении угловой скорости, которая, в частности, проявляется в отсутствии чувствительности лазерного гироскопа к медленному вращению. Способы подавления этой погрешности достаточно хорошо проработаны и успешно представлены рядом технических решений [3–13], разделяющихся на технологические [4, 7–8], производственные [5–6, 9–10] и аппаратно-алгоритмические [11–13, 17–18]. Как правило, в конкретных технических приложениях используется комбинация из нескольких решений.

Аппаратно-алгоритмические решения являются наименее затратными, а, следовательно, наиболее предпочтительными в условиях серийного производства, так как не затрагивают отлаженных технологических процессов. Цель настоящей работы — оценка возможности использования оригинального решения, представленного в работах [11–12], которое позволяет с помощью цифровой обработки квадратурных сигналов с выхода смесительной призмы кольцевого лазера и специального алгоритма компенсировать влияние связи встречных волн в кольцевом резонаторе на зарегистрированные отсчеты угловой скорости.

Исследования выполнены методом математического моделирования лазерного гироскопа со знакопеременной частотной подставкой. Модель описывает:

- формирование разности фаз встречных волн, генерируемых кольцевым лазером (фазы Саньяка) [2–3],
- выделение информации о фазе Саньяка с помощью либо аппроксимации эллипсом последовательности пар отсчетов оцифрованных квадратурных сигналов [13–15], либо реверсивного счета импульсов [16],
- компенсацию влияния связи встречных волн на фазу Саньяка [11–12],
- удаление из отсчетов угловой скорости частотной подставки с помощью узкополосного режекторного фильтра.

Статья содержит описание математической модели первичных сигналов лазерного гироскопа, учитывающей связь встречных волн и угловую скорость вращения, а также аддитивный шум в квадратурных сигналах.

Представленные результаты моделирования позволяют: сравнить различные методы обработки первичных квадратурных сигналов, сопоставить различные методы задания вибрационной частотной подставки. В заключение приводятся выводы о реализуемости и эффективности рассмотренного алгоритма, а также о необходимости будущих работ.

## Математическая модель первичных сигналов лазерного гироскопа

В результате рассеяния лазерного излучения на шероховатостях зеркал, существует слабая связь между генерируемыми волнами, которая приводит к их синхронизации и, как следствие, к нечувствительности гироскопа к малым угловым скоростям вращения. Для устранения данного эффекта используются различные методы смещения из области около нулевых угловых скоростей [16, 22–24], один из которых — механическая вибрационная частотная подставка: кольцевой резонатор совершает колебания относительно корпуса на резонансной частоте виброподвеса с амплитудой колебаний, изменяющейся по случайному закону [20–21]. Ошумление колебаний устраняет эффект динамического захвата, однако усложняет схемотехническое исполнение устройства частотной подставки и вызывает появление дополнительной случайной составляющей в отсчетах угловой скорости. Развитие цифровых методов создает предпосылку для отказа от ошумления при компенсации влияния динамической зоны захвата на выходной сигнал лазерного гироскопа.

На выходе кольцевого лазера формируются квадратурные сигналы:

$$U_{\cos}(t) = U_{\cos,0} + U_{\cos,m} \cos(\psi + \varphi_c), \quad U_{\sin}(t) = U_{\sin,0} + U_{\sin,m} \sin(\psi + \varphi_s).$$

При слабой связи встречных волн в кольцевом лазерном гироскопе изменения фазы Саньяка описывает дифференциальное уравнение [2]:

$$\frac{1}{K} \frac{d\psi}{dt} = \Omega + \omega_i(t) - \omega_L \sin(\psi + \rho), \quad (1)$$

где  $\Omega$  — постоянная угловая скорость вращения корпуса лазерного гироскопа,  $\omega_i$  — угловая скорость, с которой колеблется кольцевой лазер относительно корпуса (вибрационная частотная подставка),  $\omega_L$  и  $\rho$  — параметры статического порога захвата,  $K$  — масштабный коэффициент.

Третье слагаемое в правой части уравнения (1) отражает слабую связь встречных волн. Если кольцевой лазер совершает синусоидальные колебания, угловая скорость  $\omega_i(t)$  в уравнении (1) задается в форме:  $\omega_i(t) = \omega_d \sin(2\pi f t)$ , где:  $\omega_d$  и  $f$  — амплитуда и частота вибрационной частотной подставки соответственно.

В случае ошумленной подставки в качестве отсчетов относительной угловой скорости  $\omega_x(t)$ , с которой колеблется кольцевой лазер, можно использовать сигналы, экспериментально зарегистрированные для кольцевых лазеров с механическими вибрационными частотными подставками [14].

Дифференциальное уравнение (1) решается численным методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Шаг, с которым строится решение, должен быть достаточно мал, чтобы избежать явления «элайзинга» (aliasing) в формируемых квадратурных сигналах. В работе [15] показано, что при решении уравнения (1) с шагом 0,2 мкс «элайзинг» отсутствует. Найденная зависимость фазы Саньяка от времени позволяет сформировать рассчитанные «идеальные» квадратурные сигналы  $U_{\cos}$  и  $U_{\sin}$ .

Основной подход, используемый до настоящего времени при расчете угловых перемещений лазерного гироскопа, заключается в процедуре реверсивного счета импульсов, сформированных на основе квадратурных сигналов (рис. 1) [16].

Процедура реверсивного счета импульсов (РСИ) включает следующие стадии:

- преобразование квадратурных сигналов в сигнал прямоугольной формы с помощью компаратора (клиппирование);
- преобразование спадающих и возрастающих участков клиппированных сигналов в импульсы счета;
- реверсивный счет импульсов в зависимости от фазового соотношения между квадратурными сигналами;
- подавление с помощью режекторного фильтра составляющей выходного сигнала, связанной с колебаниями кольцевого лазера (вибрационной подставкой).

Альтернативный подход извлечения информации об угловой скорости лазерного гироскопа развит в работах [14, 17, 18], представляет собой вычисление мгновенной фазы Саньяка (МФС) и включает следующие стадии:

- дискретизация первичных сигналов;
- аппроксимация кривой второго порядка множества точек, соответствующих первичным отсчетам на плоскости переменных  $U_{\cos}$ ,  $U_{\sin}$ ;
- определение параметров квадратурных сигналов  $U_{\cos,0}$ ,  $U_{\sin,0}$ ,  $U_{\cos,m}$ ,  $U_{\sin,m}$ ,  $\varphi_c$  и  $\varphi_s$  из аппроксимирующей кривой;
- определение разности фаз  $\psi$  встречных волн, генерируемых кольцевым лазером;
- подавление с помощью режекторного фильтра составляющей выходного сигнала, связанной с вибрационной подставкой.

Выходные данные модели представляют собой восстановленные отсчеты угловой скорости с частотой дискретизации 2400 Гц.

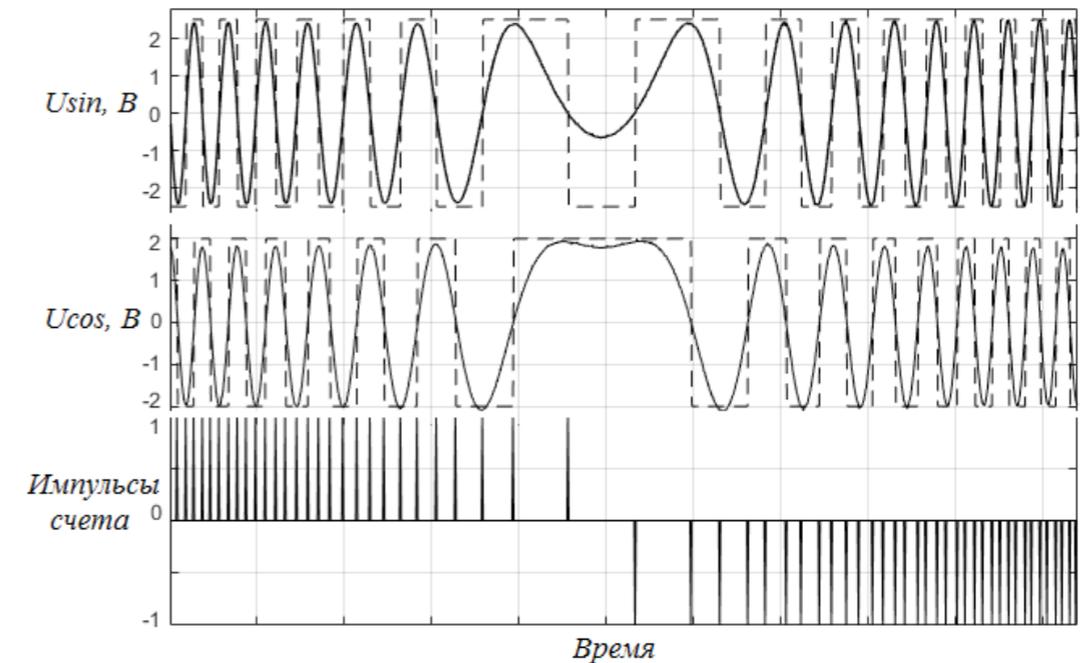


Рис. 1. Выделение импульсов счета из квадратурных сигналов лазерного гироскопа.  
 $U_{\sin}$ ,  $U_{\cos}$  — квадратурные сигналы лазерного гироскопа.  
Пунктирная кривая — сигнал на выходе компаратора

#### Алгоритм компенсации порога динамического захвата в выходном сигнале лазерного гироскопа

Авторы работ [11–12] предложили метод компенсации составляющей, связанной с динамическим порогом захвата в выходном сигнале лазерного гироскопа. В качестве входных данных метод использует три сигнала: квадратурные сигналы  $U_{\cos}$ ,  $U_{\sin}$  и переменную составляющую  $vac$  суммы сигналов с фотодиодов, измеряющих мощность лазерного излучения. Метод включает следующие этапы:

- регистрация трех цифровых сигналов лазерного гироскопа  $U_{\cos}$ ,  $U_{\sin}$  и  $vac$ ;
- восстановление разности фаз встречных волн  $\psi$  по квадратурным сигналам;
- восстановление параметров порога захвата  $\psi_L$  и  $\rho$  путем синхронного детектирования сигнала  $vac$ ;
- формирование сигнала ошибки  $\psi_{err}$ ;
- вычитание сигнала ошибки  $\psi_{err}$  из восстановленной фазы  $\psi$ .

В результате выходной сигнал датчика очищается от случайной составляющей, связанной с явлением динамического захвата. Данный метод обработки позволяет вычислять мгновенную фазу Саньяка с компенсацией влияния динамического захвата (МФСК).

По рассчитанной разности фаз встречных волн формировались идеальные квадратурные сигналы:

$$U_s(t) = \sin(\psi), \quad U_c(t) = \cos(\psi). \quad (2)$$

Переменная составляющая сигнала, пропорциональная мощности лазерного излучения, рассчитывалась по формуле [12]:

$$vac(t) = 2A_1A_2E_0 \sin(\psi + \rho). \quad (3)$$

Параметры  $E_0$  и  $\rho$  имеют вид:

$$E_0 = \left[ \left( r_1 \frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \left( r_2 \frac{A_1}{A_2} \right)^2 + 2r_1r_2 \cos(\beta_1 + \beta_2) \right]^{0.5}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\rho) = \frac{r_2 \frac{A_2}{A_1} \sin(\beta_2) - r_1 \frac{A_1}{A_2} \sin(\beta_1)}{r_2 \frac{A_2}{A_1} \cos(\beta_2) + r_1 \frac{A_1}{A_2} \cos(\beta_1)},$$

где  $A_1, A_2$  — амплитуды первичных сигналов,  $r_{1,2}$  — амплитуды коэффициентов связи встречных волн,  $\beta_1, \beta_2$  — фазы коэффициентов связи встречных волн. Значения коэффициентов связи встречных волн ( $r_{1,2}$  и  $\beta_{1,2}$ ) были рассчитаны по заданным параметрам захвата  $\omega_L$  и  $\rho$ . Амплитуды первичных сигналов полагались равными 1. Параметр  $E_0$  пропорционален заданному порогу захвата  $\omega_L$ .

Для проверки алгоритма коррекции порога захвата также были рассчитаны идеальные сигналы. Аналитическое решение дифференциального уравнения (1), полученное при заданной величине  $\omega_L = 0$ :

$$\psi_{ideal} = K\Omega t - \frac{K\omega_d}{2\pi f} \cos(2\pi f t) + \frac{K\omega_d}{2\pi f}. \quad (5)$$

Эталонный сигнал ошибки  $\omega_{err ideal}$  был получен путем вычитания из результата численного решения дифференциального уравнения (1) идеального сигнала  $\omega_{ideal}$ :

$$\Psi_{err ideal} = \Psi - \Psi_{ideal}. \quad (6)$$

По материалам работы [12] был написан алгоритм компенсации динамического порога захвата в выходном сигнале лазерного гироскопа. На рисунке 2 представлена блок-схема разработанной программы.

Считываются массивы квадратурных сигналов  $U_{\cos}$ ,  $U_{\sin}$  и переменная составляющая  $vac$ . В блоках 1–4 по отсчетам квадратурных сигналов восстанавливается разность фаз встречных волн  $\psi$ . Восстановленная фаза  $\Phi$  (свернутая фаза) в блоке 1 содержит скачки фазы на  $2\pi$ . В блоках 2–4 выполняется коррекция скачков фазы («разворачивание» фазы).

В блоках 5–10 восстанавливается составляющая разности фаз встречных волн, связанная с порогом захвата — сигнал ошибки  $\psi_{err}$ . В блоках 5–8 выполняется демодуляция переменной составляющей мощности встречных волн  $vac$  с помощью квадратурных сигналов  $U_{\cos}$ ,  $U_{\sin}$ . В результате формируются синфазный  $I$  и квадратурный  $Q$  сигналы, которые несут в себе информацию о параметрах порога захвата

$$I \sim A_1A_2E_0 \cos(\rho), \quad Q \sim A_1A_2E_0 \sin(\rho).$$

В блоке 9 восстанавливаются мгновенные значения измеренных параметров  $\Omega_L$  и  $\rho$ . В блоке 10 рассчитывается сигнал ошибки. В блоке 11 выполняется компенсация составляющей, связанной с порогом захвата, путем вычитания из массива  $\psi$  сигнала ошибки  $\psi_{err}$ . В результате получаем фазу  $\psi_0$ . В алгоритм работы [12] внесена модификация, связанная с универсализацией процедуры вычета частотной подставки. Для удаления знакопеременной частотной подставки в алгоритм компенсации введен режекторный фильтр аналогичный используемому в методах РСИ и МФС.

Параметры фильтра:

– полоса подавления	40 Гц;
– переходная область	20 Гц;
– центральная частота	400 Гц;
– коэффициент подавления	60 Дб.

### Результаты моделирования

Использовалось соотношение (1), описывающее связь встречных волн и угловую скорость вращения на интервале времени 5400 с. Дифференциальное уравнение решалось численно методом Рунге – Кутты 4-го порядка. Были выбраны следующие параметры: периметр резонатора 28 см, амплитуда подставки, параметры захвата  $\omega_L = 0,01^\circ/\text{с}$ ,  $\rho = 0,15$  рад,  $\omega_d = 120^\circ/\text{с}$ ,  $f = 400$  Гц — амплитуда и частота гармонической вибрационной частотной подставки;  $\Omega = 12^\circ/\text{час}$  — заданная угловая скорость вращения. Частота дискретизации 5 МГц.

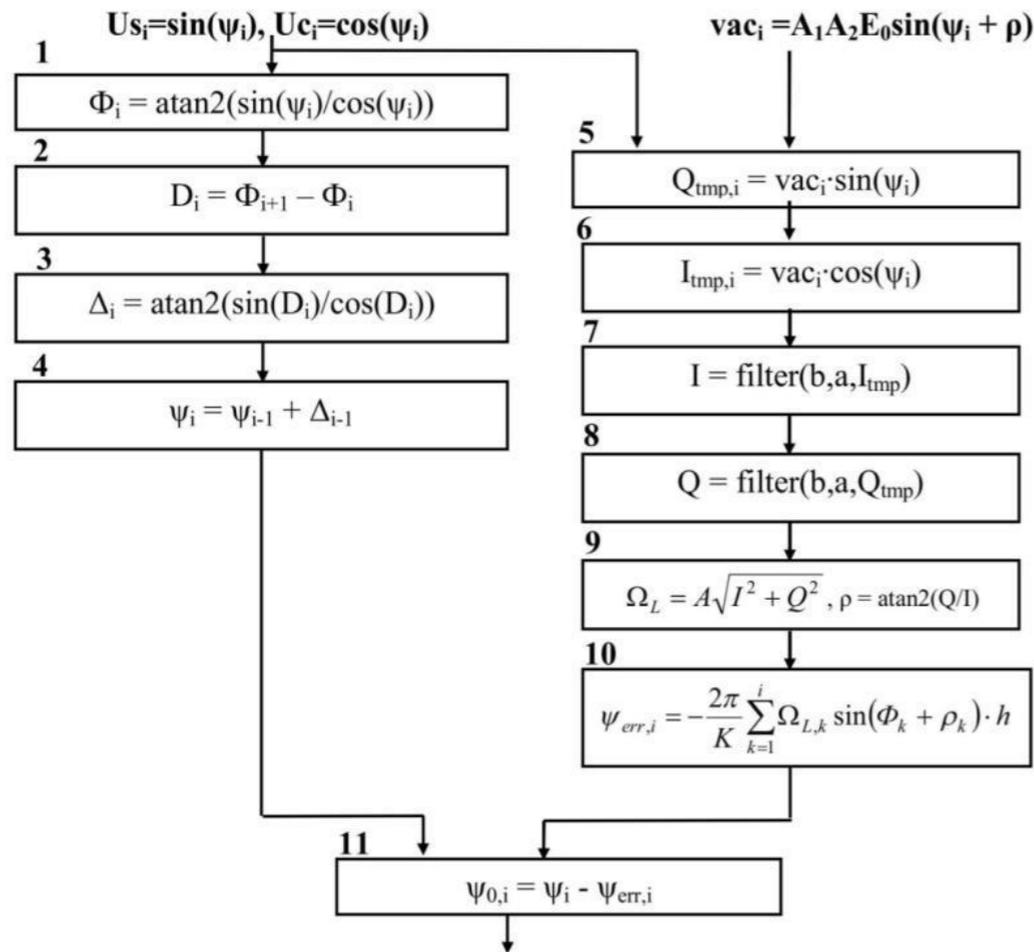


Рис. 2. Блок-схема алгоритма компенсации порога захвата в выходном сигнале лазерного гироскопа

Решение дифференциального уравнения (1) осуществлялось для двух случаев: синусоидальная вибрационная частотная подставка и синусоидальная вибрационная частотная подставка со случайным ошумлением амплитуды колебаний. По результатам решения дифференциального уравнения сформированы квадратурные сигналы (2) и переменная составляющая сигнала, пропорциональная мощности лазерного излучения (3).

К сформированным сигналам аддитивно добавлялся белый шум. Уровень шума выбирался таким образом, чтобы обеспечить отношение сигнал/шум 50 дБ.

Полученные сигналы последовательно обработаны тремя методами: методом РСИ, методом МФС и методом МФСК. Порог захвата в данном численном эксперименте принимался максимально допустимым с практической точки зрения и равным  $0,05^\circ/\text{с}$ .

Полученные результаты приведены на рисунке 3 в виде передаточных характеристик лазерного гироскопа, представляющих собой зависимость восстановленного значения угловой скорости вращения корпуса гироскопа  $\langle \Omega_{100} \rangle$ , усредненного на интервале времени 100 секунд, от заданного значения постоянной угловой скорости  $\Omega$ . Частота обновления выходных отсчетов 2400 Гц.

Кривая 3, полученная при синусоидальной частотной подставке, в области малых угловых скоростей содержит типичный участок, отражающий хорошо известное явление динамического захвата, порогом которого примерно в 60 раз меньше заданной величины статического порога захвата  $\omega_L$ . Эффект, достигнутый при помощи компенсации порога захвата с помощью алгоритма, представленного на рисунке 2, позволяет подавить явление динамического захвата, что отражает кривая 1. Для сравнения здесь же приведена передаточная характеристика, к которой приводит случайное ошумление подставки (кривая 2). Ошумление подставки также позволяет подавить динамический захват, причем по сравнению с МФСК восстановленная угловая скорость ближе к идеальной передаточной характеристике  $\langle \Omega_{100} \rangle = \Omega$ .

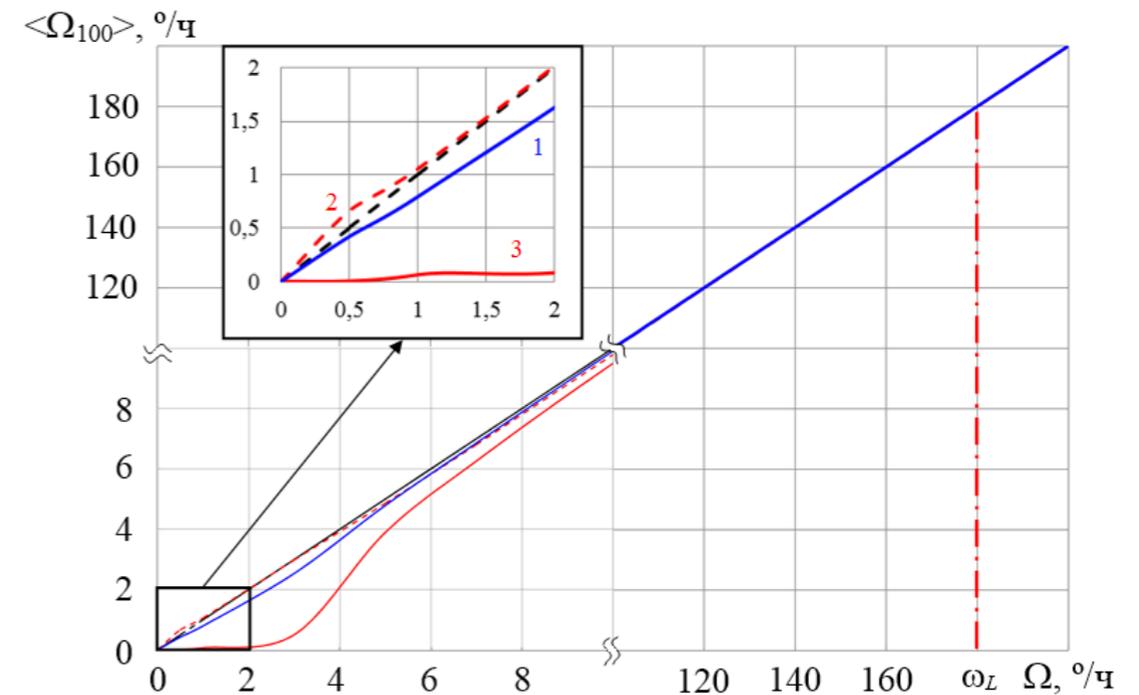


Рис. 3. Передаточная характеристика лазерного гироскопа при различных методах обработки первичных квадратурных сигналов: 1 — МФСК при синусоидальной подставке (синяя кривая), 2 — МФС при синусоидальной подставке со случайным ошумлением (красная штриховая кривая), 3 — МФС при синусоидальной подставке (красная сплошная кривая), 4 — идеальная характеристика (черная штриховая кривая)

На рисунке 4 приведены графики квадратного корня  $\sigma$  из вариации Аллана как функции времени усреднения  $T$  выходных отсчетов угловой скорости, соответствующие разным методам обработки сигналов лазерного гироскопа. Кривые для методов РСИ (сплошная кривая) и метода МФС (пунктирная кривая) — результаты обработки сигналов, соответствующих синусоидальной вибрационной частотной подставке со случайным ошумлением амплитуды колебаний.

Штрихпунктирная кривая, соответствующая методу МФСК, получена в результате решения дифференциального уравнения с синусоидальной вибрационной частотной подставкой. Порог захвата  $\omega_L$  во всех трех случаях принимался равным  $0,03^\circ/\text{с}$ , что является среднестатистической величиной для кольцевых лазеров, используемых для комплектации серийно выпускаемых БИНС. Отказ от ошумления подставки позволяет на порядок уменьшить величину  $\sigma$  для времен усреднения, превышающих 10 с. Завышенные значения  $\sigma$  для метода РСИ в случае времен усреднения менее 1 с обусловлены шумом квантования в восстановленных отсчетах угловой скорости.

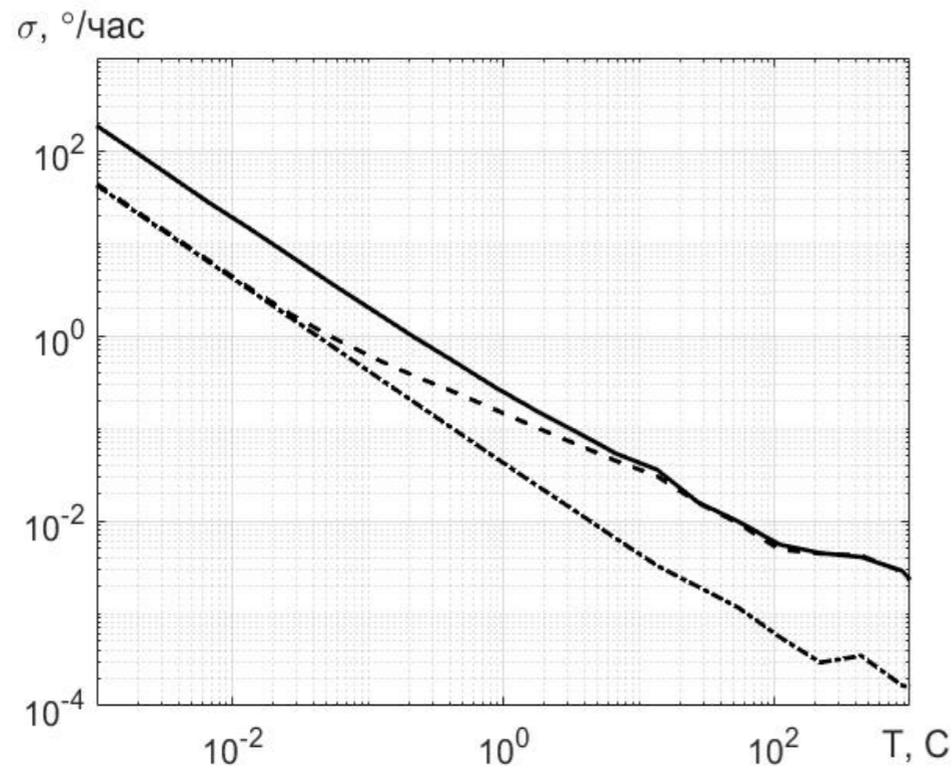


Рис. 4. Вариация Аллана при разных методах обработки сигналов. Сплошная кривая — метод РСИ для при синусоидальной подставке со случайным ошумлением, пунктирная кривая — метод МФС при синусоидальной подставке со случайным ошумлением, штрихпунктирная кривая — метод МФСК при синусоидальной подставке

На рисунке 5 построены вариации Аллана соответствующие трем методам обработки сигналов лазерного гироскопа, полученные при различных значениях порога статического захвата кольцевого лазера. Выбраны величины  $\omega_L$ :  $0,01^\circ/\text{с}$  и  $0,05^\circ/\text{с}$  как характерные предельные значения для основной массы серийно выпускаемых кольцевых лазеров с периметром резонатора 28 см.

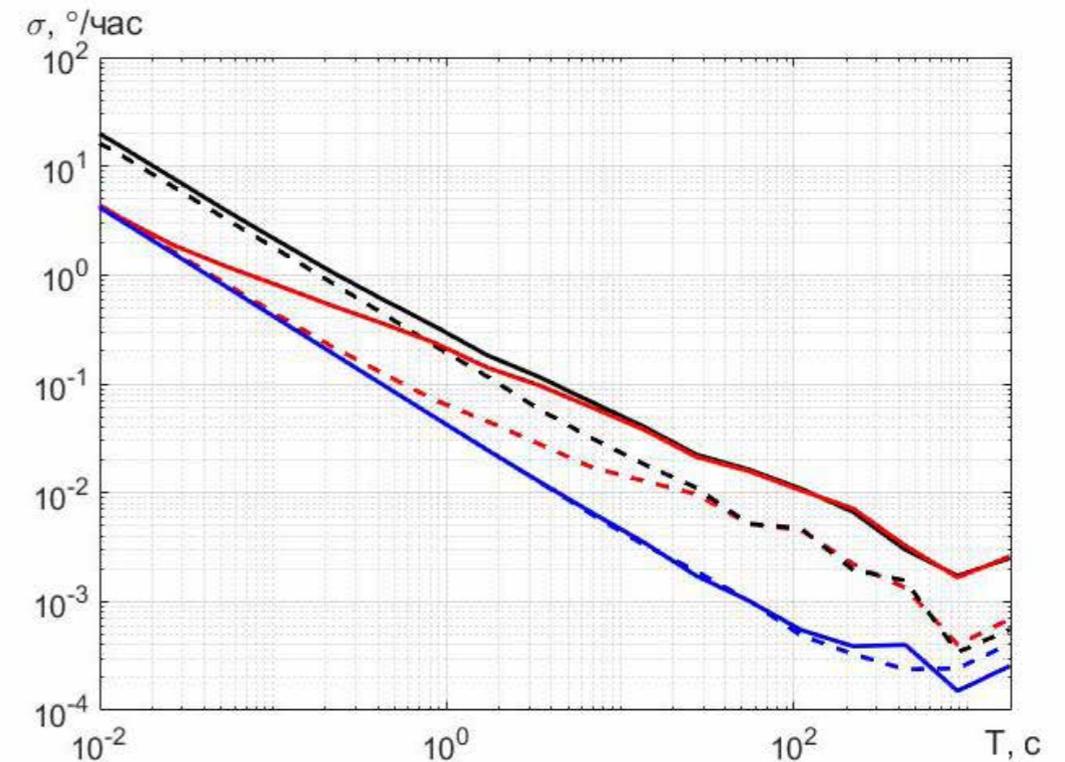


Рис. 5. Вариация Аллана при разных методах обработки сигналов и разным  $\omega_L$ . Метод РСИ — черный цвет, метод МФС — красный цвет, метод МФСК — синий цвет. Пунктирные кривые —  $\omega_L = 0,01^\circ/\text{с}$ , сплошные кривые —  $\omega_L = 0,05^\circ/\text{с}$

Наибольшее влияние величины зоны захвата на вариацию Аллана наблюдается для методов РСИ и МФС на временных интервалах от десятых долей до сотен секунд. Различия указанных кривых при малых (до единиц секунд при  $\omega_L = 0,05^\circ/\text{с}$  и до 40 секунд при  $\omega_L = 0,01^\circ/\text{с}$ ) временах осреднения объясняется высоким уровнем шума квантования метода РСИ. Зависимость уровня кривых от величины зоны захвата связано с шумами, обусловленными случайным блужданием угла при ошумлении синусоидальной частотной подставки.

Метод МФСК на временных интервалах до 100 секунд стабильно независим от величины порога захвата, что демонстрирует его эффективность при заданных начальных условиях (постоянная действующая угловая скорость и синусоидальная вибрационная частотная подставка без ошумления). Расходимость результатов на временных интервалах более 300 секунд объясняются ограниченным размером исходного массива данных (5400 с).

При времени осреднения 100 с и  $\omega_L = 0,01^\circ/\text{с}$  величина квадратного корня из вариации Аллана составляет:

- для метода РСИ 0,005°/час;
- для метода МФС 0,005°/час;
- для метода МФСК 0,0007°/час.

Разница в величине вариации для методов РСИ и МФС на временных интервалах осреднения 10...100 с практически нивелируется.

### Заключение

Методом математического моделирования проведено сравнение различных методов обработки первичных квадратурных сигналов лазерного гироскопа. Рассмотрено влияние на передаточную характеристику лазерного гироскопа и вариацию Аллана методов: РСИ — реверсивного счета импульсов, МФС — вычисления мгновенной фазы Саньяка, МФСК — вычисления мгновенной фазы Саньяка с компенсацией влияния динамического захвата.

Сравнение методов обработки первичных квадратурных сигналов лазерного гироскопа проведено для двух видов вибрационной частотной подставки: синусоидальной и синусоидальной со случайным ошумлением амплитуды колебаний. Вибрационная частотная подставка со случайным ошумлением зарегистрирована экспериментально.

Для удаления частотной подставки из выходного сигнала лазерного гироскопа в метод МФСК введен режекторный фильтр, что позволило унифицировать процедуру вычета частотной подставки во всех рассмотренных в работе методах.

Показана эффективность метода МФСК в компенсации влияния динамического захвата при обработке сигналов лазерного гироскопа, полученных при заданных начальных условиях: постоянная действующая угловая скорость и синусоидальная вибрационная частотная подставка без ошумления. Отказ от ошумления подставки положительно сказывается на величине вариации Аллана. На интервале осреднения в 100 с для лазерного гироскопа с периметром 28 см и  $\omega_L = 0,01^\circ/\text{с}$  величина квадратного корня из вариации Аллана составляет 0,0007°/час.

Целесообразно провести дальнейшее исследование метода МФСК для других начальных условий, которые должны учитывать динамику изменения входной угловой скорости, а также реальный характер выходных сигналов лазерного гироскопа.

### Литература

1. В. Г. Пешехонов. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем. // Гироскопия и навигация, №1, 2011. — С. 3–16.
2. A. G. Kuznetsov, A. V. Molchanov, M. V. Chirkin, E. A. Izmailov. Precise laser gyroscope for autonomous inertial navigation. // Quantum electronics 45(1), pp. 78–88 (2015), doi: 10.1070 / QEL2015v045n01ABEH015420.
3. S. Yu. Alekseev, M. V. Chirkin, V. Yu. Mishin, D. A. Morozov, M. V. Borisov, A. V. Molchanov, M. A. Zakharov. Method of lock-in threshold measurement in manufacture and operation of ring lasers. // Gyroscopy and navigation. Vol. 4, #4, 2013, pp. 223–228, doi: 10.1134/S2075108713040020.
4. A. S. Bessonov, A. P. Makeev, V. A. Petrukhin. Measurements of complex coupling coefficients in a ring resonator of laser gyroscope. // Quantum electronics 47(7), 2017, pp. 675–682, doi: 10.1070/QEL16291.
5. V. A. Petrukhin, A. S. Bessonov. Setup for measuring complex coupling parameters in laser gyro cavity. // 27 ICINS 2020 – Proceedings, May 2020, 9133777.
6. E. A. Pertrukhin. Prediction of the lock-in threshold value in a ring cavity of the laser gyro. // XXIII ICINS 2016 – Proceeding, SPb May 2016, pp. 103–107.
7. A. S. Bessonov, V. A. Petrukhin, V. Yu. Khodyrev. Set up for integral light scattering irregularities measurements on the surface of laser gyro mirrors. / XXIII ICINS 2016 – Proceeding, SPb May 2016, pp. 108–111.

8. *M. V. Chirkin, A. E. Serebryakov, A. V. Molchanov, M. A. Zakharov.* Technological aspects of precision ring laser production: monitoring mirror surfaces of optical resonators. // XX ICINS 2013 – Proceeding, SPb May 2013, pp. 66–68.
9. *S. Yu. Alekseev, M. V. Chirkin, V. Yu. Mishin, D. A. Morozov, M. V. Borisov, A. V. Molchanov, M. A. Zakharov.* Technological aspects of precision ring laser production: synchronization threshold measurements in manufacture and operation. // XIX ICINS 2012 – Proceeding, SPb May 2012, pp. 54–56.
10. *A. E. Федоров, В. А. Зборовский, Д. А. Рекунов.* Оценка точностных параметров резонатора лазерного гироскопа в производстве. // МКИНС 2014, Материалы под ред. В. Г. Пешехонова, СПб 2014. – С. 250–257.
11. *Sin-Woo Song et al.* New random walk reduction algorithm in ring laser gyroscopes, *Journal of Optics*, 12 (2010) 115501, doi: 10.1088/2040-8978/12/11/115501.
12. *Jae-Cheul Lee, Hyun-Ju Cho, Ho-Soon Yang.* Zero lock-in implementation by phase Wrapping/unwrapping in a ring laser gyroscope. // *App. Optics* v. 60, #34, 2021, 10529.
13. *C. B. Витязев, Д. В. Валуйский, В. Ю. Мишин, А. В. Молчанов, А. Е. Серебряков, М. В. Чиркин.* Определение фазы Саньяка в цифровом лазерном гироскопе при применении DSP процессора. // *Навигация и управление летательными аппаратами*. № 32, 2021. – С. 22–37.
14. *A. V. Molchanov, V. A. Belokurov, M. V. Chirkin, M. B. Kagalenko, V. I. Koshelev, V. Yu. Mishin, D. A. Morozov.* The application of advanced processing technique to the triad of precision laser gyroscopes. // XXIII ICINS 2016 – Proceeding, SPb May 2016, pp. 120–122.
15. *A. A. Golovan, V. Yu. Mishin, A. V. Molchanov, M. V. Chirkin.* Method for analyzing the influence of the errors induced by the gyroscopic channel of a strapdown INS in the autonomous mode. // *Journal of computer and systems sciences international*, № 4, 2021, Vol. 60, pp. 627–638, doi: 10.1134/31064230721040043.
16. *Д. П. Лукьянов, В. Я. Распопов, Ю. В. Филатов.* Прикладная теория гироскопов. – СПб.: ГИЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2015. – 316 с.
17. *A. V. Molchanov, V. A. Belokurov, M. V. Chirkin, V. I. Koshelev, V. Yu. Mishin, D. A. Morozov.* Precision laser gyro with a digital channel for quadrature signal processing. // XXII ICINS 2015 – Proceeding, SPb May 2015, pp. 307–314.
18. *В. Ю. Мишин, А. В. Молчанов, М. В. Чиркин.* Проблема цифровой обработки первичных квадратурных сигналов в лазерных гироскопах. // *Приборы*, №1 (151), 2013. – С. 33–38.
19. *M. V. Chirkin, V. Yu. Mishin, D. A. Morozov, A. V. Molchanov, M. A. Zakharov.* Ring laser digital signal processing in evaluation laser gyro characteristics. // XVII ICINS 2010 – Proceeding, SPb May 2010, pp. 60–62.
20. *G. I. Chesnokov, E. F. Polikovskiy, A. V. Molchanov, V. I. Kremer.* Some ways of improving the technical and operational characteristics of SINS. // X ICINS 2003 – Proceeding, SPb May 2003, pp. 277–285.
21. *А. В. Молчанов, В. М. Суминов, М. В. Чиркин.* Формирование доминирующей погрешности лазерного гироскопа. // *Авиакосмическое приборостроение*, №9, 2004. – С. 12–19.
22. *M. Faucheux, D. Fayoux, J. J. Roland.* The ring laser gyro // *J. Optics (Paris)*, 1988, Vol. 19, n. 3 pp. 101–115.
23. *В. В. Азарова, Ю. Д. Голяев, В. Г. Дмитриев.* Кольцевые газовые лазеры с магнитооптическим управлением в лазерной гироскопии. // *Квантовая электроника*, т. 30, №2, 2000. – С. 96–104.
24. *В. В. Азарова, Ю. Д. Голяев, И. И. Савельев.* Зеемановские лазерные гироскопы. // *Квантовая электроника*, т. 45, №2, 2015. – С. 171–179, doi: 10.1070/QEL2015v045n01ABEH015539.

УДК 629.7.058

## ВАЛИДАЦИЯ МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО САМОЛЕТА МЕТОДОМ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ И МОМЕНТОВ

*Олег Николаевич КОРСУН, д. т. н., профессор,  
Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, д. т. н., профессор,  
Алексей Алексеевич КУЗИН  
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*Рассмотрен методический метод валидации продольного движения модели тяжелого самолета методом идентификации. В целях проверки адекватности построения модели объекта и ее корректировки проводилась оценка согласованности изменений динамических параметров модели тяжелого самолета и сравнение полученных оценок согласованности с рассчитываемыми в модели параметрами движения. По результатам идентификации получаемые коэффициенты аэродинамических сил и моментов позволяют провести проверку соответствия модели реальному объекту и параметрам банка аэродинамических характеристик.*

**Ключевые слова:** идентификация, модель самолета, моделирование, летный эксперимент, согласованность параметров, валидация модели, банк аэродинамических характеристик.

## HEAVY AIRCRAFT MODEL PITCH MOTION VALIDATION BY THE METHOD OF AERODYNAMIC FORCES AND MOMENTS COEFFICIENTS IDENTIFICATION

*Oleg N. KORSUN, D. Sc. in Engineering, professor,  
Vladimir E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor,  
Alexey A. KUZIN  
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*The article considers the method of a heavy aircraft model pitch motion validation by the method of identification. In order to verify the adequacy of the object model construction and correction, consistency of changes in dynamic parameters of the heavy aircraft model was assessed, and obtained consistency assessments were compared with the motion parameters calculated in the model. Aerodynamic forces and moments coefficients obtained from identification results allow to check the consistency of the model with the real object and parameters from the aerodynamic database.*

**Keywords:** identification, aircraft model, model construction, flight experiment, parameters consistency, model validation, aerodynamic database.

## Введение

В процессе разработки систем автоматического управления (САУ) применяется моделирование пространственного движения самолета с использованием математической модели движения объекта с заранее заданными динамическими характеристиками. Для решения задач моделирования в процессе разработки формируется математическая модель объекта, которая должна быть адекватна, удовлетворять требованиям точности и быть максимально приближена к реальному объекту по своим выходным параметрам. В настоящей статье рассматривается практическое применение методов идентификации для анализа коэффициентов аэродинамических сил и моментов модели тяжелого самолета с целью ее валидации и проверки адекватности программной реализации, а также сравнение с результатами идентификации реального самолета по полетным данным с целью оценки соответствия банка аэродинамических характеристик реальному объекту управления.

Для выполнения работы использовались методы идентификации коэффициентов аэродинамических сил и моментов в продольном движении самолета по полетным данным. Целью являлось получение качественных оценок сходимости динамических параметров выходного вектора модели самолета и результатов идентификации данных, полученных в результате обработки выходного массива данных модели.

Результат оценки сходимости и определенные методами идентификации оценки коэффициентов аэродинамических сил и моментов продольного движения модели самолета позволяют достоверно определить качество построенной модели самолета и соответствие параметров динамики движения установленному в модель банку аэродинамических характеристик объекта, принимаемых в качестве эталонных зависимостей.

В полунатурном моделировании задание начальных условий и имитация действий летчика при автоматическом управлении самолетом выполнялась в соответствии с выбранными участками полетов из набора данных регистрации данных летных экспериментов реального объекта управления. По данным выбранных участков полетов, как и по выходным параметрам математической модели самолета, проводится оценка коэффициентов аэродинамических сил и моментов с использованием метода идентификации. Специальные летные эксперименты в целях получения данных для идентификации, предусматривающие специальные тестовые маневры, не проводились, то есть идентификация выполнялась по данным штатного функционирования объекта.

В процессе идентификации использовались общие методы динамики полета [1-3] и летных экспериментов самолетов [4],

методы идентификации аэродинамических коэффициентов летательных аппаратов [5,6], методы проверки согласованности полетных данных [7].

В качестве исходных данных для идентификации принимался выходной вектор параметров стендовой модели самолета, состоящий из: угловых параметров движения; проекций ускорений и перегрузок; углов положения рулевых поверхностей; скоростных параметров; проекций истинной скорости, высоты и углов ориентации в земной системе координат и другие параметры. Для получения выходного вектора использовалась модель полунатурного стенда исследуемого самолета с целью определения оценок сходимости и коэффициентов движения. Для идентификации выбранных участков летных экспериментов из записей системы регистрации брался идентичный набор данных, в частности, параметры инерциальных датчиков, параметры высоты и скорости полета, параметры тяги, проекции скорости и параметры спутниковой навигационной системы.

Начальные условия в процессе полунатурного моделирования соответствовали параметрам полетов реального объекта на выбранных участках записей данных летных экспериментов, проводилась имитация действий летчика. Основным требованием являлось соблюдение последовательности выполнения автоматических режимов управления, а также соответствие изменения заданных с пульта управления параметров движения.

### Применяемые модели и метод идентификации

Для решения задач проверки согласованности и идентификации коэффициентов продольного движения была принята нелинейная модель пространственного движения самолета как твердого тела при условии совпадения главных осей инерции с осями связанной системы координат, в которой были выделены необходимые уравнения продольного движения, а уравнения бокового движения исключены:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \hat{\omega}_z - \frac{1}{\cos\beta} \left[ \left( \frac{\hat{a}_x}{V} - \hat{\omega}_y \sin\beta \right) \sin\alpha + \left( \frac{\hat{a}_y}{V} + \hat{\omega}_x \sin\beta \right) \cos\alpha \right], \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\hat{a}_z}{V} \cos\beta - \left( \frac{\hat{a}_x}{V} \sin\beta - \hat{\omega}_y \right) \cos\alpha + \left( \frac{\hat{a}_y}{V} \sin\beta + \hat{\omega}_x \right) \sin\alpha, \\ \frac{dV}{dt} &= \hat{a}_x \cos\alpha \cos\beta - \hat{a}_y \sin\alpha \cos\beta + \hat{a}_z \sin\beta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= \hat{\omega}_y \sin\gamma + \hat{\omega}_z \cos\gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \hat{\omega}_x - \operatorname{tg}\nu \left( \hat{\omega}_y \cos\gamma - \hat{\omega}_z \sin\gamma \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Полученная модель используется для проверки согласованности данных измеренных угловых скоростей  $\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z$  и перегрузок  $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ . Особенность полученных уравнений заключается в том, что они не зависят от аэродинамических коэффициентов самолета, поскольку входящие в правые части ускорения можно вычислить через измеряемые в полете значения перегрузок.

Линейная модель аэродинамических коэффициентов продольного движения представлена следующей системой уравнений, где  $C_{y_e}$  — коэффициент составляющей аэродинамической силы в полусвязанной системе координат:

$$\begin{aligned} C_{y_e} &= C_{y_0} + C_{y_e}^\alpha \alpha + C_{y_e}^{\delta_B} \delta_B, \\ m_z &= m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \omega_z + m_z^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned} \quad (2)$$

Значения нелинейных параметров модели аэродинамических коэффициентов, учет влияния состояния объекта, таких как механизация крыла, стабилизатор и центровка принимались согласно описанию банка аэродинамических характеристик самолета и банку данных модели.

Непосредственное численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) имеет большую ошибку вычислений, поскольку постоянные составляющие погрешностей измерений входных сигналов  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  и  $n_x, n_y, n_z$  создают на выходе интегралов погрешности типа линейного тренда, что не позволяет сравнивать выходные сигналы модели и объекта. Для устранения этого эффекта вводится вектор неизвестных параметров  $a$ , состоящий из постоянных составляющих погрешностей измерений сигналов  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  и  $n_x, n_y, n_z$ :

$$a^T = [C_{\omega_x} C_{\omega_y} C_{\omega_z} C_{n_x} C_{n_y} C_{n_z}]. \quad (3)$$

Оценки параметров идентификации находятся методом параметрической идентификации, являющимся разновидностью метода Ньютона.

Модели объекта и наблюдений можно представить в следующей общей векторной форме:

$$y(t_i) = f(y(t_i), a, u(t_i)), \quad (4)$$

$$z(t_i) = h(y(t_i), a, u(t_i)) + \xi(t_i), \quad (4)$$

где  $y(t), u(t)$  — векторы выходных и входных сигналов размерности  $n$  и  $m$  соответственно;  $z(t_i)$  — вектор наблюдений размерности  $r$ ;  $a$  — вектор неизвестных параметров, подлежащий идентификации;  $\xi(t_i)$  — шум наблюдений, представляющий собой векторную дискретную нормальную случайную последовательность типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсионной матрицей  $R(t_i)$ .

Предполагается, что  $u(t)$  — известная функция времени. Начальные условия  $y(t_0)$  или предполагаются известными, или включаются в вектор оцениваемых параметров.

При указанных допущениях о свойствах шумов для нахождения несмещенных и эффективных оценок вектора идентифицируемых параметров необходимо минимизировать следующий функционал:

$$J(a) = \sum_{i=1}^N \left( (z(t_i) - h(y(t_i), a, u(t_i)))^T R^{-1}(t_i) (z(t_i) - h(y(t_i), a, u(t_i))) \right). \quad (5)$$

Тем самым, уравнение (5) представляет собой функционал метода наименьших квадратов с матрицей весовых коэффициентов  $R(t_i)^{-1}$ .

Для минимизации используется одна из модификаций классического метода Ньютона:

$$a_{k+1} = a_k - \left( \frac{d^2 J(a_k)}{da_k^2} \right)^{-1} \frac{dJ(a_k)}{da_k}, \quad (6)$$

где:

$$\frac{dJ(a_k)}{da_k} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{dz^T(t_i, a_k)}{da_k} R^{-1}(t_i) (z(t_i) - z(t_i, a_k)), \quad (7)$$

$$\frac{d^2 J(a_k)}{da_k^2} \approx 2 \sum_{i=1}^N \frac{dz^T(t_i, a_k)}{da_k} R^{-1}(t_i) \frac{dz(t_i, a_k)}{da_k}. \quad (8)$$

Производные оценок прогноза определяются численно для моментов времени  $t_i, i = 1, N$  по формулам:

$$\frac{dz(t_i, a)}{da} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_1} & \frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_p} \end{bmatrix}_{(r \times p)}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_j} = \frac{z(t_i, a + \varepsilon e_j) - z(t_i, a)}{\varepsilon},$$

где  $e_j$  — вектор размерности  $p$ , все элементы которого равны нулю за исключением  $j$ -го элемента, который равен 1;  $\varepsilon$  — малое число, обычно задаваемое на уровне  $0,001 - 0,1\%$  от номинального значения параметров. Оценки  $z(t_i, a), i = 1, N$  определяются численным решением уравнений объекта и наблюдений при  $\eta(t_i) = 0$ .

### Проверка согласованности параметров модели и летных экспериментов

До проведения идентификации выполнялась проверка согласованности выходного вектора стендовой модели самолета и данных летных экспериментов по уравнениям модели (1) на одинаковых режимах полета. Для расчета использовались угловые параметры и проекции скорости модели, рассчитанные в земной системе координат.

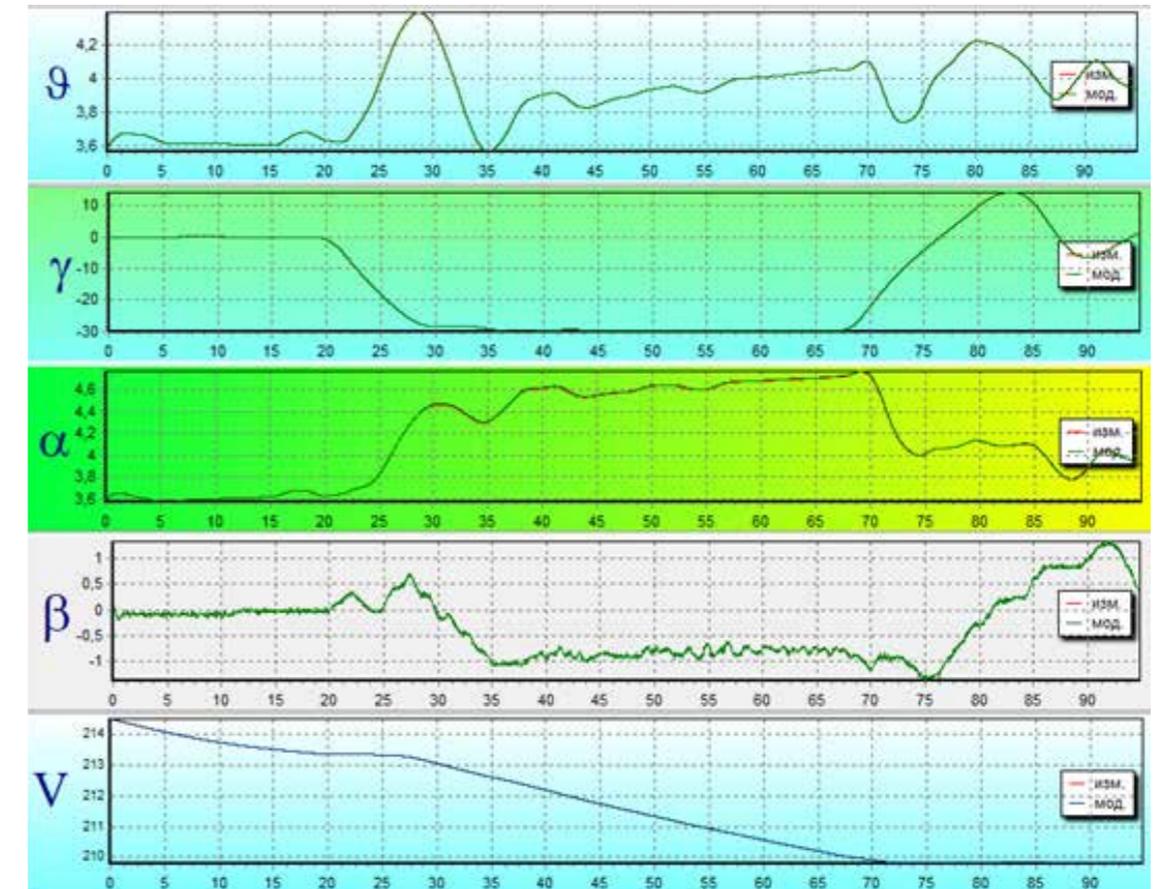


Рис. 1. Проверка согласованности углов тангажа, крена, атаки, скольжения и воздушной скорости модели самолета

Рассмотрим один из выбранных участков моделирования полета. На рисунке 1 (стр. 33) представлен результат проверки согласованности параметров движения модели самолета. Разность между полученными данными моделирования и рассчитанными результатами по уравнениям (1) предельно мала. Для углов тангажа, крена, скольжения и воздушной скорости получено полное соответствие расчетов реальному переходному процессу с наличием незначительного запаздывания по времени, наглядно представленного на рисунке 2 и обусловленного методом расчета и заданной частотой изменения исходных данных модели самолета.

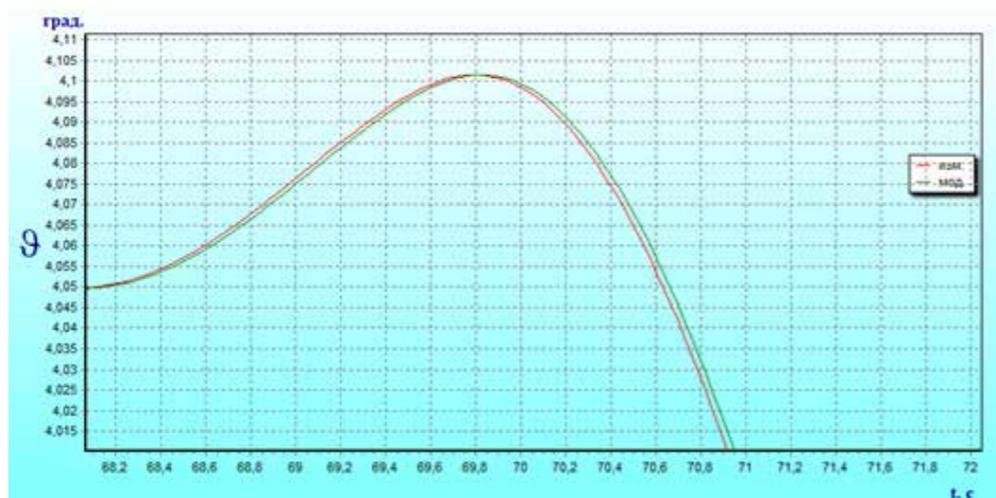


Рис. 2. Изменение угла тангажа модели самолета и вычисленного в результате проверки согласованности

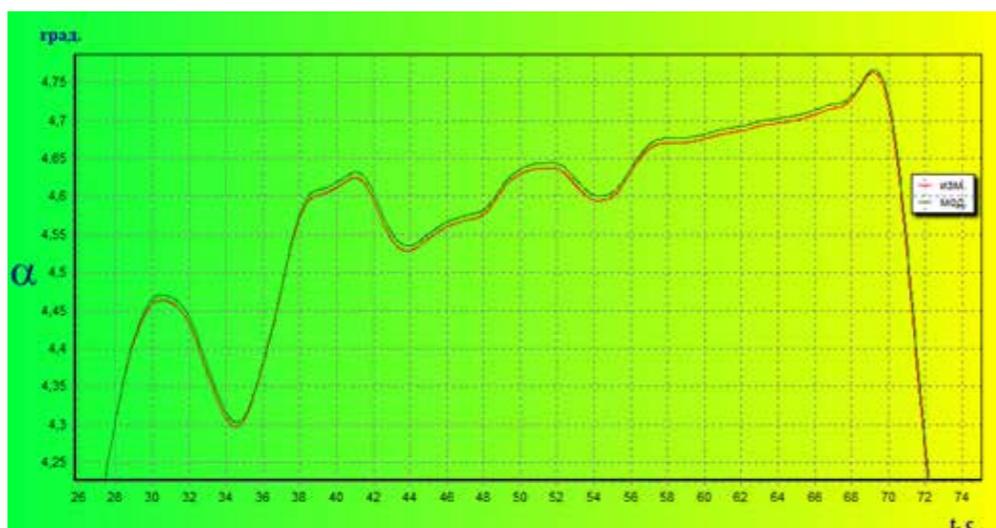


Рис. 3. Изменение угла атаки модели самолета и вычисленного в результате проверки согласованности

Измеренный угол атаки, представленный на рисунке 3, также имеет идентичное по времени запаздывание, но большую ошибку вычисления. Однако полученное значение разности изменения угла атаки на всем участке не превышает 0,08 градуса или 0,15%, что соответствует высокой степени соответствия результатов вычисления параметров стендовой модели самолета по коэффициентам банка аэродинамических характеристик.

Указанный способ сравнивает процессы изменения углов атаки, скольжения, тангажа и крена, истинной скорости полета стендовой модели самолета и результаты вычисления системы уравнений (1) при подстановке параметров угловых скоростей и перегрузок в правые части этих уравнений. Предложенная тестовая процедура проверки согласованности данных, полученных по результатам моделирования на полнатурном стенде, показывают высокую степень соответствия, что можно считать процедурой валидации.

Была проведена оценка согласованности динамических параметров выбранных участков данных летных экспериментов.

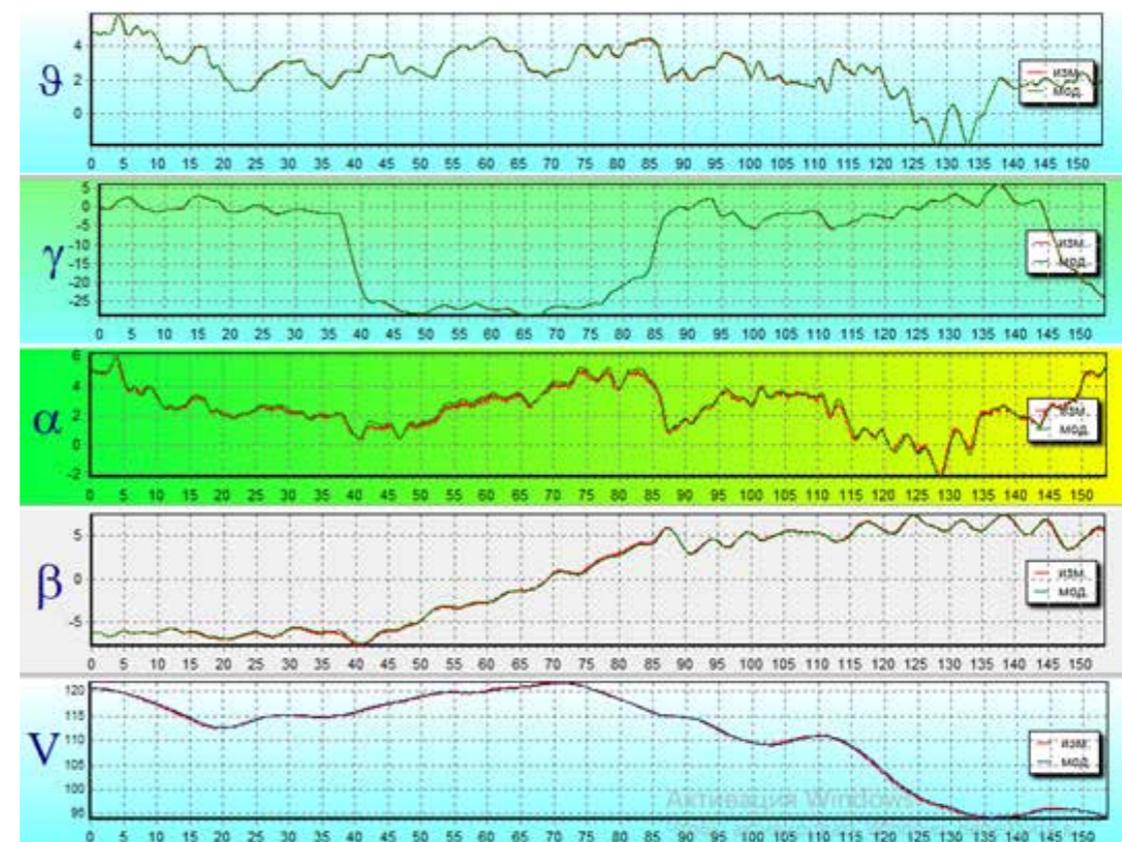


Рис. 4. Проверка согласованности углов тангажа, крена, атаки, скольжения и воздушной скорости участка данных летных экспериментов

На рисунке 4 (стр. 35) видно, что расхождения по углу атаки не превышают в отдельных точках 0,2–0,3 градуса, а в других точках участка значительно ниже. При выполнении расчетов идентифицируется вектор, включающий постоянные погрешности измерений угловых скоростей и перегрузок. Значения оценок очень малы, порядка  $10^{-2}$ – $10^{-3}$  единиц перегрузки для перегрузок и градусов в секунду для угловых скоростей, что подтверждает хорошую точность инерциальных измерений на самолете.

### Оценка результатов идентификации

При идентификации по алгоритму (5–9) определялись оценки основных аэродинамических коэффициентов модели продольного движения (2):

- производная подъемной силы по углу атаки  $C_y^\alpha$ ;
- производная подъемной силы по рулю высоты  $C_y^{dv}$ ;
- производная подъемной силы по отклонению стабилизатора  $C_y^\phi$ ;
- производная подъемной силы по угловой скорости тангажа  $C_y^{\omega_z}$ ;
- смещение подъемной силы  $C_y^0$  при нулевом угле атаки;
- производная момента тангажа по углу атаки  $M_z^\alpha$ ;
- производная момента тангажа по рулю высоты  $M_z^{dv}$ ;
- производная момента тангажа по отклонению стабилизатора  $M_z^\phi$ ;
- производные момента тангажа по угловой скорости тангажа  $M_z^{\omega_z}$  и угла атаки  $M_z^{\alpha t}$ ;
- смещение момента тангажа  $M_z^0$  при нулевом угле атаки.

В результате идентификации получен и представлен (таблица 1) набор аэродинамических коэффициентов, рассчитанных по выходному вектору стендовой модели самолета, проведено их сравнение с используемым аэродинамическим банком данных.

Таблица 1. Результаты идентификации аэродинамических коэффициентов

$C_y^\alpha$	$C_y^0$	$C_y^\phi$	$C_y^{dv}$	$C_y^{\omega_z}$	$M_z^\alpha$	$M_z^0$	$M_z^\phi$	$M_z^{dv}$	$M_z^{\omega_z}$	$M_z^{\alpha t}$
0,095	0,15	0,005	0,005	6,0	-0,03	0,07	-0,05	-0,02	-11,6	-3,2

Полученные значения аэродинамических коэффициентов математической модели при заданных условиях полета самолета практически совпадают с коэффициентами, полученным по данным используемого банка данных.

Данное соответствие подтверждает результаты работы математической модели самолета ожидаемому поведению объекта в продольном канале движения при заданных условиях эксплуатации.

При сравнении полученных коэффициентов с результатами идентификации параметров самолета в режиме полета, на основе которого проводилось полунатурное моделирование, было выявлено различие в величине коэффициента момента тангажа при нулевом угле атаки  $M_z^0$ . При подтвержденной в процессе работы адекватности построения математической модели объекта априорным данным выполнено уточнение указанного коэффициента с внесением поправки в банк аэродинамических характеристик.

### Заключение

Полученный результат подтверждает целесообразность использования рассмотренного метода валидации для последующей идентификации применительно к математической модели самолета. Проверка согласованности выходного вектора динамических параметров модели позволяет наглядно оценить ее адекватность и при несоответствии переходных процессов определить неточности реализации математического аппарата модели. Получаемые в результате идентификации динамические коэффициенты можно сравнить с используемым банком данных самолета и подтвердить соответствие результатов моделирования ожидаемому поведению реального объекта в процессе управления движением. Предложенные процедуры валидации и идентификации позволяют обеспечить адекватность моделирования управляемого движения самолета и, при необходимости, уточнить характеристики используемого банка аэродинамических данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-08-00449.

## Литература

1. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. / Под ред. Г. С. Бюгшенса. – М: Наука. Физматлит, 1998. – 816 с.
2. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения, обозначения. М.: Издательство стандартов, 1981.
3. Васильченко К. К., Леонов В. А., Пашковский И. М., Поплавский Б. К. Летные испытания самолетов. М.: Машиностроение, 1996. – 745 с.
4. Белоцерковский С. М., Качанов Б.О., Кулифеев Ю. Б., Морозов В. И. Создание и применение математических моделей самолетов. / Под ред. М.: Наука, 1984. – 284 с.
5. Васильченко К. К., Кочетков Ю. А., Леонов В. А. и др. Структурная идентификация математической модели движения самолета. М.: Машиностроение, 1993. – 350 с.
6. Овчаренко В. Н. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: Идентификация по полетным данным. // М.: ЛЕНАНД, 2019. – 236 с.
7. Корсун О. Н., Николаев С. В. Методика идентификации аэродинамических коэффициентов продольного движения самолета в эксплуатационном диапазоне углов атаки. // Мехатроника, автоматизация, управление, т. 16, № 4, 2015. – С. 269–276.
8. Корсун О. Н., Николаев С. В. Идентификация аэродинамических коэффициентов самолетов в эксплуатационном диапазоне углов атаки. // Вестник компьютерных и информационных технологий. № 9, 2016. – С. 3–10.

УДК 629.7.05

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРА МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ РЕЖИМА СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПОЛЕТА САМОЛЕТА

*Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, д. т. н., профессор  
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*Рассмотрен подход к построению области расположения корней управляемой динамической системы, удовлетворяющих желаемому качеству и функционально связанных с параметрами объекта управления. Решение обратной задачи модального управления проведено по способу канонического разложения характеристического полинома замкнутой системы на примере контура стабилизации вертикальной скорости полета тяжелого самолета. Получено решение для регулятора минимальной размерности в функции параметров контура управления перегрузки. Робастность системы подтверждена результатами моделирования процессов выхода самолета на заданную вертикальную скорость при различных вариантах сочетаний параметров объекта управления.*

*Ключевые слова:* динамическая система, обратная задача, модальное управление, характеристический полином, желаемое качество, перерегулирование, робастность.

## INVERSE PROBLEM OF MODAL CONTROL SOLUTION USING REDUCED-DIMENSION CONTROLLER SYNTHESIS FOR AIRCRAFT VERTICAL SPEED HOLD

*Vladimir E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor  
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC  
E-mail: inbox@aomiea.ru*

*The article considers an approach to constructing the location area of controlled dynamic system roots that meet the desired control quality requirements and are functionally related to control object parameters. The inverse problem of modal control was solved by the method of closed-loop system characteristic polynomial canonical expansion on the example of the heavy aircraft vertical speed hold loop. A solution to the reduced-dimension controller is obtained using the function of parameters of the overload control loop. The system robustness is confirmed by the results of simulation of the aircraft reaching the selected vertical speed for various combinations of control object parameters.*

*Keywords:* dynamic system, inverse problem, modal control, characteristic polynomial, desired control quality, overshoot, robustness.

Теория модального управления основывается на выборе размещения корней замкнутой системы автоматического управления [1] с отрицательными вещественными частями, что полностью соответствует первому методу Ляпунова [2, стр. 127] об условиях устойчивости нелинейной системы по уравнениям первого приближения.

Решение задачи синтеза системы автоматического управления (САУ), несмотря на различные применяемые способы разработки, приводит в конечном итоге к желаемому размещению корней динамической системы, обеспечивающих заданное качество управления. Поэтому синтез направлен на коррекцию нежелательных корней исходной системы и на построение обратных связей по наблюдаемым координатам движения для структурного и параметрического влияния на коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы управления. Для линейных систем с постоянными коэффициентами при полной наблюдаемости координат состояния задача синтеза имеет точное аналитическое решение [3] и позволяет осуществить желаемое размещение корней.

Метод модального управления при синтезе САУ является прямым методом, так как решает задачу заранее назначенного размещения корней и не отвечает на вопрос, как определять эти корни исходя из характеристик объекта управления. В теории модального управления [4–7] применяют способы назначения эталонных моделей (эталонных передаточных функций) и стандартных характеристических полиномов [8–11], обеспечивающих желаемый вид переходных процессов. Способ стандартных коэффициентов также не отвечает на вопрос о связи желаемого распределения корней системы с ее неизменяемой частью, то есть с корнями объекта управления. Таким образом, остается открытой проблема о назначении желаемых корней управляемой динамической системы при учете динамических параметров объекта, которая до настоящего времени решается эмпирическим путем при конструировании САУ.

Практика создания САУ воздушных летательных аппаратов (ЛА) при формировании желаемой динамики замкнутого контура неизменно опирается на полное использование в задаче синтеза исходных аэродинамических и инерционно-массовых характеристик ЛА, то есть динамических характеристик объекта управления. Всегда замкнутая система размерности  $n$  остается не полностью наблюдаемой с неполным вектором обратных связей размерностью  $r < n - 1$  из-за ограниченного количества измеряемых координат полета ЛА. Это существенное ограничение будет оказывать влияние на перераспределение исходных (до замыкания контура) корней объекта управления независимо от параметрической настройки структурно неполной обратной связи.

Для каждой конкретной структуры замкнутого контура будут иметь место функциональные связи меньше полной размерности  $n$ , необходимой для однозначного решения задачи синтеза. Напомним, что для этого необходимо в каноническом представлении измерять  $(n - 1)$  производные регулируемой координаты, включая нулевую производную — собственно саму координату управления. Тогда на  $n$  корней или, что то же, на  $n$  динамических параметров замкнутой системы, будет приходиться  $m = 2n - r - 1$  неизвестных параметров замкнутой системы, включая параметры обратных связей. То есть возникает множество решений, из которых надо выбирать приемлемые. Таким образом, для практически значимых вариантов сниженной размерности обратной связи возникает необходимость выявления зависимостей между параметрами замкнутой системы в функции параметров обратной связи. Настройка этих параметров должна выбираться на основе требований к контуру управления по критериям устойчивости и качества управления.

Сформулируем постановку *обратной задачи теории модального управления* в применении к синтезу САУ летательных аппаратов: нахождение области распределения корней замкнутой системы, удовлетворяющих показателям устойчивости и качества управления, в функции динамических параметров объекта управления.

При полной наблюдаемости и решении прямой задачи по способу Аккермана обратной задачей можно считать нахождение на базе стандартного полинома такого диапазона изменения его коэффициентов характеристического полинома, при котором достигается приближение к нулю хотя бы одного любого из коэффициентов обратной связи. В этом случае соответствующая ветвь обратной связи структурно исчезает, что является предельно возможным условием синтеза для полностью наблюдаемых систем. Речь идет о вариации всего стандартного полинома до появления этого структурного изменения. Так как имеет смысл варьировать только самый медленный корень, влияющий на нормирование стандартного полинома, то при первом «касании нуля» какого-либо из коэффициентов обратной связи при положительных значениях остальных коэффициентов будет достигнута граница существования решения прямой задачи модального управления для формирования наиболее быстрого движения замкнутой системы. Поиск таких вариантов осуществляется, как правило, эмпирическим путем без увязки с исходными модами свободного движения исходной системы. В работе [9, стр. 213] предложены некоторые корневые методы к оценке качества регулирования, для которого «вид корней в характеристическом уравнении определяет характер процессов в системе автоматического управления».

Наиболее близким вариантом решения обратной задачи для не полностью наблюдаемой системы является метод синтеза с регулятором меньшей размерности [12–15], применяемый для частных практических задач с понижением порядка желаемой переходной функции. Однако в этих подходах также не устанавливается функциональная связь решений с динамическими параметрами неизменяемой части системы, в нашем случае, например, с параметрами свободного короткопериодического движения самолета.

Покажем решение обратной задачи модального управления с последующим синтезом быстродействующей системы стабилизации вертикальной скорости  $V_y$  полета самолета на основе получения функциональных зависимостей параметров замкнутого контура системы от параметров объекта управления.

Пусть структурная схема системы стабилизации  $V_y$ , показанная на рис. 1, содержит один параметр настройки САУ — коэффициент прямого усиления  $k_{V_y}$  ошибки управления  $\Delta V_y = V_y^{\text{зад}} - V_y$ , то есть рассогласования заданной и текущей угловых скоростей.

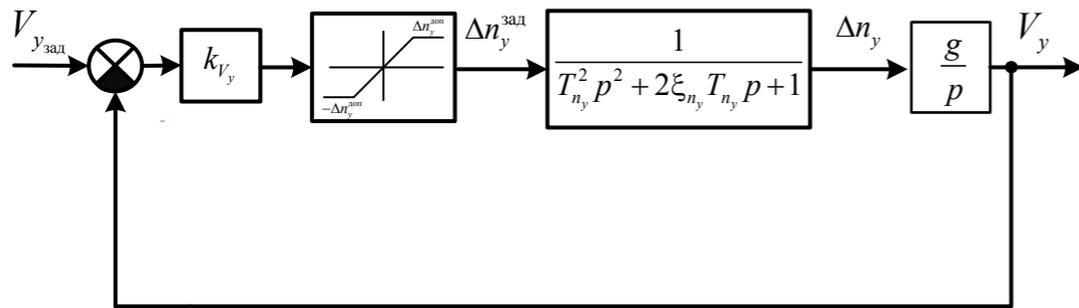


Рис. 1. Структурная схема контура стабилизации вертикальной скорости полета

Из структуры (рис. 1) передаточная функция замкнутой линейной системы будет равна:

$$W_{V_y}^{V_y^{\text{зад}}}(p) = \frac{1}{\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1}, \quad (1)$$

а характеристический полином замкнутого контура управления:

$$\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1. \quad (2)$$

Полином (2) третьего порядка имеет три корня при трех параметрах: двух известных параметрах  $T_{n_y}$ ,  $\xi_{n_y}$  — постоянной времени и относительного коэффициента затухания контура отработки перегрузки и одного искомого параметра  $k_{V_y}$  — коэффициента усиления в прямой цепи системы (рис. 1). Поставим задачу определения функциональной связи  $k_{V_y} = f(T_{n_y}, \xi_{n_y})$  для любых существующих параметров контура перегрузки с вычислением одновременно максимального значения коэффициента  $k_{V_y}$ , определяющего быстродействие, при приемлемом качестве управления, понимаемого как неперевышение допустимого перерегулирования.

Представим характеристический полином (2) в виде канонической формы разложения многочлена с действительными коэффициентами [1] на сомножители полиномов первого и второго порядков с неизвестными пока параметрами

$$(T_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1). \quad (3)$$

Будем считать желаемым переходным движением системы (2) переходное движение аperiodического звена с постоянной времени  $T_1$ . Это позволит ориентироваться при последующем размещении корней (2) относительно доминирующего корня  $1/T_1$ , определяющего область желаемого качества работы исследуемой системы (2), как системы, близкой по поведению к аperiodическому звену.

Выполним разложение полинома (2) в виде (3), для этого проведем деление (2) на сомножитель  $T_1 p + 1$ , получим результат деления:

$$\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y} T_1} p^2 + \frac{T_{n_y} (2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y})}{gk_{V_y} T_1^2} p + 1,$$

который имеет остаток

$$\frac{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}{gk_{V_y} T_1^2} p + 1.$$

Для деления нацело полинома (2) достаточно выполнения равенства

$$\frac{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}{gk_{V_y} T_1^2} = T_1. \quad (4)$$

Из (4) находим выражение для коэффициента

$$k_{V_y} = \frac{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}{gT_1^3}. \quad (5)$$

Тогда параметры полинома второго порядка в разложении (3) при сравнении с полиномом, полученным в результате деления, примут вид:

$$T_2 = \frac{T_{n_y}}{\sqrt{gk_{V_y} T_1}}, \quad \xi_2 = \frac{2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y}}{T_1 \sqrt{gk_{V_y} T_1}}. \quad (6)$$

Подставим (5) в (6) и получим выражения для параметров:

$$T_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \frac{T_{n_y} T_1}{\sqrt{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}}, \quad (7)$$

$$\xi_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \frac{2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y}}{\sqrt{T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2}}, \quad (8)$$

которые являются функциями трех аргументов:  $\xi_{n_y}$ ,  $T_{n_y}$  неизменяемой части системы и  $T_1$  искомой постоянной времени.

Заметим, что коэффициент усиления САУ  $k_{V_y}$  (5) и параметры разложения (7), (8) при неизменяемой части системы — контуре обработки перегрузки с параметрами  $\xi_{n_y}$ ,  $T_{n_y}$  — являются функцией постоянной времени  $T_1$ , которую будем искать, чтобы гарантировать правильность разложения (3).

Необходимым условием устойчивости системы (2) с эквивалентным полиномом (3) является: положительность значений параметров  $T_1$ ,  $T_2$  и  $\xi_2$ :

$$T_1 > 0, T_2 > 0, \xi_2 > 0. \quad (9)$$

Учитывая, что все постоянные времени и относительный коэффициент затухания (9) должны иметь положительные значения, условием существования решения по поиску неизвестных параметров  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\xi_2$  являются следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} T_1^2 - 2\xi_{n_y} T_{n_y} T_1 + T_{n_y}^2 > 0, \\ 2\xi_{n_y} T_1 - T_{n_y} > 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы неравенств разбивается на две части. Для  $\xi_{n_y} < 1$  имеет место интервал определения параметра  $T_1$ :

$$T_1 > \frac{T_{n_y}}{2\xi_{n_y}}. \quad (10)$$

При  $\xi_{n_y} > 1$  область существования неизвестного параметра  $T_1$  расщепляется на два интервала:

$$\frac{T_{n_y}}{2\xi_{n_y}} < T_1 \leq T_{n_y} (\xi_{n_y} - \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}) \quad \text{и} \quad T_1 > T_{n_y} (\xi_{n_y} + \sqrt{\xi_{n_y}^2 - 1}). \quad (11)$$

В точке  $\xi_{n_y} = 1$  функции относительного затухания и постоянной времени при  $T_1 = T_{n_y}$  терпят разрыв второго рода

$$\xi_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \infty, \quad T_2(T_1, \xi_{n_y}, T_{n_y}) = \infty \quad \text{при} \quad T_1 = T_{n_y}. \quad (12)$$

Кроме того, в этой же точке  $k_{V_y} = 0$ , что означает полное размыкание контура управления. Понятно, что для адекватного решения этот случай должен быть надежно обойден при контроле интервалов возможных значений аргумента функции  $k_{V_y}(T_1)$ .

Таким образом, существование решений функций (7), (8) определяется областью их определения (10), (11) с учетом (12).

Достаточным условием устойчивости характеристического полинома (2), согласно критерию Рауса — Гурвица [16], является выполнение неравенства

$$\frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} \cdot \frac{1}{gk_{V_y}} > \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}},$$

из которого следует ограничение на максимально возможную величину искомого коэффициента усиления:

$$k_{V_y} < \frac{2\xi_{n_y}}{gT_{n_y}}. \quad (13)$$

Неравенство (13) определяет границу колебательной неустойчивости в обработке регулируемой координаты (состояние автоколебаний), что явно неприемлемо. Кроме того, например, для практически имеющих место значений  $T_{n_y} = 0,4$  с и  $\xi_{n_y} = 0,6$ , получаемый из (13) коэффициент  $k_{V_y}$ , определяющий порцию заданной перегрузки на 1 м/с вертикальной скорости полета, должен быть менее 0,306 с/м. Поэтому при существующем ограничении по располагаемой перегрузке для автоматики тяжелых самолетов  $n_y^{\text{зад}} = 0,3$  для работы САУ в линейной зоне  $\Delta V_y \pm 5$  м/с приближения самолета к заданному значению  $V_y$  из соотношения  $k_{V_y} \cdot \Delta V_y = 0,3$  величину коэффициента усиления желательнее иметь менее  $k_{V_y} = 0,06$  с/м.

Итак, разложение (2) в (3) возможно только при выполнении равенства (5) для  $k_{V_y}$ , полученного по методу деления полинома (2) без остатка. В развернутом виде равенство полиномов (2) и (3) примет вид:

$$\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1 = T_1 T_2^2 p^3 + T_2 (T_2 + 2\xi_2 T_1) p^2 + (T_1 + 2\xi_2 T_2) p + 1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $p$  преобразования Лапласа в левой и правой частях этого равенства, получаем систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} T_1 T_2^2 &= \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}}, \\ T_2 (T_2 + 2\xi_2 T_1) &= \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}}, \\ T_1 + 2\xi_2 T_2 &= \frac{1}{gk_{V_y}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Система (14) содержит четыре неизвестных параметра  $\xi_{n_y}$ ,  $T_{n_y}$ ,  $T_1$  и  $k_{V_y}$ , связанных между собой выражениями (5), (7), (8), которые удовлетворяют трем уравнениям системы (14). Прямые решения системы (14) связаны с вычислениями уравнений третьей степени, чего удалось избежать методом деления нацело с нулевым остатком разложения исходного многочлена (2). Тогда вопрос получения числового решения для коэффициента  $k_{V_y}$  состоит в необходимом для этого назначении постоянной времени  $T_1$  в зависимости от параметров контура отработки перегрузки  $\xi_{n_y}$ ,  $T_{n_y}$  и контролем после этого получаемых, согласно (7), (8), параметров  $T_2$ ,  $\xi_2$ . Понятно, что основным требованием в условиях обеспечения устойчивости замкнутого контура управления является быстроедействие и перерегулирование переходного процесса при стандартном воздействии на вход единичной ступеньки.

В работе [9, стр. 216] показано, что при введенном в рассмотрение среднегеометрическом корне  $\Omega_0$ , равном в абсолютном значении для полинома (3):

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2^2}}, \quad (15)$$

«наименьшее время переходного процесса будет при всех кратных корнях».

То есть для рассматриваемого случая выражение (15) может быть преобразовано к виду:

$$\Omega_0 = \frac{1}{T_1} \quad \text{при } T_2 = T_1 \text{ и } \xi_2 = 1. \quad (16)$$

Тогда полином (3) в смысле равенства постоянных времени полиномов-сомножителей можно будет представить в обобщенном по отношению к жестким условиям (16) виде

$$(T_1 p + 1)(T_1^2 p^2 + 2\xi_2 T_1 p + 1), \quad (17)$$

а соответствующая система (14) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T_1^3 &= \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}}, \\ (2\xi_2 + 1)T_1^2 &= \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}}, \\ (2\xi_2 + 1)T_1 &= \frac{1}{gk_{V_y}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Система (18) имеет решение относительно параметров контура управления перегрузкой, а именно:

$$T_1 = 2\xi_{n_y} T_{n_y}, \quad \xi_2 = 2\xi_{n_y}^2 - 0,5, \quad k_{V_y} = \frac{1}{8gT_{n_y} \xi_{n_y}^3}. \quad (19)$$

Выражения (19) имеют смысл при условии нахождения  $\xi_{n_y} > 0,5$ . Однако, для обеспечения удовлетворительного качества процесса управления системы (2) необходимо получение  $\xi_2 > 0,5$ . Тогда, согласно (19), относительный коэффициент затухания контура перегрузки всегда должен быть

$$\xi_{n_y} > 1/\sqrt{2}.$$

Заметим, что в теории автоматического управления величина  $\xi_{n_y} = 1/\sqrt{2}$  является оптимальной [18] для динамического звена второго порядка в смысле максимального быстрогодействия без ухудшения качества процесса управления (перерегулирование 4,3%).

Полагая, что желаемое переходное движение системы (2) определяется доминирующим корнем апериодического звена с постоянной времени  $T_1$ , определим с помощью метода интегральной

оценки [19] степень приближения переходной функции системы

$$h(t) \doteq \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_1^2 p^2 + 2\xi_2 T_1 p + 1)} \quad (20)$$

к желаемой переходной функции

$$h_x(t) \doteq \frac{1}{p(T_1 p + 1)}. \quad (21)$$

Будем искать интегральную квадратичную оценку рассогласования  $x_h(t) = h_x(t) - h(t)$  желаемого и фактического переходных процессов согласно функционалу

$$I_h = \int_0^{\infty} x_h(t)^2 dt. \quad (22)$$

Изображение разности желаемой (21) и фактической (20) переходных функций  $x(t) = h_x(t) - h(t)$  примет вид:

$$X(p) = H_x(p) - H(p) = \frac{1}{p(T_1 p + 1)} - \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_1^2 p^2 + 2\xi_2 T_1 p + 1)},$$

$$H_x(p) = L^{-1}[h_x(t)], \quad H(p) = L^{-1}[h(t)]$$

или

$$X(p) = \frac{T_1^2 p + 2\xi_2 T_1}{T_1^3 p^3 + (2\xi_2 + 1)T_1^2 p^2 + (2\xi_2 + 1)T_1 p + 1}. \quad (23)$$

Исходя из (23), обозначим:

$$a_3 = T_1^3, \quad a_2 = (2\xi_2 + 1)T_1^2, \quad a_1 = (2\xi_2 + 1)T_1, \quad a_0 = 1, \quad b_{1h} = T_1^2, \quad b_{0h} = 2\xi_2 T_1. \quad (24)$$

Согласно [20], интегральная квадратичная оценка (22) определяются:

$$I_h = \frac{\det B_h}{2a_3 \det A_h}, \quad (25)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B_h = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ B_{0h} & B_{1h} & B_{2h} \end{bmatrix},$$

$$B_{0h} = b_{0h}^2 = 4\xi_2^2 T_1^2, \quad B_{1h} = b_{1h}^2 = T_1^4, \quad B_{2h} = 0.$$

Подстановка (24) в (25) дает следующий результат:

$$I_h = \frac{T_1(8\xi_2^3 + 4\xi_2^2 + 1)}{8\xi_2(\xi_2 + 1)}. \quad (26)$$

Будем искать экстремум среднего квадрата (26), для этого продифференцируем равенство (26) по  $\xi_2$ :

$$\frac{\partial I_h(T, \xi_2)}{\partial \xi_2} = \frac{(8\xi_2^4 + 16\xi_2^3 + 4\xi_2^2 - 2\xi_2 - 1)T_1}{8\xi_2^2(\xi_2 + 1)^2}. \quad (27)$$

Приравняем выражение (27) к нулю и получим

$$8\xi_2^4 + 16\xi_2^3 + 4\xi_2^2 - 2\xi_2 - 1 = 0. \quad (28)$$

Уравнению (28) удовлетворяет физически значимое оптимальное значение

$$\xi_2 = 0,394. \quad (29)$$

Заметим, что оптимальная в смысле минимума среднего квадрата отклонения переходного процесса системы от желаемого величина (29) не зависит от постоянной времени. Тогда для  $T_1 = 1$  с построим графики (рис. 2) указанных переходных движений в относительных единицах измерения  $\bar{V}_y$  при воздействии на вход системы единичной ступеньки.

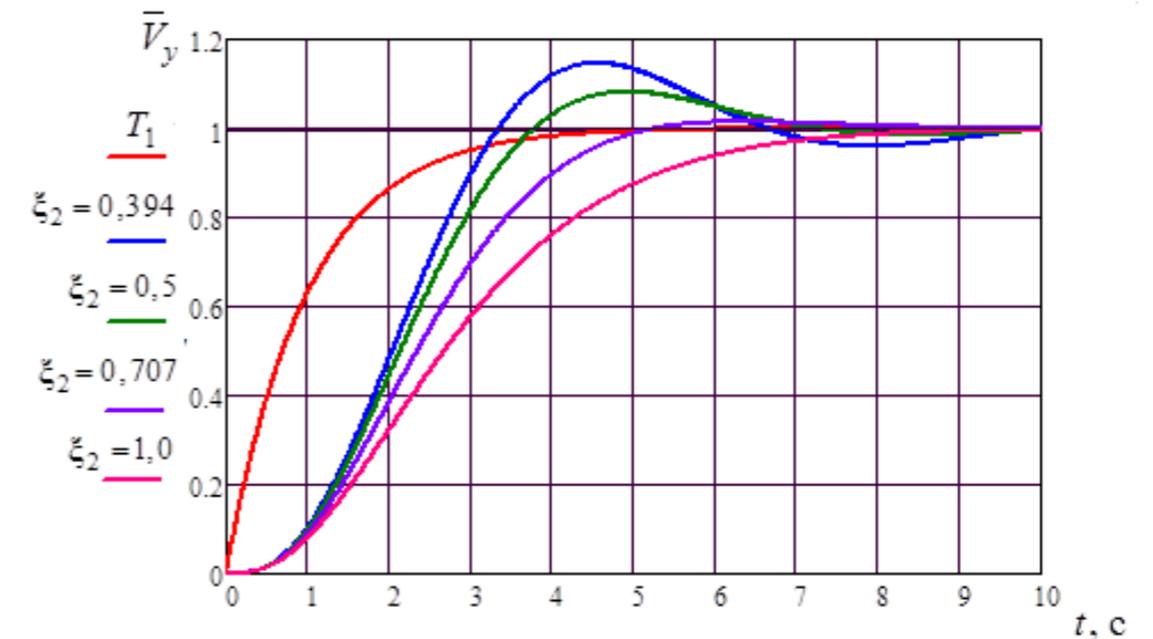


Рис. 2. Переходные процессы системы в форме структур Баттерворта в сравнении с желаемым процессом

На этом рисунке показаны нормированные переходные процессы: желаемого апериодического с постоянной времени  $T_1$ , с оптимальной величиной относительного коэффициента затухания (29), процесс для  $\xi_2 = 0,5$ , при котором система превращается в систему фильтра Баттерворта [21], а также процессы при  $\xi_2 = 0,707$  и  $\xi_2 = 1,0$ .

Для полученного оптимального решения перерегулирование составляет 14,6%, для системы в варианте Баттерворта 8%. Для оптимального по быстродействию звена второго порядка при  $\xi_2 = 0,707$  в выражении (20) перерегулирование составляет 1,4%, кроме того, для него время регулирования практически совпадает со временем регулирования желаемого процесса. Для процесса с  $\xi_2 = 1$  время регулирования неоправданно возрастает почти в 2 раза.

Найдем в классе структур Баттерворта с полиномами (17) диапазон относительных коэффициентов затухания, начиная от 0,5 и выше без ослабления требований к быстродействию. Напомним, что рассмотренные выше случаи определяются допущением о равенстве постоянных времени  $T_2 = T_1$  в целях перевода системы (14) из неопределенной [22] в определенную (17), имеющую единственное аналитическое решение для настраиваемого коэффициента:

$$k_{vy} = \frac{1}{g(2\xi_2 + 1)T_1}. \quad (30)$$

Из первого выражения (6) следует, что введенное равенство постоянных времени  $T_2 = T_1$  выполняется при назначении желаемой постоянной времени

$$T_1 = 2\xi_{ny} T_{ny}. \quad (31)$$

Обратим внимание, что при увеличении  $\xi_{ny}$  коэффициент усиления  $k_{vy}$  в прямой цепи системы (1) уменьшается в гиперболической зависимости, что и снижает быстродействие системы. Тогда найдем решение следующей задачи, заключающейся в поддержании всегда оптимального по быстродействию при

$$\xi_2 = 1/\sqrt{2} = 0,707.$$

Сначала уточним область параметров контура перегрузки, обеспечивающих выполнение условий существования структурно подобных фильтру Баттерворта решений из (19). На основании (19) для желаемого интервала значений  $\xi_2 = [0,5, 0,707]$  относительные коэффициенты затухания контура перегрузки должны находиться в пределах

$$0,707 \leq \xi_{ny} \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}} = 0,777. \quad (32)$$

Если левая граница в (32) является обязательной с точки зрения допускаемого перерегулирования, то на практике часто встречаются контура с затуханием  $\xi_{ny} > 0,777$ . Тогда изучаемый характеристический полином (17) должен с расщеплением постоянных времени вернуться к исходному полиному (3). Точкой перехода к исходному полиному будем считать точку

$$\xi_{ny} = 0,777, \quad (33)$$

в которой  $\xi_2$  достигает величины 0,707, которую будем сохранять при любом значении  $\xi_{ny}$ , большем величины (33). Потребуем для (8) выполнения условия

$$\frac{2\xi_{ny}T_1 - T_{ny}}{\sqrt{T_1^2 - 2\xi_{ny}T_{ny}T_1 + T_{ny}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Для мягкого перехода от системы со структурой (17), порождаемой полиномом Баттерворта, с сохранением в нем выражения (31), введем множителем некоторый коэффициент пропорциональности  $k_1$ , получим

$$T_1 = k_1 2\xi_{ny} T_{ny}. \quad (35)$$

Подставим (35) в (34), получим уравнение

$$\frac{4k_1\xi_{ny}^2 - 1}{\sqrt{4k_1\xi_{ny}^2(k_1 - 1) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

и найдем искомый коэффициент

$$k_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi_{ny}\sqrt{2\xi_{ny}^2 - 1}}. \quad (36)$$

После нахождения коэффициента коррекции  $k_1$  (36) осталось найти коэффициент усиления  $k_{vy}$  контура отработки вертикальной скорости, который определяется подстановкой (36) в (35) и далее в (5). Тогда формулы для вычисления коэффициента усиления, с учетом (19), для всех значений  $\xi_{ny} > 1/\sqrt{2}$  примут вид:

$$k_{vy1} = \frac{1}{8gT_{ny}\xi_{ny}^3} \text{ при } 0,707 \leq \xi_{ny} \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}; \quad (37)$$

$$k_{V_{y2}} = \frac{\sqrt{2}(4\xi_{n_y}^2 - 1)\sqrt{2\xi_{n_y}^2 - 1} - 4\xi_{n_y}(2\xi_{n_y}^2 - 1)}{gT_{n_y}} \quad \text{при } \xi_{n_y} > \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}. \quad (38)$$

Зависимость коэффициента  $k_{V_y}$  от  $\xi_{n_y}$  для  $T_{n_y} = 0,5$  с в сопряжении двухдиапазонных ветвей  $k_{V_{y1}}$  (37) и  $k_{V_{y2}}$  (38) показана на рис. 3, на котором недействующие участки кривых показаны штриховыми линиями.

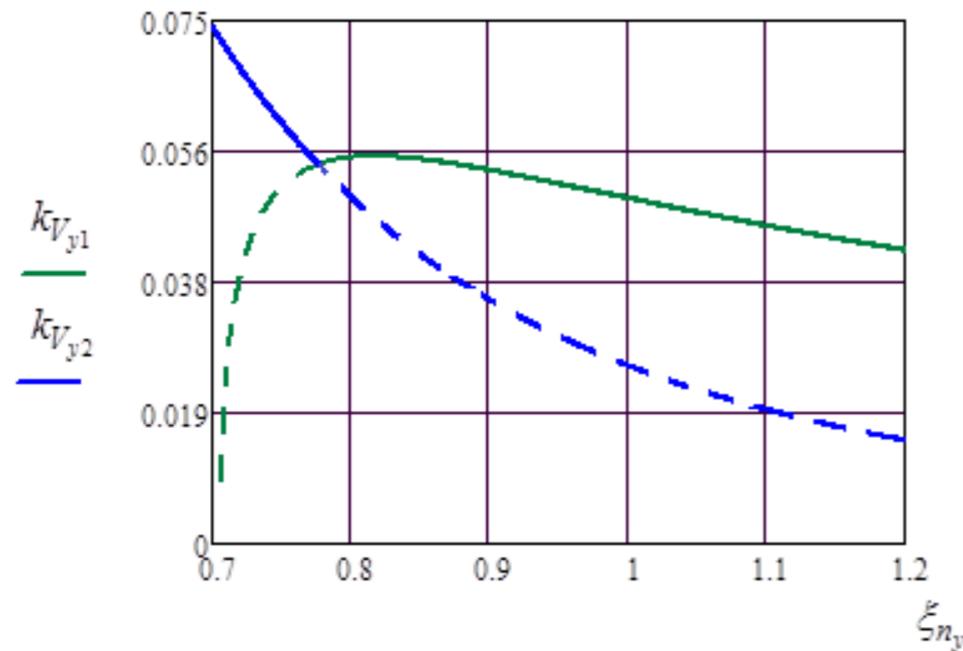


Рис. 3. Двухдиапазонный график зависимости коэффициента усиления от относительного коэффициента затухания контура перегрузки

Как видно из графика, коэффициент  $k_{V_y}$  при увеличении относительного коэффициента затухания от 0,777 до 1...1,2 возрастает в два раза по сравнению с ветвью работы системы в сохраненном варианте структуры Баттерворта и увеличивает быстродействие.

На рис. 4 показаны графики переходных процессов при  $T_{n_y} = 0,5$  с для значений  $\xi_{n_y} = 0,7, 0,75, 0,8, 0,9, 1,0$  и 1,2.

Величины перерегулирования не зависят от значений постоянной времени  $T_{n_y}$ . Это свойство найденного решения иллюстрирует рис. 5, на котором показано изменение переходных движений для  $T_{n_y} = 0,3, 0,6$  с при  $\xi_{n_y} = 0,7, 0,8$ . Как видно из графиков, перерегулирование зависит только от относительного коэффициента затухания контура перегрузки, а увеличение постоянной времени приводит только к увеличению длительности переходного процесса без изменения его качества.

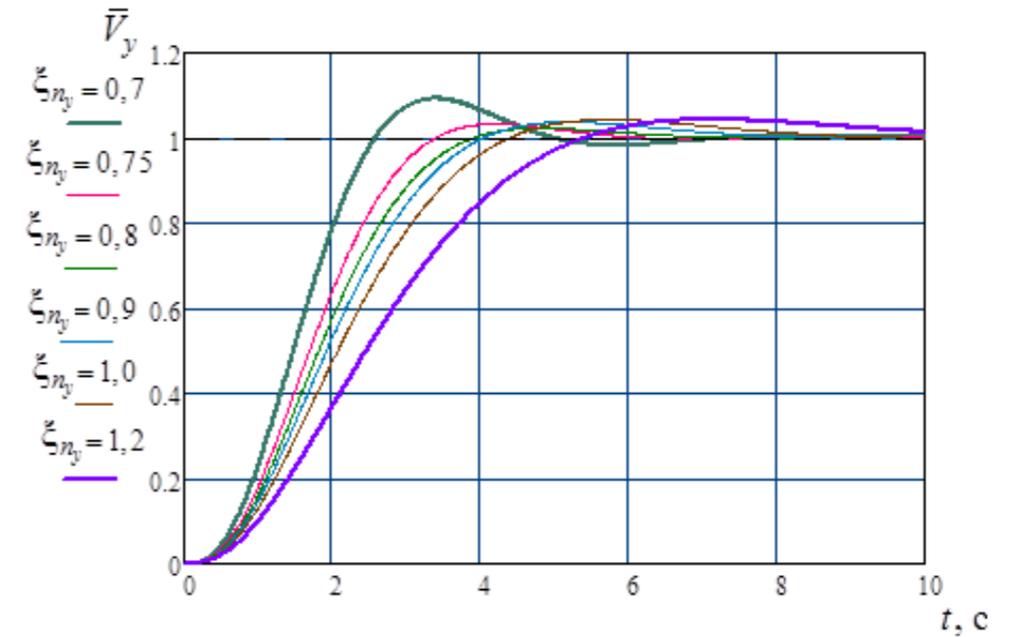


Рис. 4. Графики переходных процессов настроенной системы стабилизации  $V_y$  при различных значениях  $\xi_{n_y}$

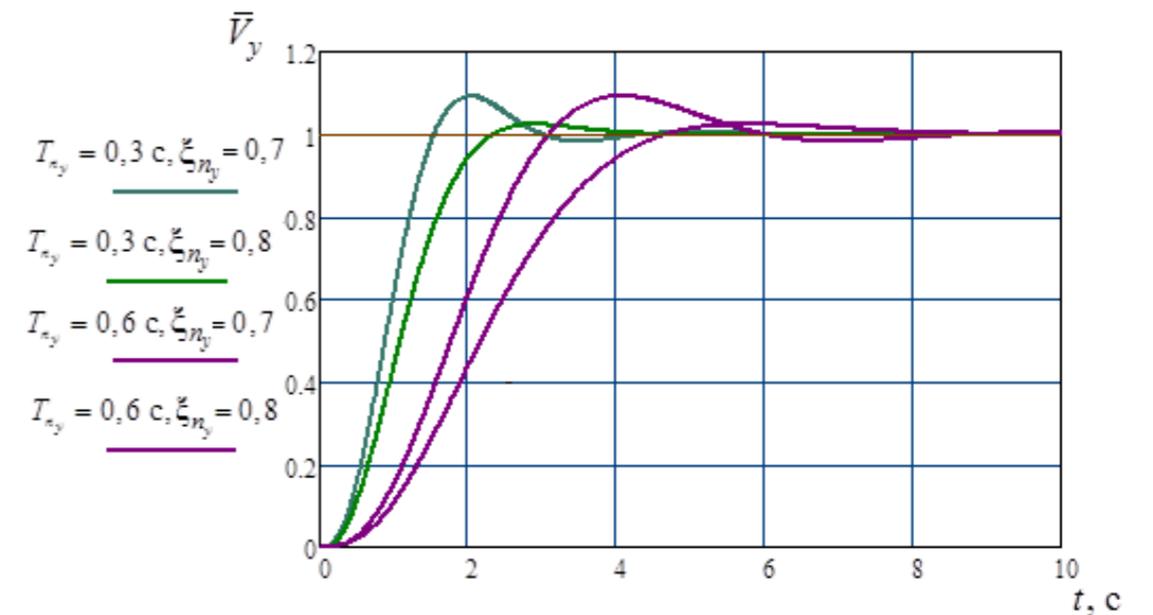


Рис. 5. Переходные движения с независимым от постоянной времени  $T_{n_y}$  перерегулированием

Проверим робастность полученного алгоритма (37, 38) синтеза контура стабилизации вертикальной скорости полета тяжелого самолета. Как было показано выше, нелинейная зависимость коэффициента усиления  $k_{V_y}$  проявляет себя от аргумента  $\xi_{n_y}$ . От постоянной времени  $T_{n_y}$  зависимость  $k_{V_y}$  носит характер обратной пропорциональности. Действительно, на графике расщепляющихся ветвей функциональной зависимости  $k_{V_y} = f(\xi_{n_y})$  при  $T_{n_y} = \text{const}$  в диапазоне  $\xi_{n_y} = 0,75 \dots 1,1$  коэффициент  $k_{V_y}$  лежит в диапазоне  $0,045 \dots 0,055$  при среднем значении  $0,05$ . То есть в этом диапазоне коэффициент усиления с точностью  $\pm 10\%$  близок к постоянной величине, что определяет практическую инвариантность качества процесса от неточного знания относительного коэффициента затухания. Тогда в этом случае имеется относительная независимость между параметрами  $\xi_{n_y}$  и  $T_{n_y}$ , что позволяет провести проверку робастности синтезированного контура при вариации только постоянной времени. Так как диапазон изменения  $T_{n_y}$  составляет для тяжелых самолетов  $0,3 \dots 0,6$  с, проведем при  $\xi_{n_y} = 0,8$  оценку разброса параметра в указанном диапазоне. То есть при априорном значении  $T_{n_y} = 0,6$  с, при котором рассчитывается по формулам (37, 38)  $k_{V_y}$ , будем считать при моделировании реальным значением  $\hat{T}_{n_y} = 0,3$  с. Также проверим вариант для  $T_{n_y} = 0,3$  с при реальном значении  $\hat{T}_{n_y} = 0,6$  с.

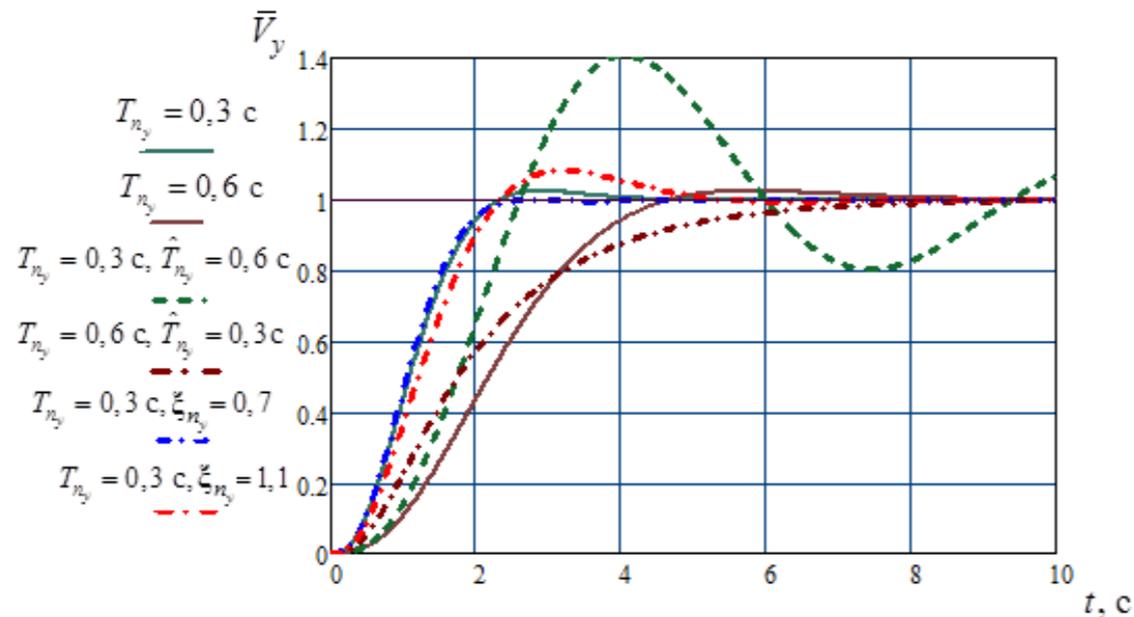


Рис. 6. Графики переходных движений при предельных разбросах априорных (сплошные кривые) и реальных значений  $\hat{T}_{n_y}$  и  $\hat{\xi}_{n_y}$  — пунктирные линии

Результаты моделирования при разбросе  $T_{n_y}$  в своем полном диапазоне представлены на рис. 6. Здесь же приведен пример разброса только относительного коэффициента затухания при значениях  $\hat{\xi}_{n_y} = 0,7, 1,1$  и реальной величине  $\xi_{n_y} = 0,8$ .

Анализ графиков на рис. 6 показывает: практическую независимость по перерегулированию от ошибочного определения затухания, переход к апериодическому процессу при большем значении расчетной величины постоянной времени от практической (вариант  $T_{n_y} = 0,6$  с,  $\hat{T}_{n_y} = 0,3$  с) и появление колебательности в крайнем варианте  $T_{n_y} = 0,3$  с,  $\hat{T}_{n_y} = 0,6$  с. Для интервала расхождения значений  $T_{n_y} = 0,3$  с,  $\hat{T}_{n_y} = 0,4$  с перерегулирование не превышает  $10\%$ , что следует считать максимально допустимым разбросом оценки постоянной времени в сторону ее увеличения. Поэтому в целях сохранения приемлемого качества переходных процессов при использовании информации о параметрах контура перегрузки для расчетов желательно завышать постоянную времени относительно ее априорного значения не менее чем на  $10\%$ .

Вопрос выхода самолета на ограничение по перегрузке при обработке больших значений заданной вертикальной скорости не является препятствием для применения расчетов по формулам (37, 38) в силу того, что синтезированный контур является статическим, а контур перегрузки априорно устойчив. Только, в силу этого, будет увеличено время отработки  $V_y$ , а при входе в линейную зону управления по перегрузке при  $\Delta V_{y0} = \frac{\Delta n_y^{\text{доп}}}{k_{V_y}}$  и соответствующей ей производной по времени  $V'_{y0} = g \Delta n_y^{\text{доп}}$  качество процесса в силу линейности процесса управления будет соответствовать расчетному.

Для этого рассмотрим для нашей системы третьего порядка поведение свободной составляющей  $V_{y0}(p)$  движения, вызванного входом контура в линейную зону после нахождения на ограничении по перегрузке в наборе высоты. На основании [20] изображение Лапласа свободного переходного процесса  $V_{y0}(t)$  имеет вид:

$$V_y(p) = \frac{-\Delta V_{y0} \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^2 + \left( -\Delta V_{y0} \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} + V'_{y0} \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} \right) p + (-\Delta V_{y0}) \frac{1}{gk_{V_y}} + V'_{y0} \frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}}}{\frac{T_{n_y}^2}{gk_{V_y}} p^3 + \frac{2\xi_{n_y} T_{n_y}}{gk_{V_y}} p^2 + \frac{1}{gk_{V_y}} p + 1} \quad (39)$$

Знак «минус» в (39) обозначает начальную изображающую точку  $(-\Delta V_{y0}, V'_{y0})$  фазовой плоскости свободной системы, осуществляющей

движение при действии положительной перегрузки с устранением в наборе высоты начальной ошибки по вертикальной скорости, которая должна уменьшаться до нуля при стремлении к нулевому равносному состоянию. Поэтому проведено смещение положения равновесия на  $-\Delta V_{y_0}$  для последующего движения свободной устойчивой системы к тривиальному нулевому состоянию, для которого действует формула (39).

На рис. 7 сведены по вертикальной оси два переходных процесса. Первый — свободное движение  $V_{y_0}^{своб}(t)$ , то есть оригинал изображения (39) при входе самолета в линейную зону по перегрузке менее ограничения  $\Delta n_y^{доп} = 0,3$  и параметрах  $T_{n_y} = 0,4$  с,  $\xi_{n_y} = 0,75$ . При соответствующем расчете  $k_{V_y}$  (37) начальная вертикальная скорость входа системы в линейную зону со своей полной структурой (2) составляет  $\Delta V_{y_0} = 3,97$  м/с. Второй процесс — переходное вынужденное движение системы при отработке скачка заданной вертикальной скорости с  $V_y^{зад} = 3,97$  м/с.

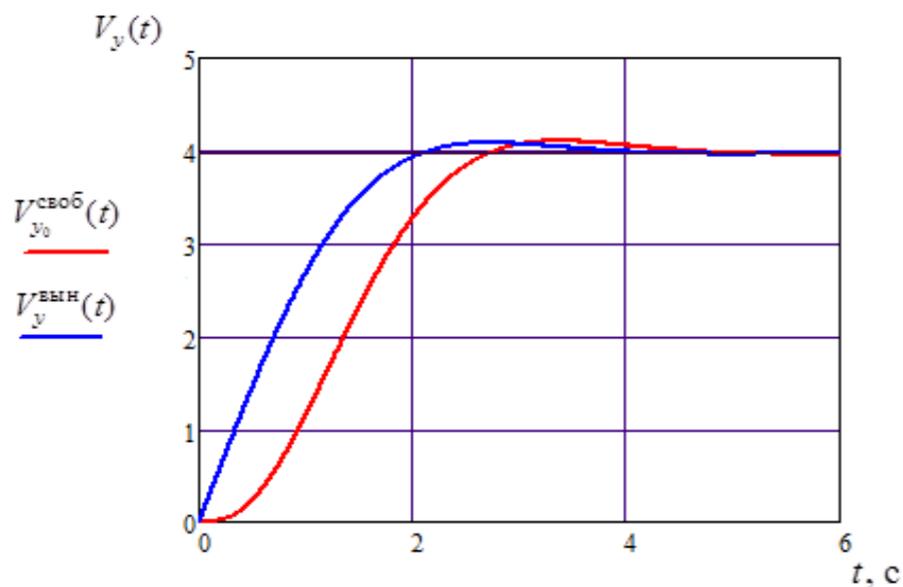


Рис. 7. Сравнение переходных процессов свободного и вынужденного движений при отработке одинаковых приращений по ошибке управления  $\Delta V_y$

Как видно из графиков рис. 7, перерегулирование обоих процессов совпадает, поэтому полученный метод синтеза можно применять с использованием ограничителя заданной перегрузки, на которую выходит контур перегрузки в силу своей устойчивости и высокого качества управления на интервале относительного коэффициента затухания  $\xi_{n_y} = 0,707 \dots 1,2$ .

В итоге на основе полученного аналитического решения обратной задачи модального управления найден высокоточный закон управления вертикальной скоростью полета с помощью простого регулятора минимального порядка, имеющего вид функции от параметров контура отработки перегрузки. Функциональный регулятор обеспечивает желаемое качество управления, инвариантен по качеству вписывания в заданную вертикальную скорость после действия ограничения по нормальной перегрузке, обладает робастными свойствами и может быть рекомендован для применения в системах автоматического управления тяжелых самолетов.

## Литература

1. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 472 с.
3. Ackermann J. E. Pole Placement Control. Control Systems, Robotics and Automation. Vol. VIII, pp. 74–100.
4. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах». М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
5. Воронов А. А. Синтез минимальных модальных регуляторов, действующих от измеримых входа и выхода линейного объекта. // Автоматика и телемеханика, № 2, 1993. – С. 34–51.
6. Лозгачев Г. И. Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы. // Автоматика и телемеханика, № 5, 1995. – С. 49–55.
7. Григорьев В. В., Журавлева Н. В., Лукьянова Г. В., Сергеев К. А. Синтез систем автоматического управления методом модального управления. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2007. – 108 с
8. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 600 с.
9. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. Издание третье, исправленное. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 768 с.
10. Ким Д. П. Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 164 с.
11. Гайдук А. Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 418 с.
12. Воевода А. А., Мелешкин А. И. О модальном синтезе линейных систем с регулятором пониженного порядка. // Сб. науч. тр. НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, №3(5), 1996. – С. 121–125.
13. Мелешкин А. И. О взаимном расположении корней полинома и его производных в задаче синтеза линейных регуляторов пониженного порядка. // Научные основы высоких технологий: Тр. Междунар. науч.-техн. конф. Новосибирск, т.1, 1997. – С. 27–28.
14. Бойченко В. А., Курдюков А. П., Тимин В. Н., Чайковский М. М., Ядыкин И. Б. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры. // Управление большими системами: сборник трудов, т. 19, 2007. – С. 23–126.
15. Воевода А. А., Вороной В. В., Шоба Е. В. Модальный синтез многоканального регулятора пониженного порядка с использованием «обратной» производной на примере трехмассовой системы. // Науч. вестник НГТУ, №1(46), 2012. – С. 15–22.
16. Постников М. М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
17. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: ЛКВВИА, 1949.
18. Попов Е. П. Динамика систем автоматического управления. – М.: Гостехиздат, 1954. – 798 с.
19. Кочетков Ю. А. Основы автоматики авиационного оборудования. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1975. – 454 с.
20. Кочетков Ю. А. Основы автоматики авиационного оборудования. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1995. – 574 с.
21. Р. Зааль. Справочник по расчетам фильтров: пер. с нем. / Р. Зааль. – М.: Радио и связь, 1984. – 752 с.
22. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 416 с.

**Правила оформления материалов,  
направляемых для опубликования в журнале  
«Навигация и управление летательными аппаратами»**

- Для опубликования в журнале принимаются статьи объемом до 30 с., а также краткие сообщения объемом до 5 стр.
- Статья должна иметь аннотацию не более 600 знаков, ключевые слова.
- На первой странице должны быть указаны: фамилии и инициалы авторов, полное название текста статьи без сокращений, проставлен индекс УДК.
- Материалы должны быть подготовлены в формате \*.doc, лист А4, ориентация книжная (вертикальное расположение), шрифт Times New Roman, размер шрифта 12, интервал между строками одинарный, поля (мм): верхнее 22, нижнее 50, левое 30, правое 28, расположение страниц зеркальное. Установить «Автоматическую расстановку переносов». Переносы вручную не ставить.
- Формат формул в MathType или Microsoft Equation: Define Sizes, Full 12 pt, Subscript/Superscript 7 pt, Sub-Subscript/Superscript 5 pt, Symbol 18 pt, Sub-Symbol 12 pt.
- Иллюстрированный материал представляется в формате \*.jpg, \*.bmp, \*.png (разрешение не менее 300 точек на дюйм) или в виде рисунка Word, фрагменты которого объединены в единый объект. Цветные иллюстрации приветствуются.
- В конце текста указывается информация о каждом авторе: Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, полное название и почтовый адрес организации, должность, контактные телефоны (служебный, мобильный или домашний), адрес электронной почты.
- В редакцию предоставляется электронный носитель с текстом статьи и ее распечатка в двух экземплярах, подписанная всеми авторами.
- К статье прилагается экспертное заключение о возможности ее открытой публикации, рецензия, лицензионный договор.
- Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

## Содержание

А. В. Фомичев	
О вычислении относительной угловой скорости географического опорного треугольника БИНС.....	2
Г. В. Давыдов, Ю. Р. Иваненко, В. Ю. Мишин, А. В. Молчанов, А. Е. Серебряков, М. В. Чиркин	
Компенсация динамического захвата в кольцевом лазерном гироскопе.....	12
О. Н. Корсун, В. Е. Куликов, А. В. Кузин	
Валидация модели продольного движения тяжелого самолета методом идентификации коэффициентов аэродинамических сил и моментов.....	28
В. Е. Куликов	
Решение обратной задачи модального управления при синтезе регулятора минимальной размерности для режима стабилизации вертикальной скорости полета самолета.....	39