
**МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И АВТОМАТИКИ (МИЭА)**

**НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ
ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

Под общей редакцией доктора технических наук А. Г. Кузнецова

Выпуск 35

**Москва
2021**

УДК 629.7.05

ОБ ОЦЕНКЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДРЕЙФОВ ДАТЧИКОВ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ БИНС ФИЛЬТРОМ КАЛМАНА В НАЗЕМНЫХ ИСПЫТАНИЯХ

*Нина Борисовна ВАВИЛОВА, к. ф.-м. н.,
Ирина Анатольевна ПАПУША, к. ф.-м. н.,
Александр Владимирович КОЗЛОВ, к. ф.-м. н.
МГУ им М. В. Ломоносова,
Ольга Александровна ЗОРИНА, к. ф.-м. н.,
Сергей Евгеньевич КУХТЕВИЧ, к. ф.-м. н.,
Александр Владимирович ФОМИЧЕВ, к. ф.-м. н.,
Евгений Аркадьевич ИЗМАЙЛОВ, д. т. н.
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru*

Рассматривается способ оценки переменных дрейфов датчиков угловых скоростей (ДУС) БИНС на малоподвижном основании по координатам и скоростям, вычисляемым БИНС. Для постобработки данных используется фильтр Калмана, работающий в прямом и обратном времени, что значительно уменьшает методические погрешности оценки. В отличие от непосредственной обработки сигналов ДУС, данный способ устойчив к малым перемещениям БИНС, возможным, если БИНС в стендовых экспериментах не фиксируется на неподвижном фундаменте.

Ключевые слова: БИНС (бесплатформенная инерциальная навигационная система), оценка дрейфов гироскопов, постобработка.

STRAPDOWN INERTIAL NAVIGATION SYSTEM (SINS) ANGULAR RATE SENSORS DRIFT VARIABLES ESTIMATION BY KALMAN FILTER IN GROUND TESTS

*Nina B. VAVILOVA, PhD in Phys. and Math.,
Irina A. PAPUSHA, PhD in Phys. and Math.,
Alexanedr V. KOZLOV, PhD in Phys. and Math.
Lomonosov Moscow State University,
Olga A. ZORINA, PhD in Phys. and Math.,
Sergey E. KUKHTEVICH, PhD in Phys. and Math.,
Alexander V. FOMICHEV, PhD in Phys. and Math.,
Evgeny A. IZMAYLOV, D. Sc. in Engineering
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-Mail: inbox@aomiea.ru*

The article considers the method of SINS angular rate sensors drift variables estimation by coordinates and velocity computed by SINS on stationary base. The Kalman filter, that runs forward and backward in time is used for data post-processing, considerably reducing the estimation method errors. In contrast to angular rate sensors signal direct processing, this method is tolerant to SINS slight displacement that can occur if SINS is not fixed to stationary base.

Keywords: SINS (Strapdown Inertial Navigation System), gyroscope drift estimation, post-processing.

Введение

Оценка инструментальных погрешностей чувствительных элементов БИНС — важная практическая задача. Ее решение позволяет судить о качестве датчиков и дает возможность калибровать навигационную систему за счет компенсации оцененных погрешностей. При калибровке БИНС обычно выделяются постоянные составляющие и некоторые систематические зависимости погрешностей, например, от температуры или других факторов. Из этого следует необходимость оценки как постоянных, так и переменных инструментальных погрешностей. Существуют прямые и косвенные способы решения этой задачи.

Прямые способы основаны на постобработке первичных сигналов датчиков, зарегистрированных на неподвижном (относительно Земли) основании — оценке средних значений, трендов, СКО, построении спектров или вариаций Аллана [1, 2]. Естественно, что они требуют жесткой фиксации БИНС, а возмущения, вносимые остаточными движениями БИНС, должны быть много меньшими характерных погрешностей испытываемых датчиков. Поэтому прямые способы чувствительны к движениям БИНС и непригодны для исследований прецизионных приборов в условиях механических воздействий, заметных на фоне характерных инструментальных погрешностей.

В косвенных способах инструментальные погрешности оцениваются по координатам и скоростям, вычисляемым БИНС. Как показано ниже, они нечувствительны к малым перемещениям БИНС в процессе эксперимента, откуда следует устойчивость косвенных способов к малым перемещениям БИНС и их применимость даже на грубом испытательном оборудовании. При этом допустимые перемещения приведенного центра блока акселерометров БИНС могут достигать до единиц сантиметров, а угловые перемещения — до единиц градусов. Такие условия стендового эксперимента будем называть «малоподвижным основанием».

При любом способе наименее тривиальной оказывается оценка дрейфов ДУС БИНС, поскольку сигналы ДУС нередко бывают сильно зашумленными на фоне полезного сигнала, а оценки дрейфов сходятся достаточно медленно. Именно эта задача и рассматривается в статье.

Оценка дрейфов ДУС БИНС производится по координатам и скоростям, зарегистрированным от БИНС, работающей на малоподвижном основании. Для этого используется фильтр Калмана, работающий в прямом и обратном времени, в режиме постобработки записи. Эталонной информацией для фильтра служат нулевая скорость и постоянные координаты места проведения эксперимента.

Как показывает моделирование, использование прямого и обратного хода по времени и процедуры «склейки» оценок [4] сильно уменьшает систематическую погрешность, возникающую при обработке данных только в прямом, либо только в обратном времени.

Заметим, что вопрос о косвенной оценке по вторичным измерениям можно поставить и для других инструментальных погрешностей. Однако они хорошо наблюдаемы [4] при разворотах БИНС и быстро оцениваются фильтром Калмана в реальном времени при адекватной настройке. Поэтому данная, более простая задача в статье не обсуждается.

Математическая модель ошибок БИНС

Ядром математической модели погрешностей БИНС служат уравнения ошибок БИНС. Они дополняются формирующими уравнениями, описывающими эволюцию инструментальных погрешностей датчиков.

В рассматриваемой задаче оценки дрейфов ДУС на малоподвижном основании уравнения ошибок БИНС имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_e &= \delta V_e, \\ \Delta \dot{r}_n &= \delta V_n, \\ \delta \dot{V}_e &= 2u_3 \delta V_n - g\alpha_n + d'_{11} \Delta f_1^0 + d'_{12} \Delta f_2^0 + d'_{13} \Delta f_3^0, \\ \delta \dot{V}_n &= -2u_3 \delta V_e + g\alpha_e + d'_{21} \Delta f_1^0 + d'_{22} \Delta f_2^0 + d'_{23} \Delta f_3^0, \\ \dot{\alpha}_e &= -u_3 \frac{\Delta r_e}{a} - \frac{\delta V_n}{a} + u_3 \alpha_n - u_n \beta_3 - d'_{11} v_1^0 - d'_{12} v_2^0 - d'_{13} v_3^0, \\ \dot{\alpha}_n &= -u_3 \frac{\Delta r_n}{a} + \frac{\delta V_e}{a} - u_3 \alpha_e + u_e \beta_3 - d'_{21} v_1^0 - d'_{22} v_2^0 - d'_{23} v_3^0, \\ \dot{\beta}_3 &= u_n \frac{\Delta r_n}{a} + u_n \alpha_e - d'_{31} v_1^0 - d'_{32} v_2^0 - d'_{33} v_3^0. \end{aligned} \quad (1)$$

В вектор состояния системы входят:

$\Delta r_e, \Delta r_n$ — позиционные погрешности БИНС вдоль восточного и северного направлений;

$\delta V_e, \delta V_n$ — динамические погрешностей скорости вдоль восточного и северного направлений, совпадающие в наземных экспериментах с полными погрешностями скоростей [3, 5];

$\alpha_e, \alpha_n, \beta_3$ — погрешности построения вертикали по географическим осям и азимута соответственно.

Другие параметры системы (1):

u_e, u_n, u_3 — проекции угловой скорости Земли в географических осях, постоянные для стендового эксперимента на малоподвижном основании;

g — модуль силы тяжести;

a — экваториальный радиус Земли;

d'_{ij} — элементы матрицы ориентации приборного трехгранника

БИНС относительно географического;

Δf_i^0 — смещения нулей трактов акселерометров в приборных осях;

v_i^0 — дрейфы трактов ДУС в приборных осях.

В модель (1) заложен минимальный набор инструментальных погрешностей, включающий только смещения нулей акселерометров и дрейфы ДУС, поскольку другие инструментальные погрешности практически не влияют на погрешности БИНС по координатам и скоростям на малоподвижном основании. Кроме этого, в уравнениях учтено, что скорость относительно Земли в стендовых экспериментах и связанные с ней коэффициенты уравнений ошибок нулевые.

Простейшая модель смещений нулевых сигналов датчиков БИНС предполагает их постоянство, что описывается формирующими уравнениями

$$\Delta \dot{f}_i^0 = 0, \quad \dot{v}_i^0 = 0.$$

Очевидно, что для переменных дрейфов эта модель непригодна, поэтому в качестве формирующих уравнений для погрешностей ДУС была выбрана модель случайного процесса первого порядка

$$\dot{v}_i^0 = q_i, \quad (2)$$

где q_i — белый шум [4], интенсивность которого подлежит подбору.

Известно, что реализации возникающего здесь процесса типа интеграла от белого шума могут «уходить» от начального значения со временем, что наряду с простотой использования модели (2) в калмановской постановке задачи оценивания (см. ниже) и результатами последующего моделирования обосновывает ее использование.

Таким образом, модель погрешностей БИНС, используемая в статье, образована уравнениями (1), и (3)

$$\Delta \dot{f}_i^0 = 0, \quad \dot{v}_i^0 = q_i, \quad (3)$$

предполагающими стабильность смещений нулей акселерометров.

Модель замеров погрешностей БИНС

Как уже отмечалось, эталонной информацией служат постоянные координаты места проведения эксперимента и нулевая скорость. Таким образом, замеры равны разностям координат и скоростей, вычисляемых БИНС, и эталонных значений. Они имеют следующие выражения через компоненты вектора состояния системы (1):

$$\begin{aligned} z_e^{pos} &= \Delta r_e + r_1, & z_n^{pos} &= \Delta r_n + r_2, \\ z_e^{vel} &= \delta V_e + r_3, & z_e^{vel} &= \delta V_e + r_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь r_i — случайные погрешности, источником которых являются, например, возможные перемещения БИНС в процессе эксперимента. Величины r_i предполагаются малыми в сравнении с погрешностями БИНС.

Если установка БИНС во время эксперимента достаточно жесткая, настолько, что курс можно считать фиксированным с погрешностями, меньшими характерных уходов БИНС по гироскопическому курсу, то к этим замерам можно добавить прямой замер скорости изменения гироскопического курса, обусловленной преимущественно проекцией дрейфа на вертикальное направление.

$$z_\beta = \Delta \dot{\psi} - \Delta \dot{\lambda} \sin \varphi = \dot{\beta}_3 + r_5,$$

где $\Delta \psi$ — ошибка истинного курса,

$\Delta \lambda$ — погрешность долготы,

φ — широта места эксперимента,

r_5 — случайная погрешность измерения.

При ориентации одного из гироскопов, близкой к вертикали, этот дополнительный замер позволяет практически напрямую оценить дрейф данного гироскопа. Косвенная оценка азимутального дрейфа в условиях малоподвижного основания затруднена из-за сравнительно малого влияния азимутального дрейфа на погрешности координат и скоростей БИНС.

Устойчивость метода оценки погрешностей к движениям основания

Обсудим этот вопрос качественно, не прибегая к строгим доказательствам. Рассмотрим малое угловое движение БИНС во время эксперимента. Как видно из правых частей уравнений (1), инструментальные погрешности перепроектируются из приборного трехгранника в географический через элементы матрицы взаимной ориентации d'_{ij} .

Если угловые перемещения малы, то элементы d'_{ij} близки к постоянным. Пусть $\Delta\vartheta$ — характерная величина малых угловых перемещений, тогда погрешности перепроектирования смещений нулей и дрейфов будут иметь порядок

$$\Delta\vartheta\Delta f_i, \Delta\vartheta v_i \quad (5)$$

соответственно. Эти величины, очевидно, много меньше самих $\Delta f_i, v_i$, что и обосновывает нечувствительность выходных погрешностей БИНС к малым угловым перемещениям, а формулы (5) дают порядок ошибки перепроектирования, связанной с угловыми перемещениями БИНС.

Линейные перемещения БИНС приводят к возмущениям r_i замеров (4). Из (4) следует, что допустимые перемещения БИНС не должны приводить к возмущениям замеров, заметным на фоне погрешностей БИНС в процессе эксперимента. Например, если характерные погрешности БИНС составляют единицы м/с по скорости и километры за час по координатам, то перемещения порядка нескольких сантиметров с малыми скоростями вполне допустимы и практически не возмущают замеры.

Фильтр Калмана в постобработке эксперимента

При использовании фильтра Калмана в бортовых алгоритмах БИНС оценка вектора состояния системы уравнений ошибок практически всегда выполняется в реальном (прямом) времени. В задачах постобработки появляется возможность более полного использования зарегистрированной информации. Она достигается за счет обработки всего массива данных путем прогона фильтра в прямом и обратном времени и дальнейшей «склейки» решений в каждой точке массива [4]. Опишем эти процедуры.

Прежде всего заметим, что на практике всегда приходится иметь дело с дискретными динамическими системами и замерами, поэтому непрерывную систему уравнений (1), (3), имеющую вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + q, \\ x &= [\Delta r_e, \Delta r_n, \delta V_e, \delta V_n, \alpha_e, \alpha_n, \beta_3, \Delta f_1^0, \Delta f_2^0, \Delta f_3^0, \Delta f_1^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0]^T, \end{aligned} \quad (6)$$

необходимо переписать в дискретной форме

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + q_i, \quad (7)$$

где x_{i+1}, x_i — значения фазового вектора, отделяемые тактом обновления состояния системы τ .

Такая дискретная запись возможна за счет использования переходной матрицы непрерывной системы (6) за время такта τ , либо путем численного интегрирования (6) с этим тактом.

Будем считать, что замеры поступают с тем же тактом обновления вектора состояния дискретной модели (7).

Реализация дискретного фильтра Калмана в прямом времени хорошо описана в литературе, например, в книге [4]. Поэтому приведем лишь конечные формулы. Работа фильтра состоит из циклически выполняемых шагов коррекции и прогноза, на которых производятся следующие вычисления.

Шаг коррекции:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^+ &= \tilde{x}_i^- + K_i(z_i - H_i\tilde{x}_i^-), \\ K_i &= P_i^- H_i^T (H_i P_i^- H_i^T + R_i)^{-1}, \quad i = \overline{0, N}, \\ P_i^+ &= (E - K_i H_i) P_i^-. \end{aligned} \quad (8)$$

Шаг прогноза:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1}^- &= \Phi_i \tilde{x}_i^+, \quad i = \overline{0, N-1}, \\ P_{i+1}^- &= \Phi_i P_i^+ \Phi_i^T + Q_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь \tilde{x}_{i+1}^\pm — оценки фазового вектора на этапах коррекции (+) и прогноза (-), K_i — матричный коэффициент усиления, H_i — матрица замеров, P_i^\pm — ковариационные матрицы на этапах коррекции и прогноза, R_i — ковариационная матрица шумов замеров, Q_i — ковариационная матрица шумов системы.

Эти шаги выполняются по $i = \overline{0, N}$ с начальными условиями \tilde{x}_0^- и P_0^- . При правильно введенных начальных условиях ошибки БИНС в начальный момент нулевые, и поэтому обычно полагают $\tilde{x}_0^- = 0$. Остальные параметры фильтра (8), (9) выбираются исходя из априорной информации об интенсивностях шумов системы и замеров, и подстраиваются для обеспечения требуемых качеств переходных процессов и ошибок оценок. Для обеспечения устойчивой работы фильтра применяются специальные вычислительные приемы, описанные, например, в книге [4].

Реализация фильтра Калмана в обратном времени также описывается формулами (8), (9), только оценка производится в обратном порядке — начиная от последнего замера с номером N до первого с номером 0. Запишем эти формулы, отмечая оценки, полученные в обратном времени, индексом «b»:

$$\tilde{x}_{bi}^+ = \tilde{x}_{bi}^- + K_{bi}(z_{bi} - H_i\tilde{x}_{bi}^-), \quad (10)$$

$$K_{bi} = P_{bi}^- H_i^T (H_i P_{bi}^- H_i^T + R_i)^{-1}, \quad i = \overline{N, 0},$$

$$P_{bi}^+ = (E - K_{bi} H_i) P_{bi}^-.$$
(10)

Шаг прогноза:

$$\tilde{x}_{bi-1}^- = \Phi_i^{-1} \tilde{x}_{bi}^+, \quad i = \overline{N, 1},$$

$$P_{bi-1}^- = \Phi_i^{-1} P_{bi}^+ (\Phi_i^{-1})^T + Q_i.$$
(11)

Здесь учтено, что матрицы шумов и замеров не зависят от того, в прямом или в обратном времени работает фильтр, и то, что шагу в обратном времени соответствует обратная переходная матрица.

Начальными условиями для системы (10) и (11) обычно служат $\tilde{x}_{bN}^- = 0$ и $P_{bN}^- = \kappa E$, где κ — любое достаточно большое число, E — единичная матрица.

Процедуры (8)–(11) дают наборы оценок вектора состояния $\tilde{x}_0^\pm, \dots, \tilde{x}_N^\pm$, полученных в прямом времени, и $\tilde{x}_{b0}^\pm, \dots, \tilde{x}_{bN}^\pm$, полученных в обратном времени, для удобства перечисленных в прямой последовательности. Кроме этого фильтр предоставляет ковариационные матрицы ошибок оценок на любом шаге в прямом и обратном времени P_i^\pm, P_{bi}^\pm . Эта информация позволяет решить задачу «склейки» оценок.

Согласно [4], она сводится к следующему. На каждом шаге с номером i у нас имеется оценка \tilde{x}_i^+ , полученная обработкой замеров с номерами от 0 до i с дисперсионной матрицей ошибок оценки P_i^+ , и оценка \tilde{x}_{bi}^- , полученная обработкой замеров от N до $i + 1$ в обратном времени и спрогнозированная на такт с номером i с дисперсионной матрицей ошибок оценки P_{bi}^- .

Оценку \tilde{x}_i^+ будем трактовать как априорную информацию о значении вектора состояния. Замером будем считать прогнозное значение \tilde{x}_{bi}^- , т. е. $z_i = \tilde{x}_{bi}^- + r_i^-$, в котором шум замера имеет дисперсионную матрицу $M[r_i^- (r_i^-)^T] = P_{bi}^-$ и не коррелирован с величинами, оцененными в прямом времени. Оптимальная оценка \tilde{x}_i и апостериорная ковариационная матрица P_i в этом случае строятся по формулам, аналогичным шагу коррекции фильтра Калмана, в который подставлена матрица замера $H = E$ [4]:

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i^+ + \tilde{K}_i (\tilde{x}_{bi}^- - \tilde{x}_i^+),$$

$$\tilde{K}_i = P_i^+ (P_i^+ + P_{bi}^-)^{-1}, \quad i = \overline{0, N-1},$$

$$P_i = (E - \tilde{K}_i) P_i^+.$$

Полученная оценка \tilde{x}_i и представляет собой результат «склейки» оценок $\tilde{x}_i^+, \tilde{x}_{bi}^-$ в прямом и обратном времени.

Постановка задачи и результаты численного моделирования

Оцениваемость постоянных дрейфов фильтром Калмана давно является хорошо известным фактом. Поэтому сразу перейдем к вопросу оцениваемости переменных дрейфов. Для анализа оцениваемости использовалась следующая методика. Систематическая составляющая дрейфов в приборных осях задавалась в виде

$$v_1^0 = |-0,01 + 0,0000028 \cdot t|, \quad v_2^0 = -0,02, \quad v_3^0 = 0,03 \text{ } ^\circ/\text{час}.$$

При этом считалось, что $d'_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. приборные оси совпадают с географическими. Первый дрейф представляет собой кусочно-линейную непрерывную функцию, отражающую изменение дрейфа со скоростью $0,01^\circ/\text{час}$ на первом часовом интервале и $-0,01^\circ/\text{час}$ на оставшемся интервале времени. График этой функции представлен на рис. 1 (линия с изломом).

Кроме указанных регулярных составляющих, подлежащих оценке, на модельные дрейфы накладывались:

- модельные белые шумы;
- шумы, выделенные из записи сигналов лазерных гироскопов, снятые на жестком неподвижном основании.

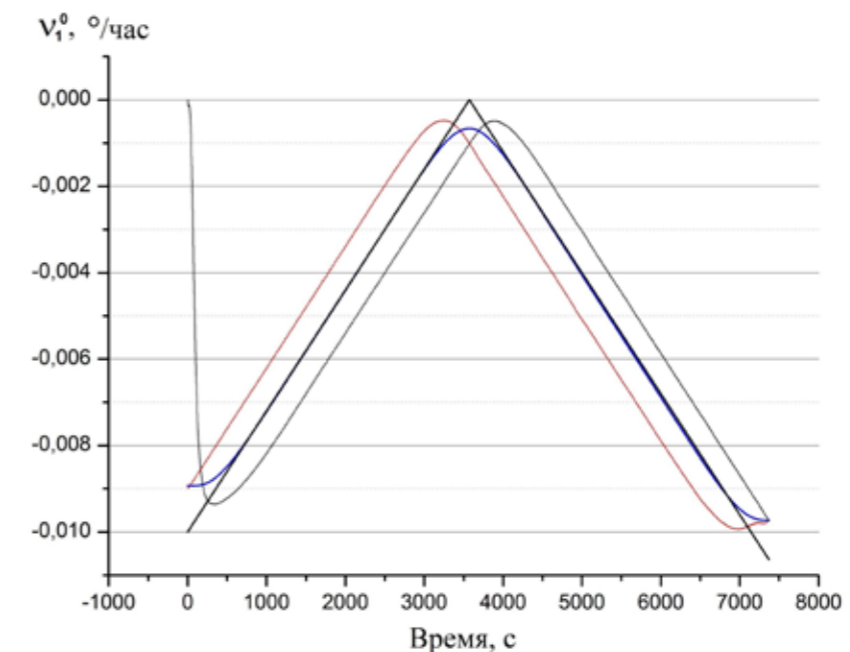


Рис. 1. Систематический дрейф (линия с изломом) и его оценки в прямом времени (черная кривая), в обратном времени (красная кривая) и результат «склейки» (синяя кривая)

Моделирование с использованием белых шумов показало, что использование «склейки» оценок, полученных в прямом и обратном времени, позволяет практически исключить методические ошибки (астатизм) оценок, наблюдающиеся только в прямом либо обратном проходах фильтра. При этом ошибки оценки существенны лишь на границах интервала и в окрестности особой точки, в которой происходит излом дрейфа. Соответствующие результаты показаны на рис. 1.

На рис. 2 изображены систематические составляющие дрейфа и модельный белый шум при осреднении на интервале секундной длительности.

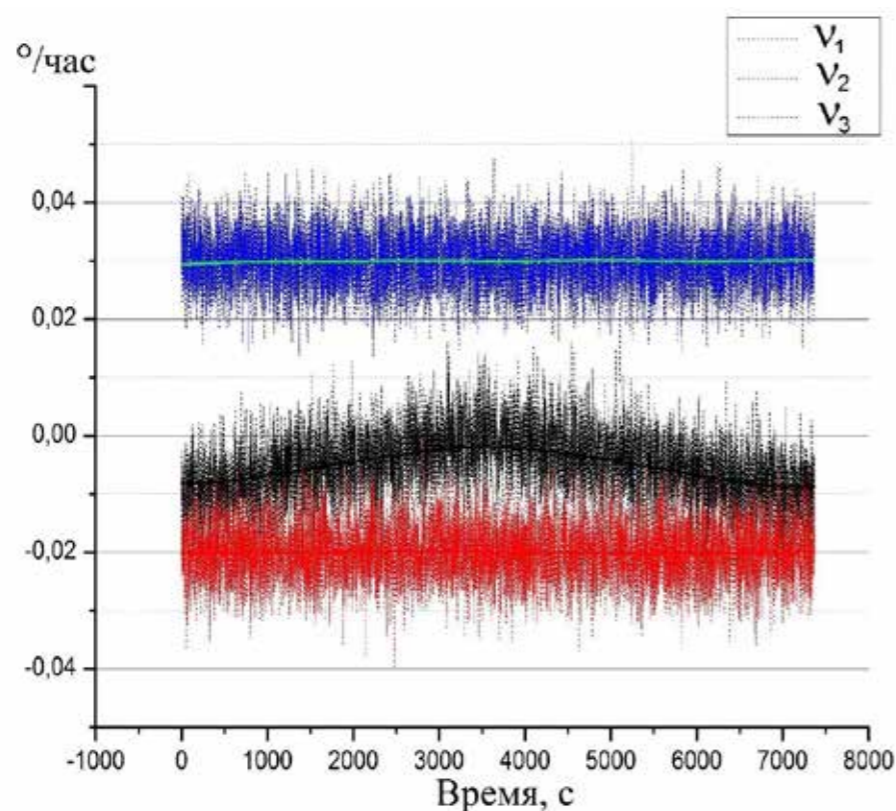


Рис. 2. Дрейфы, возмущенные модельным белым шумом. Из рисунка следует, что систематические дрейфы на неподвижном основании хорошо выделяются визуально либо путем интерполяции зарегистрированных данных

Более интересной оказывается задача выделения систематических составляющих дрейфа на фоне реальных шумов. Те же секундные осреднения дают шумы, на несколько порядков превышающие оцениваемые величины (рис. 3).

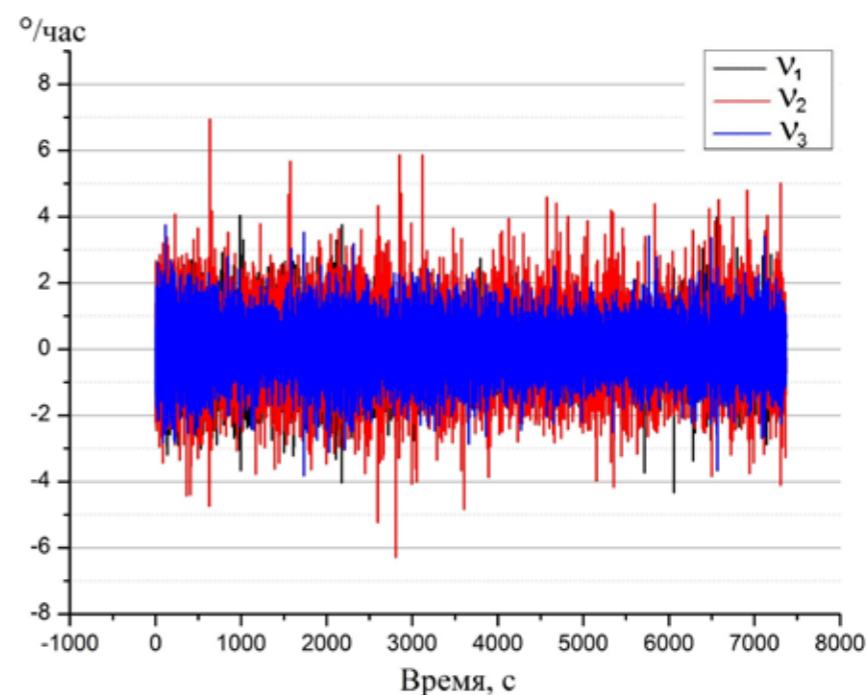


Рис. 3. Дрейфы, возмущенные реальным шумом: систематический дрейф на несколько порядков меньше шума

Однако оказывается, что реальные шумы осредняются существенно лучше, чем белый шум с аналогичным СКО на секундном интервале, и при некоторых настройках фильтр Калмана дает оценку переменного дрейфа, отличающуюся от заданной систематической составляющей не более, чем на тысячные градуса в час. График оценки представлен на рис. 4 (стр. 14).

Также следует обратить внимание на то, что разделение дрейфа на систематические и случайные составляющие во многом условно и едва ли может быть четко формализовано. Обычно к шумам относят изменения погрешностей датчиков, быстрые на фоне характерных времен эксперимента. А долгопериодические составляющие сигнала естественно считать систематическими. Именно этими систематическими составляющими реального сигнала, использованного при моделировании, объясняется отличие оценки дрейфа от заложенной «эталонной» зависимости дрейфа от времени, которая довольно точно оценивается.

По результатам исследования разработана программа для персонального компьютера, оценивающая дрейфы ДУС по записи координат и скоростей БИНС и успешно применяемая при анализе погрешностей траектор ДУС БИНС, разрабатываемых в ПАО «МИЭА».

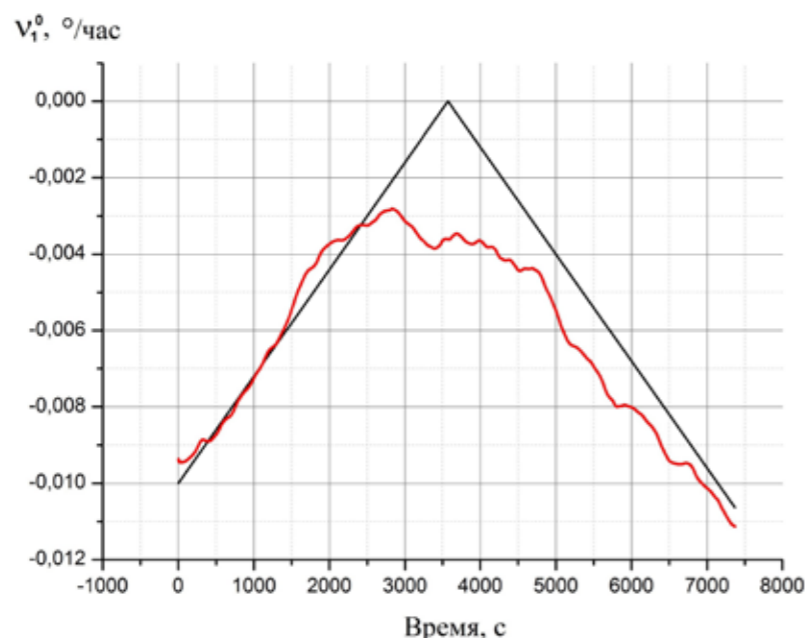


Рис. 4. Систематический дрейф (черная линия) и его оценка (красная линия)

Заключение

В статье рассмотрена задача оценки переменных дрейфов ДУС высокоточной БИНС по вторичным измерениям погрешностей координат и скоростей, вычисляемых БИНС на малоподвижном основании. Понятие малой подвижности определено, исходя из сравнения возмущений координат и скоростей, вычисляемых БИНС и обусловленных движением основания, с погрешностями БИНС, вызванными инструментальными погрешностями.

Путем математического моделирования установлено, что фильтр Калмана, работающий в прямом и обратном времени при постобработке данных, позволяет оценивать переменные дрейфы как при модельных погрешностях ДУС типа белого шума, так и при наличии реальных шумов ДУС, которые были зарегистрированы экспериментально на неподвижном основании. По результатам исследования разработана программа для персонального компьютера, позволяющая оценивать переменные и постоянные дрейфы в условиях наземного эксперимента, не требующего точного оборудования.

Литература

1. Lawrence C. Ng. On the Application of Allan Variance Method for Ring Laser Gyro Performance Characterization. Lawrence Livermore National Laboratory. 1993.
2. Измайлов Е. А., Кухтевич С. Е., Стафеев Д. В., Тихомиров В. В. Анализ составляющих дрейфа лазерного гироскопа. Гироскопия и навигация. 2015. № 2 (89).
3. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. — 136 с.
4. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. 2-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2012. — 172 с.
5. Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы инерциальных навигационных систем. Издательство Московского университета, 2020. — 164 с.

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ГИБРИДНОМУ КРИТЕРИЮ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ СМЕНЕ АКТИВНОГО УЧАСТКА МАРШРУТА

Михаил Борисович АЛЕСОВ, к. т. н.

Раменское приборостроительное конструкторское бюро

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru,

Ирина Михайловна АЛЕСОВА

ООО «Лаборатория корпоративного сопровождения»

E-mail: alesovaim@mail.ru

Рассматривается задача оптимального маневрирования летательного аппарата (ЛА) при переходе на следующую линию заданного пути (ЛЗП) маршрута. Задача заключается в построении оптимального по гибриднему критерию быстродействия и «расхода ресурсов» управления с учетом ограничения на величину управляющего воздействия, в качестве которого используется функция угла крена ЛА. На основании принципа максимума Понтрягина показано, что оптимальное управление кусочно-постоянно и имеет одну или две разнополярные ступени управления. Получены формулы расчета моментов времени и условий переключения ступеней управления для двух способов пролета поворотного пункта маршрута (ППМ): «рядом» и «над». В статье даны численные примеры синтеза оптимального управления при различных типах начальных условий.

Ключевые слова: *траекторное управление летательными аппаратами, оптимальное программное управление, гибридный критерий качества управления.*

TIME/FUEL OPTIMAL CONTROL OF AIRCRAFT MOTION DURING THE CHANGE OF ACTIVE COURSE LINE

Mikhail B. ALESOV, PhD

'Ramenskoye Instrument-Making Design Bureau' JSC

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru,

Irina M. ALESOVA

'Corporate Support Laboratory' LLC

E-mail: alesovaim@mail.ru

The article considers the problem of aircraft optimum maneuvering during transition to the next course line of the route. The task is to form hybrid time/fuel optimal control with respect to restriction on control magnitude, namely the aircraft bank angle. On the basis of Pontryagin's maximum principle it is shown that optimum control is piecewise constant and has one or two opposite polar control stages. Formulas of calculation of switching moments and switching conditions of control stages for two ways of flying over the waypoint such as "by" and "over" are received. The article gives numerical examples of optimum control synthesis under the different types of initial conditions.

Keywords: *aircraft flight path control, optimal program control, time/fuel criterion for optimal control.*

Введение

Одной из основных операций навигационного обеспечения ЛА на маршруте является переход с текущей на новую линию заданного пути (ЛЗП) во время смены активного участка при пролете поворотного пункта маршрута (ППМ).

При условии пролета ППМ «рядом» (by) заранее рассчитывается линейное упреждение разворота (ЛУР) до ППМ, по достижении которого выполняется поворот на новый активный участок маршрута. При условии пролета ППМ «над» (over) после пересечения новой ЛЗП выполняется переход на активный участок маршрута с помощью алгоритма компенсирования боковых отклонений от новой ЛЗП [1, 2]. В практике летной эксплуатации ЛА при ограничении времени и ресурсов выполнения операции актуальной является задача синтеза программного управления, обеспечивающего оптимальное значение соответствующего критерия качества при выходе на новую линию заданного пути.

Данная статья посвящена синтезу программного управления смены ЛЗП, оптимального по гибриднему критерию быстродействия и «расхода ресурсов», при ограничении величины управляющего воздействия (допустимого значения угла крена) и с учетом постоянного бокового ветра.

Общие вопросы синтеза программного управления динамическими системами изложены в работах Атанса Ж. и Фалба П. Л. [3], Афанасьева В. Н., Колмановского В. Б., Носова В. Р. [4]. Методы построения оптимального программного управления по критерию, включающему «расход ресурсов», рассмотрены в работах Бабаджанянца Л. К. и др. [5, 6, 7].

Модель движения и особенности управления

Движение ЛА в боковом направлении относительно новой ЛЗП описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений относительной переменных состояния Z и φ [1]:

$$\frac{dZ}{dt} = V \sin \varphi + U_z, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g}{V} \operatorname{tg} \gamma, \quad (1)$$

где Z — величина бокового отклонения от новой ЛЗП (положительное значение — вправо), м; t — время, с; φ — относительный угол курса (угол между направлением текущего курса ЛА и новой ЛЗП, положительное значение — вправо от ЛЗП), рад, $-\pi < \varphi \leq \pi$; V — воздушная скорость ЛА, м/с; U_z — поперечная составляющая скорости ветра, м/с; γ — угол крена ЛА, рад.

Заменой переменных

$$\tau = t \frac{g}{V}, \quad z = Z \frac{g}{V^2}, \quad u_z = \frac{U_z}{V} \quad (2)$$

модель движения (1) сводится к системе нормированных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = \sin \varphi + u_z, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \operatorname{tg} \gamma, \quad (3)$$

где z , φ — переменные состояния (нормированное боковое отклонение и относительный курс); u_z — параметр бокового ветра.

В дальнейшем все позиционные и кинематические параметры ЛА рассматриваются в горизонтальной прямоугольной системе координат (Z, X) , или нормированной системе (z, x) , относительно новой ЛЗП с началом в точке ППМ, где X и x — координаты, отсчитываемые вдоль направления новой ЛЗП.

Задача управления боковым движением ЛА вблизи новой ЛЗП формулируется следующим образом. При заданном начальном значении бокового отклонения и угла курса на предыдущей ЛЗП

$$z(\tau_1) = z_1, \quad \varphi(\tau_1) = \varphi_1 \quad (4)$$

следует перевести ЛА на новую ЛЗП, при этом переменные состояния

$$z(\tau_k) = 0, \quad \varphi(\tau_k) = -\delta, \quad (5)$$

где φ_1 — относительный курс при подходе к ППМ (курс ЛА на предыдущей ЛЗП); z_1 — боковое отклонение в начале поворота; τ_1 , τ_k — моменты начала и окончания управления (не заданы и подлежат расчету); δ — угол сноса на новой ЛЗП, равный $\delta = a \sin u_z = a \sin \frac{U_z}{V}$, рад.

При условии пролета ППМ «над» (over) процесс управления начинается в момент непосредственного пролета ППМ и начальные условия (4) уточняются как

$$z(\tau_1) = 0, \quad \varphi(\tau_1) = \varphi_1. \quad (6)$$

При условии пролета ППМ «рядом» (by) процесс управления начинается в момент достижения нормированного бокового упреждения разворота (БУР) и начальные условия (4) уточняются как:

$$z(\tau_1) = \text{БУР}; \quad \varphi(\tau_1) = \varphi_1, \quad (7)$$

причем величина БУР не задана и подлежит расчету в процессе синтеза управления.

В качестве функции управления (управляющего воздействия) используется угол крена $\gamma(\tau)$, на который накладывается ограничение

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma_0, \quad (8)$$

где γ_0 — максимально допустимое значение угла крена, рад, $\gamma_0 > 0$.

Оптимальное управление выбирается, исходя из требования максимального быстродействия (минимальной длительности процесса управления) и минимального «расхода» (суммарной длительности полета с креном), при этом требование к функционалу качества управления записывается как:

$$J(\gamma) = \int_{\tau_1}^{\tau_k} [\alpha + |\gamma(\tau)|] d\tau \rightarrow \min, \quad (9)$$

где α — коэффициент учета быстродействия, $\alpha > 0$.

При малых углах относительного курса поставленная задача может быть сведена к синтезу оптимального по указанному критерию управления системой, описываемой моделью двойного интегратора с постоянным внешним воздействием [3].

Из принципа Понтрягина Л. С. следует, что функция оптимального управления $\gamma(\tau)$ должна иметь кусочно-постоянный вид [7]:

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \operatorname{dez}_{\frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}} [\psi_2(\tau)] = \gamma_0 \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_2(\tau) > \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \\ 0, & \text{если } \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0} \leq \psi_2(\tau) \leq \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \\ -1, & \text{если } \psi_2(\tau) < -\frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\operatorname{dez}_\circ[\circ]$ — функция «мертвой» зоны, или функция нечувствительности; ψ_2 — сопряженная функция, являющаяся решением сопряженной системы объекта управления (3).

На этом основании можно указать следующие свойства функции управления.

1) Функция оптимального управления $\gamma(\tau)$ является кусочно-постоянной и содержит одну или две чередующиеся разнополярные (положительные и отрицательные) ступени управления с участком свободного прямолинейного движения, т. е. управление может переключаться (включаться и выключаться) не более четырех раз, с учетом первоначального включения и финального выключения управления.

2) Каждая ступень управления имеет «прямоугольную» форму с экстремальными значениями угла крена $\pm \gamma_0$.

3) Число неизвестных моментов переключения ступеней не более четырех и не менее двух.

Символически возможные типы управления можно записать как множество из четырех элементов: $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{+1, 0, -1\}$, $\{-1, 0, +1\}$, где обозначение «+1» соответствует положительной ступени управления, правому повороту с креном $+\gamma_0$; «-1» — отрицательной ступени управления, левому повороту с креном $-\gamma_0$; «0» — отсутствию управления, прямолинейному движению [3]. С учетом предварительного прямолинейного движения на предыдущей ЛЗП типы управления могут быть обозначены как $\{0, +1\}$, $\{0, -1\}$, $\{0, +1, 0, -1\}$, $\{0, -1, 0, +1\}$.

Выражение функции управления $\gamma(\tau)$ для двух ступеней с участком свободного движения можно записать как (верхние знаки соответствуют типу управления $\{0, +1, 0, -1\}$, нижние — типу $\{0, -1, 0, +1\}$) [5]

$$\gamma(\tau) = \pm \gamma_0 H(\tau) \mp \gamma_0 H(\tau - \tau_1) \mp \gamma_0 H(\tau - \tau_2) \pm \gamma_0 H(\tau - \tau_k), \quad (11)$$

где $H(\tau)$ — функция Хэвисайда; τ_1 — момент включения первой ступени управления; τ_2 — момент выключения первой ступени управления; τ_3 — момент включения второй ступени управления.

Другие типы управления могут быть описаны во временной области аналогично.

Синтез оптимального управления

Управление при пролете ППМ «рядом»

При условии пролета ППМ «рядом» (by) реализуется одноступенчатое управление выхода на новую ЛЗП. Изменение угла курса от начального значения φ_1 до требуемого угла $(-\delta)$ на новой ЛЗП получается интегрированием уравнения движения (3) при соответствующем постоянном управлении $\gamma(\tau) = \pm \gamma_0$ и имеет вид

$$\delta + \varphi_1 = \mp \operatorname{tg} \gamma_0 (\tau_k - \tau_1), \quad (12)$$

Изменение бокового отклонения от начального значения z_1 до нуля определяется выражением

$$z_1 = \pm \frac{\cos \delta - \cos \varphi_1}{\operatorname{tg} \gamma_0} \pm u_z \frac{\delta + \varphi_1}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \quad (13)$$

Зависимость (13) представляет собой фазовую линию начальных

условий одноступенчатого управления $\Gamma_{\pm} = \{(z, \varphi) | z_1(\varphi_1)\}$, содержащую точки фазовой плоскости, из которых можно перейти на новую ЛЗП с помощью одного поворота с максимальным креном $\gamma(\tau) = \pm\gamma_0$.

Таким образом, при условии пролета ППМ «рядом» вначале выполняется прямолинейное движение с курсом $\varphi = \varphi_1$, соответствующим предыдущей ЛЗП, до достижения величины бокового упреждения разворота (БУР), определяемой формулой (13) при $z_1 = \text{БУР}$. После чего производится поворот, длительность которого рассчитывается по формуле (12), до достижения нулевого отклонения и требуемого угла курса. Длительность прямолинейного движения по предыдущей ЛЗП до начала поворота рассчитывается по формуле

$$\tau_1 - \tau_0 = \frac{z_1 - z_0}{\sin \varphi_1 + u_z}, \quad (14)$$

где τ_0 — текущий момент времени подхода к новой ЛЗП, когда ЛА выполняет прямолинейное движение по предыдущей ЛЗП; z_0 — текущее боковое отклонение для точки подхода на предыдущей ЛЗП; $\varphi_0 = \varphi_1$.

На фазовой плоскости (z, φ) выделяются 2 области подхода к ЛП Ω_{0+} , Ω_{0-} , определяющих тип управления $\{0, +1\}$, $\{0, -1\}$, соответственно и ограниченных линиями включения управления Γ_+ , Γ_- формулы (13). На рисунке 1 (стр. 23) показаны эти области, линии включения управления и примеры схем изменения фазовых переменных при выполнении пролета ППМ «рядом». Кроме того, имеются области фазовой плоскости, из которых новая ЛЗП недостижима с помощью прямолинейного движения, они обозначены как $\Omega_{нд}$.

В таблице 1 даны определения областей управляемости Ω_{0+} , Ω_{0-} при подходе к новой ЛЗП, а также условия включения и выключения ступени управления.

Таблица 1. Области управляемости для новой ЛЗП и условия переключения управления

Обозначение	Тип управления	Определение $\{(z_0, \varphi_0)\}$	Условия включения / выключения ступени
Ω_{0+}	Одна положительная ступень $\{0, +1\}$	$-\pi \leq \varphi_0 \leq -\delta,$ $z_0 \geq z_+(\varphi_0)$	Включение при $z = z_+(\varphi)$, формула (13). Выключение при $z = 0, \varphi = -\delta$. Здесь z, φ — текущие переменные состояния
Ω_{0-}	Одна отрицательная ступень $\{0, -1\}$	$-\delta \leq \varphi_0 \leq \pi,$ $z_0 \leq z_-(\varphi_0)$	Включение при $z = z_-(\varphi)$, формула (13). Выключение при $z = 0, \varphi = -\delta$

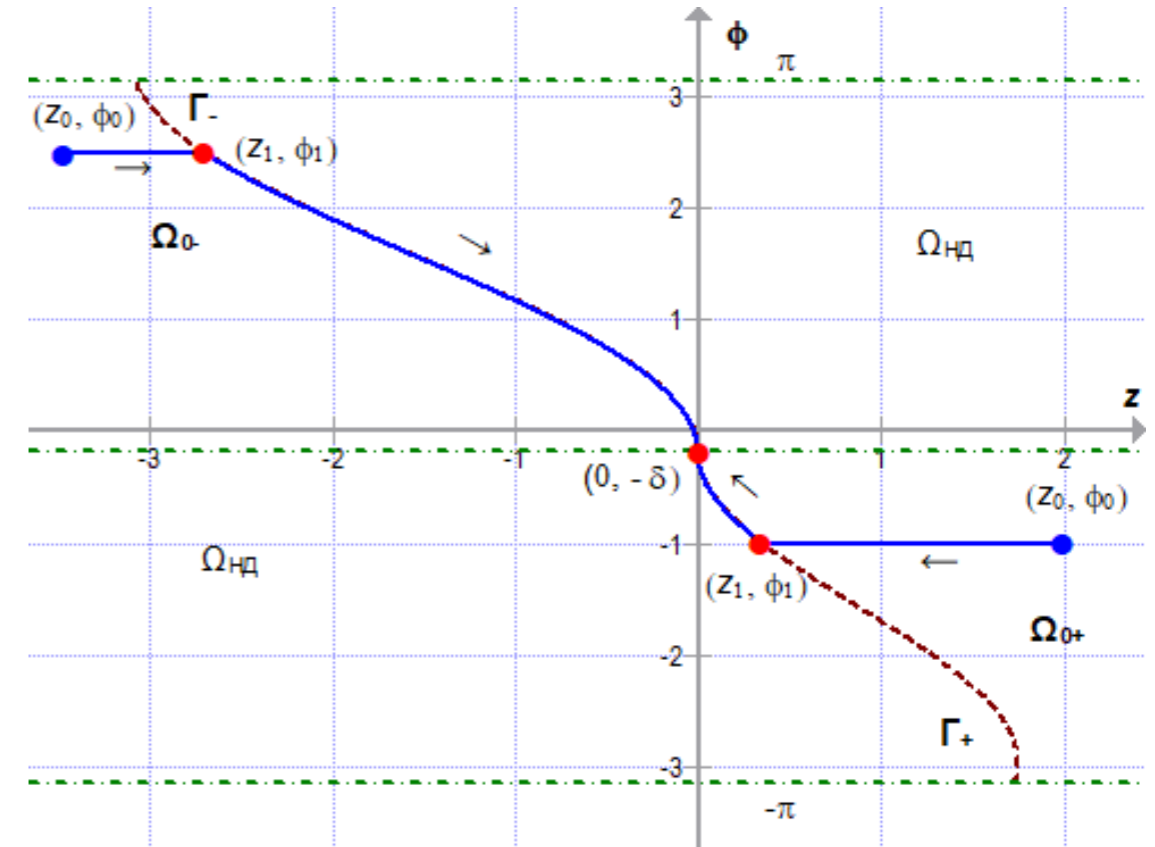


Рис. 1. Области типов управления и схемы движения на фазовой плоскости при пролете ППМ «рядом»

Управление при пролете ППМ «над»

При условии пролета ППМ «над» (over) выполняется двухступенчатая схема управления выхода на новую ЛЗП. В момент нулевого бокового отклонения от новой ЛЗП при пролете над активным ППМ (z_1, φ_1) осуществляется первый поворот (первая ступень управления) до момента выключения ступени управления (z_2, φ_2) . Далее выполняется прямолинейное движение без управления до момента включения управления противоположного знака, определяемого линией $\Gamma_{\pm} = \{(z, \varphi) | z_3(\varphi_3)\}$ уравнения (13). Затем выполняется финальный поворот до достижения нулевого отклонения и требуемого угла курса.

Изменение бокового отклонения на участке свободного движения между двумя ступенями управления (при $\varphi_2 = \varphi_3$):

$$z_3 - z_2 = \sin \varphi_2 (\tau_3 - \tau_2) + u_z (\tau_3 - \tau_2). \quad (15)$$

Для расчета времени свободного движения $(\tau_3 - \tau_2)$ при управлении $\{\pm 1, 0, \mp 1\}$ воспользуемся соотношениями:

$$H(\tau_2) = \psi_1 \sin \varphi_2 + \psi_1 u_z - \alpha = 0, \quad (16)$$

$$\psi_2(\tau_3) - \psi_2(\tau_2) = \mp \frac{2\gamma_0}{\text{tg}\gamma_0} = -\psi_1 \cos \varphi_2 (\tau_3 - \tau_2),$$

где H — гамильтониан задачи (3), (9); ψ_1 — постоянная сопряженная функция системы (3).

В результате изменение бокового отклонения на участке свободного прямолинейного движения равно

$$z_3 - z_2 = \pm \frac{2\gamma_0}{\text{tg}\gamma_0} \frac{(\sin \varphi_2 + u_z)^2}{\alpha \cos \varphi_2}. \quad (17)$$

Множество точек выключения первой ступени образует линию на фазовой плоскости $\Gamma_{\pm 0} = \{(z, \varphi) | z_2(\varphi_2)\}$, которая определяется следующей формулой:

$$z_2 = \mp \frac{\cos \delta - \cos \varphi_2}{\text{tg}\gamma_0} \mp u_z \frac{\delta + \varphi_2}{\text{tg}\gamma_0} \mp \frac{2\gamma_0}{\text{tg}\gamma_0} \frac{(\sin \varphi_2 + u_z)^2}{\alpha \cos \varphi_2}. \quad (18)$$

Для расчета характерных точек траектории на фазовой плоскости необходимо определить угол курса при выключении первой ступени φ_2 из уравнения

$$2 \cos \varphi_2 - 2 u_z \varphi_2 - 2\gamma_0 \frac{(\sin \varphi_2 + u_z)^2}{\alpha \cos \varphi_2} = \cos \varphi_1 + \cos \delta + u_z (\delta - \varphi_1). \quad (19)$$

При решении этого нелинейного уравнения в качестве начального значения φ_2 можно взять значение корня, полученное из формулы (19) в конечном виде при отсутствии ветра, при этом следует принять во внимание допустимый интервал корня уравнения: $\left(-\frac{\pi}{2}, -\delta\right)$ или $\left(-\delta, \frac{\pi}{2}\right)$ в зависимости от типа первой ступени управления: $\{+1\}$ или $\{-1\}$. Соответствующее боковое отклонение z_2 в момент выключения первой ступени рассчитывается по формуле (18), а боковое отклонение z_3 в момент включения второй ступени можно рассчитать по формуле (17) или (13) при $\varphi_1 = \varphi_2$.

Моменты времени переключения ступеней при управлении типа $\{\pm 1, 0, \mp 1\}$ рассчитываются по формулам:

$$\tau_2 - \tau_1 = \pm \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\text{tg}\gamma_0}, \quad \tau_3 - \tau_2 = \pm \frac{2\gamma_0}{\text{tg}\gamma_0} \frac{\sin \varphi_2 + u_z}{\alpha \cos \varphi_2}, \quad \tau_k - \tau_3 = \pm \frac{\delta + \varphi_2}{\text{tg}\gamma_0}. \quad (20)$$

Длительность прямолинейного движения подхода до начала первого поворота рассчитывается по формуле (14) при $z_1 = 0$.

Таким образом, на фазовой плоскости (z, φ) выделяются 2 области управляемости при подходе к ЛЗП Ω_{0+0-} , Ω_{0-0+} . На рисунке 2 показаны эти области, линии выключения первой ступени Γ_{+0} , Γ_{-0} и включения финальной ступени управления Γ_+ , Γ_- , также схемы изменения фазовых переменных при выполнении пролета ППМ «над».

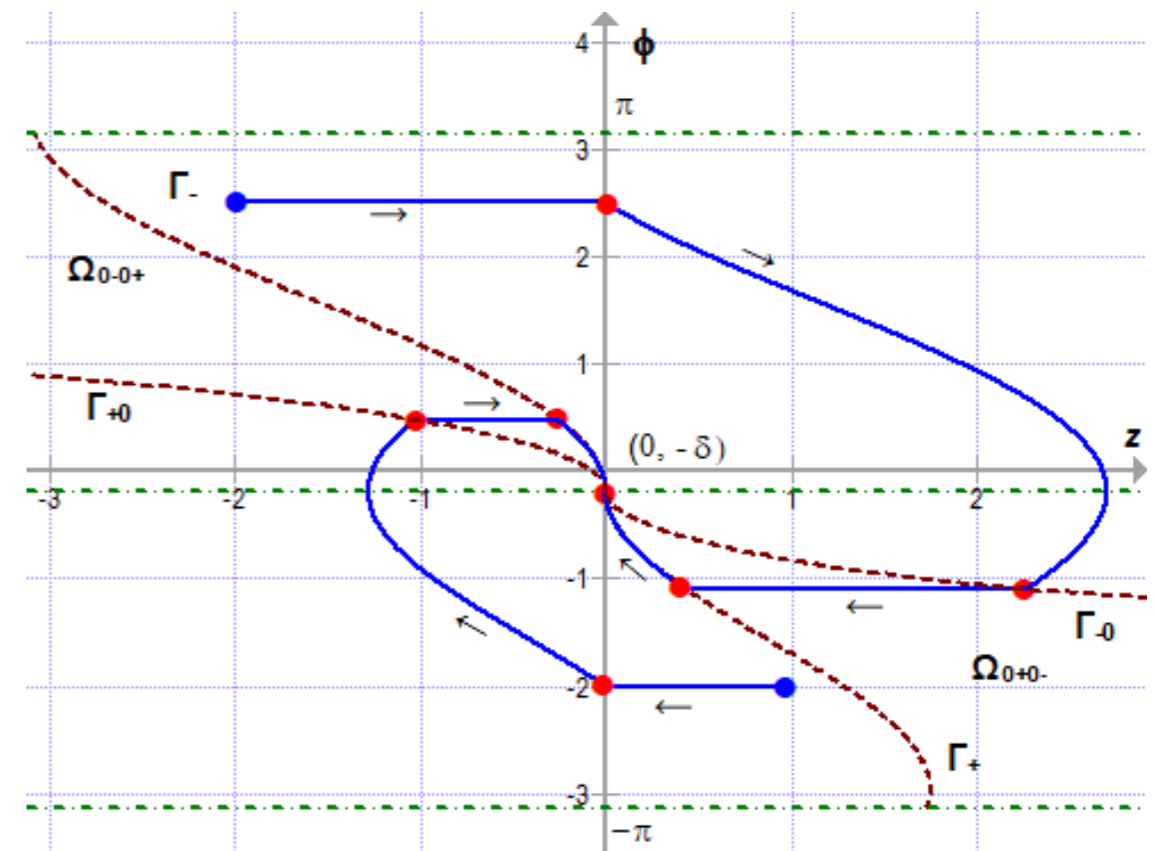


Рис. 2. Области типов управления и схемы движения на фазовой плоскости при пролете ППМ «над»

В таблице 2 даны определения областей управляемости Ω_{0+0-} , Ω_{0-0+} при подходе к новой ЛЗП и условия переключения ступеней управления. Согласно крайним условиям задачи (6), включение первой ступени выполняется при $z = 0$, выключение второй ступени выполняется при $z = 0$, $\varphi = -\delta$.

Таблица 2. Области управляемости для новой ЛЗП и условия переключения управления

Обозначение	Тип управления	Определение $\{(\varphi_0, z_0)\}$	Условия включения / выключения ступени
Ω_{0+0-}	Положительная и отрицательная ступени $\{0, +1, 0, -1\}$	$-\pi < \varphi_0 < -\delta,$ $z_0 \geq 0$	Выключение первой ступени при $z = z_2(\varphi_2)$, формула (18). Включение второй ступени при $z = z_3(\varphi_3)$, формула (13)
Ω_{0-0+}	Отрицательная и положительная ступени $\{0, -1, 0, +1\}$	$-\delta < \varphi_0 \leq \pi,$ $z_0 \leq 0$	Выключение первой ступени при $z = z_3(\varphi_3)$, формула (18). Включение второй ступени при $z = z_3(\varphi_3)$, формула (13)

Примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры синтеза управления для смены ЛЗП при следующих параметрах модели движения: воздушная скорость летательного аппарата $V = 400$ км/час; поперечная составляющая скорости ветра $U_z = 20$ м/с; максимально допустимое значение крена γ_0 принято равным 40° ; угол сноса на новой ЛЗП δ равен $10,4^\circ$; коэффициент учета быстродействия $\alpha = 1$. Нормированные безразмерные значения переменных выражаются как

$$\tau = 0,074 t; \quad z = 0,667 Z; \quad u_z = 0,18,$$

где переменная бокового отклонения Z измеряется в километрах, а время t — в секундах.

На фазовой плоскости (z, φ) рисунков 1 и 2 показаны линии переключения ступеней управления и области начальных условий управления именно для указанных параметров.

Численные примеры при различных условиях пролета ППМ и типах управления представлены в таблице 3 (стр. 27). Моделирование начинается при заданных значениях (z_0, φ_0) точки подхода к новой ЛЗП, при этом отсчет времени выполняется именно от этого момента $\tau_0 = 0$. На фазовой плоскости (z, φ) рисунка 1 показано движение ЛА, соответствующее примерам 1 и 2 таблицы 3, а на рисунке 2 представлены фазовые траектории примеров 3 и 4.

На рисунке 3 (стр. 28) показаны траектории движения ЛА на горизонтальной плоскости в координатах (Z, X) для примеров 1, 2 при пролете ППМ «рядом», числовые значения координат даны в километрах.

Движение в направлении новой ЛЗП описывается уравнением

$$\frac{dX}{dt} = V \cos \varphi + U_x,$$

где U_x — продольная составляющая скорости ветра, в примерах полагается нулевой.

На рисунках 4 (стр. 28) и 5 (стр. 29) показаны траектории движения ЛА на горизонтальной плоскости в координатах (Z, X) для примеров 3, 4 при пролете ППМ «над».

Таблица 3. Примеры синтеза управления при смене ЛЗП

Пример	Начальные условия	Тип управления	Характерные точки
<i>Условие пролета ППМ «рядом»</i>			
1	$z_0 = 2;$ $\varphi_0 = -1;$	$\{0, +1\},$ один правый поворот	Точка включения первой ступени: $\varphi_1 = -1; z_1 = 0,35; \tau_1 = 2,49.$ Длительность поворота: $\tau_k - \tau_1 = 0,98$
2	$z_0 = -3,5;$ $\varphi_0 = 2,5$	$\{0, -1\},$ один левый поворот	Точка включения первой ступени: $\varphi_1 = 2,5; z_1 = -2,70; \tau_1 = 1,02.$ Длительность поворота: $\tau_k - \tau_1 = 3,20$
<i>Условие пролета ППМ «над»</i>			
3	$z_0 = 1;$ $\varphi_0 = -2$	$\{0, +1, 0, -1\},$ правый поворот, прямолинейное движение и затем левый поворот	Точка включения первой ступени: $\varphi_1 = -2; z_1 = 0, \tau_1 = 1,37.$ Точка окончания первого поворота: $\varphi_2 = 0,48; z_2 = -1,02; \tau_2 = 4,32.$ Точка начала второго поворота: $\varphi_3 = 0,48; z_3 = -0,26; \tau_3 = 5,52.$ Длительность второго поворота: $\tau_k - \tau_3 = 0,79$
4	$z_0 = -2;$ $\varphi_0 = 2,5$	$\{0, -1, 0, +1\},$ левый поворот, прямолинейное движение и затем правый поворот	Точка включения первой ступени: $\varphi_1 = 2,5; z_1 = 0; \tau_1 = 2,57.$ Точка окончания первого поворота: $\varphi_2 = 1,10; z_2 = 2,27; \tau_2 = 6,86.$ Точка начала второго поворота: $\varphi_3 = 1,10; z_3 = 0,43; \tau_3 = 9,45.$ Длительность второго поворота: $\tau_k - \tau_3 = 1,09$

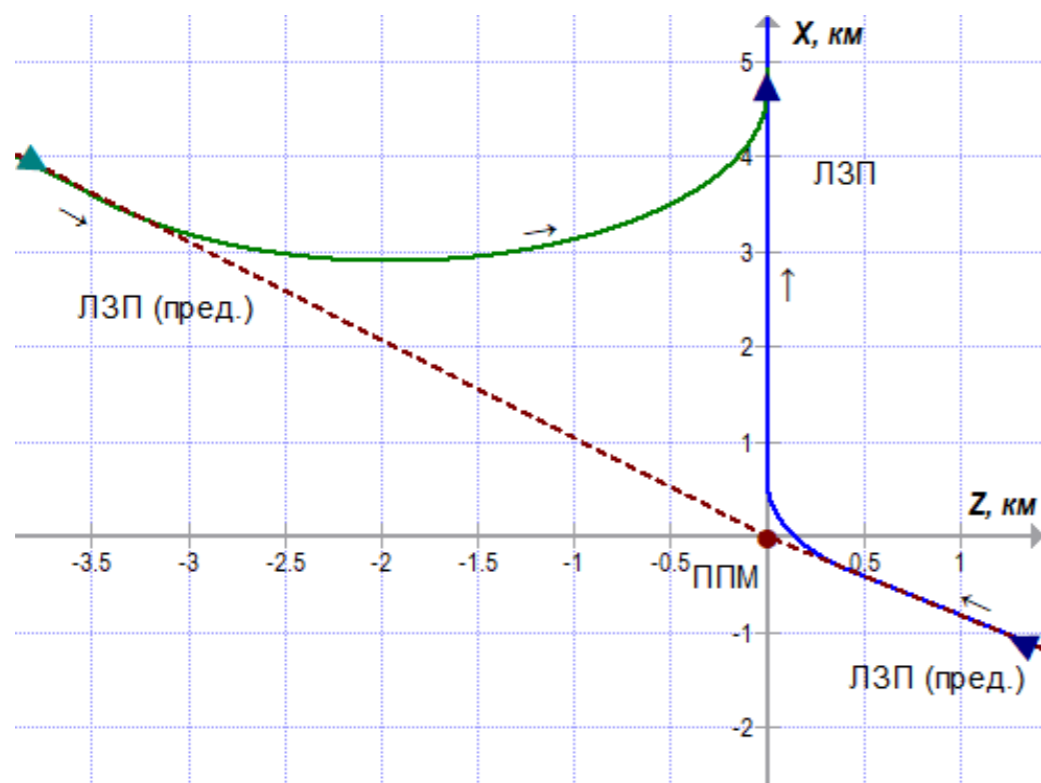


Рис. 3. Движение по горизонтальной плоскости при пролете ППМ «рядом»

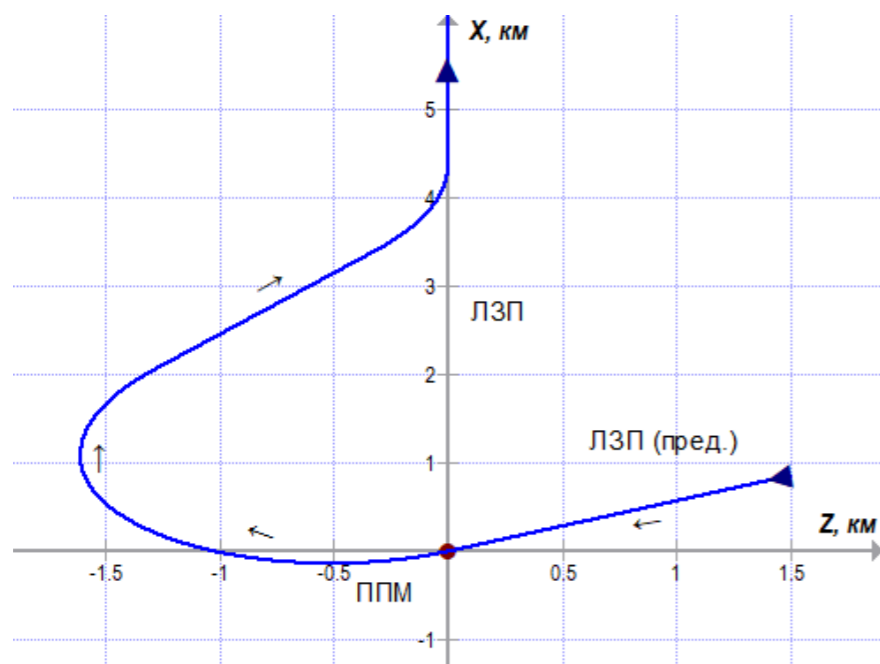


Рис. 4. Движение по горизонтальной плоскости при пролете ППМ «над» (подход к ЛЗП справа)

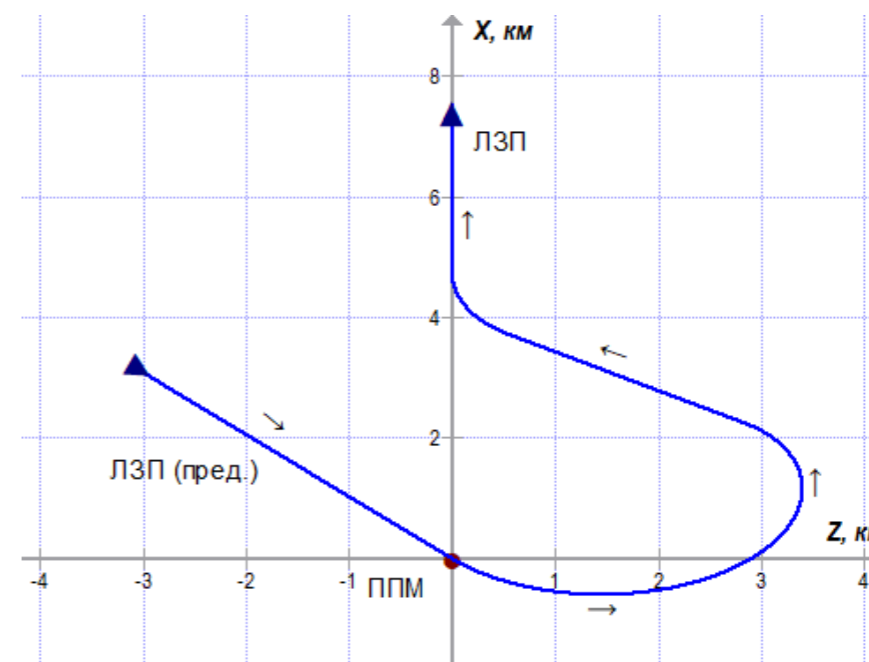


Рис. 5. Движение по горизонтальной плоскости при пролете ППМ «над» (подход к ЛЗП слева)

Следует отметить свойство асимметричности задачи, вызванное нечетностью модели движения (1), (3) относительно фазовых переменных, функции управления и составляющей скорости ветра. Это позволяет выделить в качестве базовой задачу синтеза управления при одностороннем подходе к новой ЛЗП, например, справа (с положительным начальным боковым отклонением), а задачу подхода слева свести к базовой, поменяв знаки указанных параметров модели на противоположные.

Для программной реализации синтезированного управления можно применить два способа:

1) используя текущее состояние фазовых переменных, переключать дискретные значения функции управления при достижении линий переключения фазовой плоскости («геометрический» способ) согласно условиям, указанным в таблицах 1 и 2;

2) при подходе к ППМ рассчитать моменты переключения управления по формулам (14), (12), (20) и реализовывать циклограмму управления по текущему времени согласно формуле (11).

Следует отметить определенную робастность (грубость) первого способа, обеспечивающего выполнение маневра даже при ошибках в начальных значениях переменных состояния (угла курса и бокового отклонения).

Заключение

Представленный метод синтеза управления обеспечивает оптимальную с точки зрения заданного критерия смену ЛЗП на маршруте с помощью одной и двух ступеней управления. При расчете параметров операции маневрировании предполагается постоянство воздушной скорости, что является обычным допущением выполнения и планирования маршрута. Однако при непосредственном повороте воздушная скорость ЛА уменьшается, этот аспект может быть учтен в рамках изложенного метода.

Рассмотренная методика может служить основой для решения многокритериальных задач оптимального управления движением ЛА, в частности, при использовании других критериев качества управления [8].

Предложенный алгоритм практически может быть использован в составе многометодных комплексов пилотажно-навигационного обеспечения летательных аппаратов и, в частности, при разработке планово-пилотажных приборов, обеспечивающих маневрирование ЛА на маршруте, а также при выполнении штурманских навигационных расчетов на этапе планирования полета.

Литература

1. Козарук В.В., Ребо Я.Ю. Навигационные эргатические комплексы самолетов. М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.
2. Баранов В.Н., Зо Лин У. Решение задачи оптимального управления пространственным движением легкого самолета на основе принципа максимума Понтрягина // Электронный журнал «Труды МАИ», вып. 46, 2011.
3. Атанс Ж., Фалб П. Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
4. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
5. Бабаджанянц Л.К., Потоцкая И.Ю. Управление по критерию расхода в механических системах. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2003. – 137 с.
6. Alesova I. M., Babadzanjan L. K., Pototskaya I. Yu., Pupyshva Yu. Yu., Saakyan A. T. Fuel/Time optimal control of satellite oscillations // 2016 International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2016), 2016. DOI: 10.1063/1.4992353.
7. Алесов М.Б., Алесова И.М. Оптимальное управление боковым траекторным движением летательного аппарата // Перспективы науки, №8, 2020. – С. 10–14.
8. Алесов М.Б. Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении длительности маневрирования // Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики, №10, 2020. – С. 29–34.

УДК 629.7.058

ФИЛЬТРАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ВЕТРА В ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИБОРНОЙ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ТЯЖЕЛОГО САМОЛЕТА

*Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, д. т. н., профессор,
Михаил Сергеевич БАЛЯКИН,
Алексей Алексеевич КУЗИН,
Максим Валерьевич ЛОБАЧЕВ*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru

Рассмотрен способ комплексной фильтрации турбулентных возмущений атмосферы при использовании измеренной приборной скорости полета для обеспечения функционирования режима автоматической стабилизации скорости. В основе построения фильтра лежит метод аэроинерциального определения скорости полета аналогично методу формирования бароинерциального фильтра высоты. Особенностью фильтра является прямое использование сигнала путевой скорости полета, определяемой бортовой инерциальной системой. При синтезе применен способ генерации случайного турбулентного ветра с помощью формирующего фильтра модифицированной модели Драйдена. Результаты сглаживания фильтром случайной составляющей приборной скорости полета и снижения амплитуды перемещения рычага управления двигателями иллюстрированы графическим материалом.

Ключевые слова: *фильтрация, скорость полета, аэроинерциальный метод, турбулентный ветер, модель Драйдена.*

TURBULENT WIND FILTERING IN THE TASK OF HEAVY AIRCRAFT INDICATED AIR SPEED AUTOMATIC HOLD

*Vladimir E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor,
Mikhail S. Balyakin,
Alexey A. Kuzin,
Maksim V. Lobachev*
"Moscow Institute of Electromechanics and Automatics" PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru

The method of turbulent atmospheric disturbances complex filtering using the measured indicated air speed to ensure the speed automatic hold mode is considered. Filter realization is based on the aero-inertial speed determination method that is similar to baro-inertial altitude filter forming method. Filter specificity is the direct use of the ground speed signal with determining the ground speed by airborne inertial system. The filter design uses the random turbulent wind generation by means of a modified Dryden model shaping filter. The results of smoothing the indicated air speed random component by the filter and thrust lever movement reduction are illustrated graphically.

Keywords: *filtering, flight speed, aero-inertial method, turbulent wind, Dryden model.*

На динамические характеристики автоматического управления самолетов оказывают воздействие ветровые возмущения, к которым относится турбулентное движение воздуха [1], влияющее на измерение аэрометрических параметров полета. Кратковременная (высокочастотная) разность давлений турбулентного воздуха на смежных участках полета в виде набегающего воздушного потока вносит шумовую составляющую в измерения системой воздушных сигналов приборной скорости полета. В тоже время возмущения достаточно большого изменения плотности воздуха (низкочастотная составляющая) оказывают значительное влияние на изменение скоростного напора, что требует парирующей реакции от системы автоматического управления (САУ) и автомата тяги (АТ) на поддержание приборной скорости полета. Прямое использование сигнала измеренной приборной скорости вызывает резкие переключения рычага управления двигателем (РУД), что снижает ресурс силовой установки.

Для исключения неоправданно высокой интенсивности переключений РУД в режиме автоматической стабилизации скорости, не улучшающих точность стабилизации скорости, в системы автоматического управления тягой на гражданских самолетах была введена обработка сигнала $V_{пр}$ фильтром, разделяющим частоты турбулентных приращений приборной скорости. Такой фильтр был создан на основе идеи комплексирования барометрической и инерциальной информации в так называемом бароинерциальном фильтре [2]. По аналогичному с бароинерциальным фильтром способу построения был реализован фильтр приборной скорости [3]. В основе этого способа лежит комплексная линейная фильтрация разнородных наблюдений параметров движения (аэрометрических и инерциальных), которая организована в соответствии с принципами комплексной обработки информации [4].

Структурная схема комплексного фильтра приборной скорости полета в изображении Лапласа показана на рис. 1 (стр. 44).

Фильтр имеет два входа: измеренный сигнал приборной скорости $V_{пр}^* = V_{пр} + U_{турб}$ с учетом турбулентного ветра $U_{турб}$ и сигнал производной истинной скорости полета $pV(p) = L[\dot{V}(t)]$, который формируется согласно известному уравнению движения:

$$\dot{V} = g(n_x \cos \alpha - n_y \sin \alpha - \sin \Theta). \quad (1)$$

Информация о перегрузках и угле атаки поступает от соответствующих датчиков и требует дополнительной обработки шумов и взаимной синхронизации.

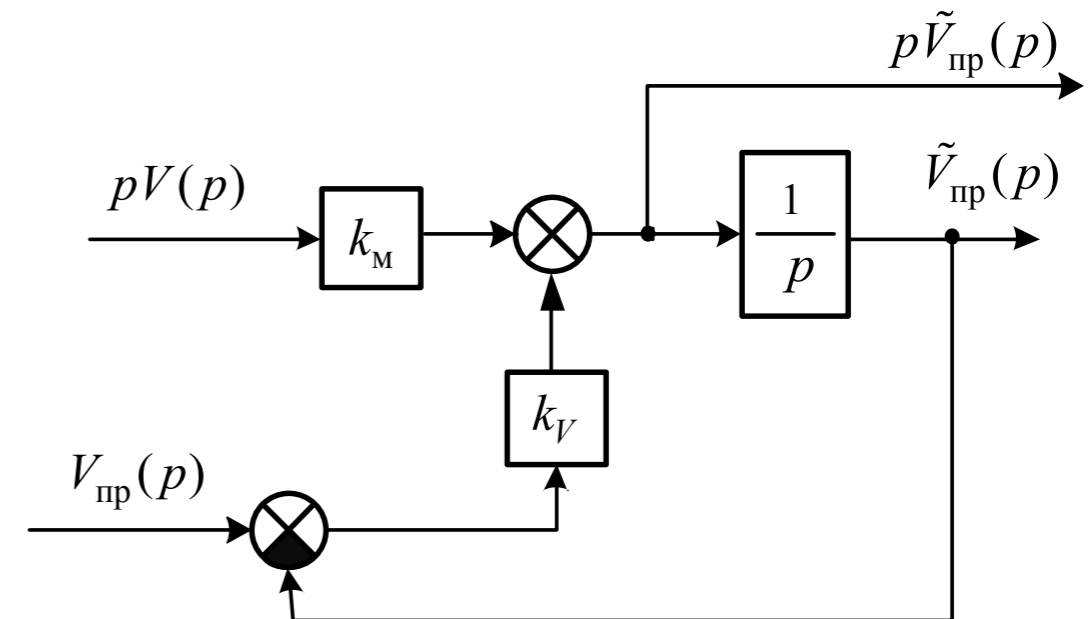


Рис. 1. Комплексный фильтр приборной скорости

Выходными сигналами фильтра являются фильтрованный сигнал приборной скорости $\tilde{V}_{пр}$ и сигнал ее производной $\dot{\tilde{V}}_{пр}$, аналитически точно согласованные между собой в силу их искусственного формирования. Эти сигналы в дальнейшем используются в контуре управления скоростью полета с использованием автомата тяги. Коэффициент k_V является собственной частотой фильтра и должен быть соизмерим с частотой турбулентных возмущений.

Коэффициент масштабирования k_M или перевода путевой скорости в размерность приборной скорости пропорционален следующему известному [5] соотношению индикаторной V_i и истинной воздушной скорости V полета

$$\frac{V_i}{V} = \sqrt{\frac{\rho_H}{\rho_0}}, \quad (2)$$

где ρ_0 плотность воздуха у Земли, ρ_H плотность воздуха на высоте полета. Для дозвуковых самолетов при полете до высот 10000 м на крейсерских скоростях поправка на сжимаемость составляет менее 4% от приборной скорости, поэтому можно считать, что $V_i \simeq V_{пр}$. При согласованных истинной $V_{ист}^{CBC}$ и приборной $V_{пр}$ скоростях полета, измеряемых аэрометрически системой воздушных сигналов (СВС), их соотношение, пререводящее истинную воздушную скорость в приборную, с высокой точностью соответствует соотношению (2), а именно:

$$k_M = \frac{V_{\text{пр}}}{V_{\text{СВС}}^{\text{ист}}} \approx \frac{V_i}{V},$$

что позволяет не рассчитывать плотность воздуха на текущей высоте полета.

Рассмотрим работу фильтра в установившемся движении при постоянной скорости полета без замыкания сигнала в замкнутый контур стабилизации скорости полета, то есть в варианте решения только информационной задачи. В этом случае справедливо анализировать прохождение сигнала турбулентного ветра через фильтр с передаточной функцией

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1}{T_{\Phi}p + 1}, \quad T_{\Phi} = \frac{1}{k_V}. \quad (3)$$

Для анализа возможностей фильтрации турбулентных ветровых возмущений будем использовать уточненную модель Драйдена продольного турбулентного ветра [6], представляющую собой формирующий фильтр дифференцируемого турбулентного ветра

$$W_u(p) = \frac{1}{p + \mu} \cdot \frac{1}{T_{\lambda}p + 1}, \quad \mu = \frac{V}{L}, \quad T_{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad (4)$$

где V — продольная скорость полета, L — масштаб турбулентности, T_{λ} и λ — соответственно постоянная времени и собственная частота введенного апериодического звена, при этом $\lambda > \mu$. Частота апериодического звена в рассматриваемом случае определялась как $\lambda = 5\mu$.

Выходным сигналом формирующего фильтра (4) является случайный процесс изменения турбулентного ветра с задаваемой дисперсией D_u^2 , а входным сигналом — белый шум ξ_u с интенсивностью

$$S_{\xi_u} = D_u^2 \cdot \frac{2\mu \cdot (\lambda + \mu)}{\lambda}. \quad (5)$$

Тогда процесс генерации фильтром (4) и сглаживания фильтром (3) продольного турбулентного ветра описывается в операторной форме выражением

$$u_{\Phi}(p) = W_{u_{\Phi}} \cdot \xi(p), \quad W_{u_{\Phi}} = W_{\Phi} W_u. \quad (6)$$

Передаточная функция расширенного формирующего фильтра (6) с учетом (3) и (4) равна

$$W_{u_{\Phi}} = \frac{1}{(p + \mu)(T_{\lambda}p + 1)(T_{\Phi}p + 1)}, \quad T_{\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \quad (7)$$

Система (7) имеет следующий характеристический полином

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad (8)$$

$$a_3 = T_{\Phi} T_{\lambda}, \quad a_2 = T_{\Phi} + T_{\lambda} + \mu T_{\Phi} T_{\lambda}, \quad a_1 = \mu(T_{\Phi} + T_{\lambda}) + 1, \quad a_0 = \mu.$$

Найдем дисперсию выходного сигнала u_{Φ} по методу интегральной квадратичной оценки [7], согласно которому для системы третьего порядка с полиномом (8) получим следующее выражение

$$D_{u_{\Phi}}^2 = S_{\xi_u} \cdot \frac{\Delta_B}{2 \cdot a_3 \cdot \Delta_A}, \quad \Delta_A = \det \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\Delta_B = \det \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ b_0^2 & b_1^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 1.$$

Подставляя в выражение (9) параметры (8) и найденную интенсивность белого шума (4), после соответствующих преобразований окончательно получим

$$D_{u_{\Phi}} = D_u \frac{T_{\Phi} + T_{\lambda} + \mu T_{\Phi} T_{\lambda}}{(\mu T_{\Phi} + 1)(T_{\Phi} + T_{\lambda})}. \quad (10)$$

Проведем, согласно формуле (10), расчет дисперсии на выходе фильтра (7) для примера полета тяжелого транспортного самолета на высоте 400 м и приборной скорости 450 км/ч при турбулентности со среднеквадратическим отклонением генерируемого ветра $\sigma_u = 1,5$ м. Масштаб турбулентности для этой высоты составляет $L = 309$ м, собственная частота фильтра Драйдена $\mu = 0,405 \text{ с}^{-1}$, постоянная времени модифицированного фильтра Драйдена $T_{\lambda} = 0,5$ с, а постоянная времени фильтра принималась равной $T_{\Phi} = 6,7$ с. Для указанных параметров соотношение дисперсий сглаженной и собственно скорости турбулентного ветра составляет $D_{u_{\Phi}} = 0,321 \cdot D_u$, а соответственно для среднеквадратических отклонений (СКО) $\sigma_{u_{\Phi}} = 0,567 \cdot \sigma_u$.

Для режима полета в посадочной конфигурации с малым значением $\mu = 0,156 \text{ с}^{-1}$ соотношение между СКО сглаженного и необработанного ветра составляет $\sigma_{u_{\Phi}} = 0,756 \cdot \sigma_u$.

Ветровые воздействия, поступающие в контур стабилизации приборной скорости полета, ослабевают в 1,75...1,3 раза, что в целом существенно сглаживает входные возмущения, линейно не разделяемые

с полезным сигналом приборной скорости полета, возникающей при движении самолета относительно воздуха.

Вернемся к рассмотрению совместной (комплексной) обработки двух сигналов: аэрометрического и инерциального. Остановимся на способе вычисления производной инерциальной скорости согласно выражению (1), которое применяется в существующих САУ. При расчете обрабатываются сигналы датчиков перегрузок n_x, n_y , угла атаки и угла наклона траектории θ . Основным вопросом в получении адекватной производной инерциальной скорости является согласованность указанных параметров движения, которые измеряются разнородными способами, имеют различные динамические характеристики и статические ошибки, содержат случайные составляющие. Синхронизация сигналов в САУ искусственно обеспечивается соответствующими фильтрами для их фазового сопряжения.

Для исключения многоуровневой обработки датчиков движения в задаче формирования производной инерциальной скорости полета (1) предлагается модификация фильтра воздушных скоростных параметров (рис. 1) с прямым использованием измеряемой путевой скорости полета W , которая является проекцией вектора инерциальной скорости на местную горизонтальную плоскость:

$$W = V \cos \theta + U_r, \quad (11)$$

где U_r — скорость постоянного горизонтального ветра.

Возьмем от выражения (11) производную по времени и получим при околонулевом крене $\gamma \approx 0$ связь производной инерциальной скорости с производной путевой скорости, а именно

$$\dot{V} = \dot{W} / \cos \theta + \dot{\theta} \cdot V \cdot \operatorname{tg} \theta. \quad (12)$$

Выражение (12) содержит в правой части две составляющих. Первая из них определяет установившийся процесс набора/снижения самолета, вторая — переходное движение выхода на требуемый угол наклона траектории. Тогда при установившемся движении ($\dot{\theta} = 0$) ошибка в определении производной инерциальной скорости полета по производной путевой скорости для $\theta = 15^\circ$ не превышает 3,5%. При выходе самолета на угол $\theta = 15^\circ$ с избыточной перегрузкой 0,15 и средним темпом $\dot{\theta} = 1,0 \dots 1,5^\circ / \text{с}$ накопление ошибки по приборной скорости во время переходного процесса не превысит 8...10 км/ч, что укладывается в требуемую точность стабилизации.

Будем использовать в комплексном фильтре (рис. 1) вместо искусственно формируемого сигнала \dot{V} сигнал производной от путевой скорости W , поступающей в САУ в качестве информационного параметра от инерциальной навигационной системы. Оценка производной \dot{W} может быть выполнена с помощью префильтра второго порядка:

$$F_{\dot{W}}^W(p) = \frac{p}{T_{\text{пф}}^2 p^2 + 2\xi_{\text{пф}} T_{\text{пф}} p + 1}, \quad (13)$$

где $T_{\text{пф}}$ и $\xi_{\text{пф}}$ — постоянная времени и относительный коэффициент затухания префильтра.

При этом должно выполняться условие $T_{\text{пф}} \ll T_\Phi$ для исключения влияния технологического динамического звена (13) на работу комплексного фильтра, что может быть обеспечено в силу низкопомехового «гладкого» сигнала путевой скорости.

Для реализации в структуре САУ префильтра (13) составим его в виде, приведенном на рис. 2.

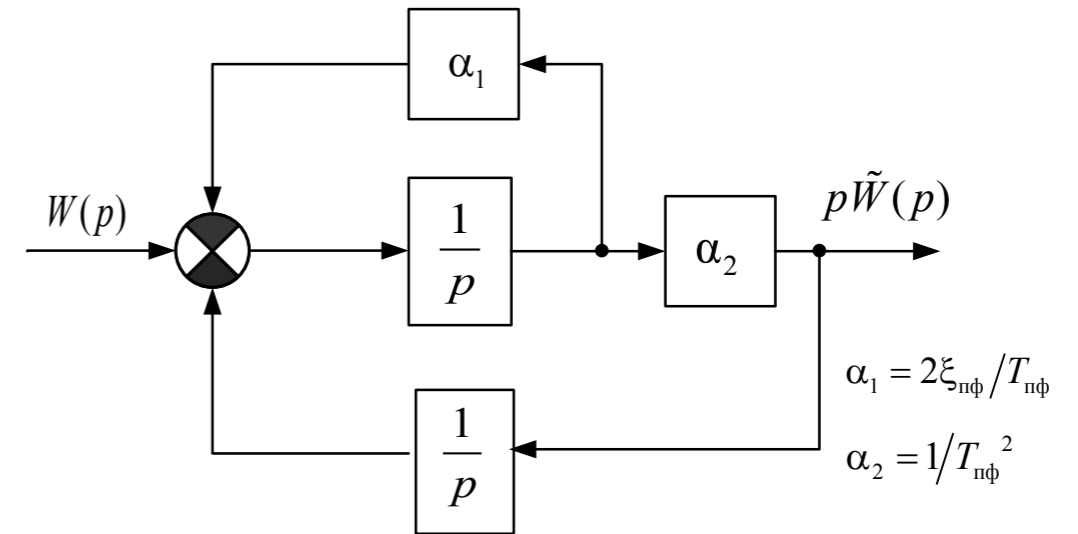


Рис. 2. Структурная схема префильтра определения производной путевой скорости

Для разнесения частот основного фильтра (3) и вспомогательного префильтра (13), оценивающего производную путевой скорости, достаточно назначить следующие параметры префильтра $T_{\text{пф}} = 0,4$, $\xi_{\text{пф}} = 0,7$.

С учетом структур (рис. 1, 2) составим полную структурную схему модифицированного комплексного фильтра приборной скорости.

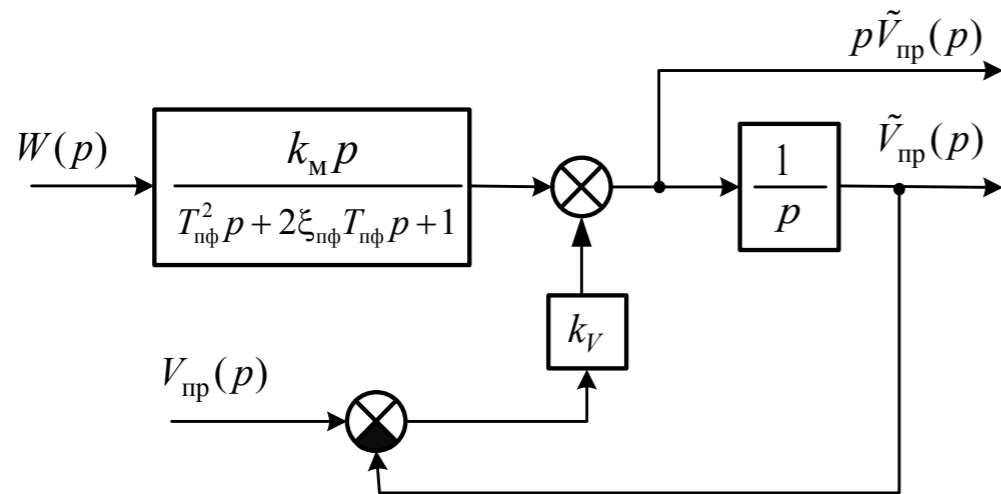


Рис. 3. Модифицированный комплексный фильтр приборной скорости полета

После соответствующих преобразований структуру (рис. 3) можно представить в следующем виде

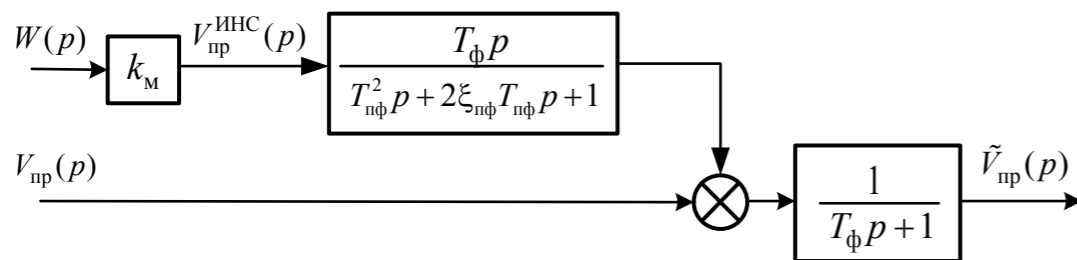


Рис. 4. Преобразованная структура модифицированного комплексного фильтра

В случае совпадения оценки «инерциальной» приборной скорости $V_{пр}^{ИНС}$, полученной пересчетом из путевой скорости, с приборной скоростью $V_{пр}$, принимаемой от СВС, при очень малой постоянной времени префильтра производной $T_{пф} \ll T_{\phi}$ передаточная функция фильтра (рис. 4) при отсутствии турбулентности будет стремиться к единице.

$$F_{V_{пр}}^{V_{пр}}(p) = \left[1 + \frac{T_{\phi} p}{T_{пф}^2 p^2 + 2\xi_{пф} T_{пф} p + 1} \right] \cdot \frac{1}{T_{\phi} p + 1} \Bigg|_{T_{пф} \ll T_{\phi}} \approx \frac{T_{\phi} p + 1}{T_{\phi} p + 1} \Rightarrow 1. \quad (14)$$

Выражение (14) доказывает асимптотическую несмещенность выходного сигнала комплексного фильтра в условиях принятого допущения об околонулевом математическом ожидании турбулентного ветра, который представляется центрированным случайным процессом, генерируемым формирующим фильтром.

В программной реализации модели объекта исследования дискретное представление формирующего фильтра дифференцируемого ветра [6] имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x_{1,i-1} + a_{12} x_{2,i-1} + b_{11} n_1, \\ x_2 = a_{21} x_{1,i-1} + a_{22} x_{2,i-1} + b_{21} n_1 + b_{22} n_2, \end{cases} \quad (15)$$

где x_1 — турбулентная составляющая продольного ветра; x_2 — производная турбулентной составляющей продольного ветра; a — элементы фундаментальной матрицы, значения которых зависят от частоты апериодического звена λ и частоты μ турбулентной составляющей ветра; b — элементы треугольной матрицы случайного вектора; n_1 и n_2 — независимые, нормальные, нормированные, центрированные случайные величины с единичной дисперсией.

Случайный процесс на входе формирующего фильтра (n_1 и n_2) в программной реализации имеет вид нормированной случайной последовательности Гаусса с заданным математическим ожиданием $m = 0$ и дисперсией $\sigma^2 = 1$.

С помощью фильтра (15) обеспечивается одновременная генерация скорости и ускорения турбулентного ветра для задаваемого среднеквадратического отклонения скорости ветра $\sigma_{x_s} = 1 \text{ м/с}$ (рис. 5). Значение скорости турбулентной составляющей ветра после расчета в каждый момент времени работы модели суммируется с постоянной составляющей продольного ветра.

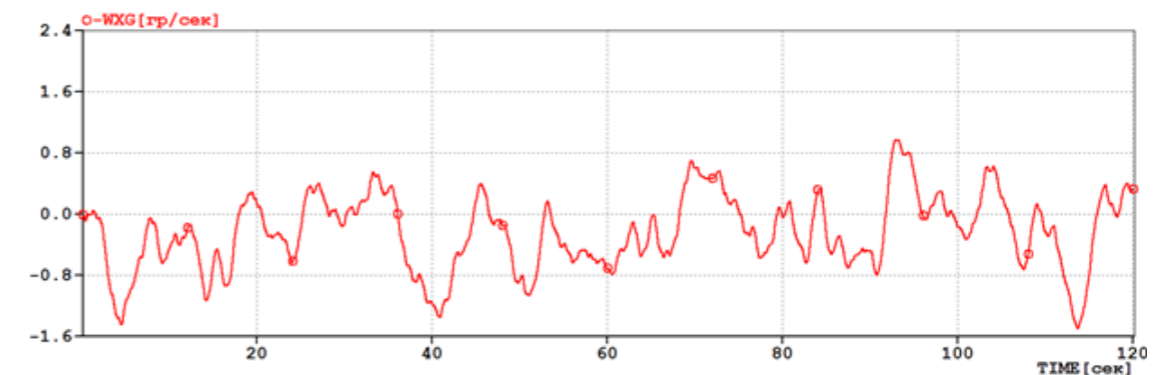


Рис. 5. График турбулентной составляющей продольного ветра

Рассчитанное по рекуррентной формуле среднеквадратичное отклонение всех составляющих турбулентного ветра соответствует заданным при математическом моделировании значениям.

Моделирование проводилось для следующих параметров движения тяжелого самолета, оборудованного системой управления тягой и системой автоматического управления:

$$V_{пр0} = V_{пр}^{зад} = 450 \text{ км/ч}, H_0 = H^{зад} = 400 \text{ м}, \delta_{зак} = 0^\circ.$$

Моделирование проводилось в условиях симуляции продольного турбулентного ветра с масштабом турбулентности $\sigma_w = 1,5 \text{ м/с}$, результаты приведены на рис. 6. Следует отметить, что для каждого эксперимента псевдослучайная последовательность имела одинаковый вид для сравнения результатов фильтрации приборной скорости с измеренной скоростью полета.

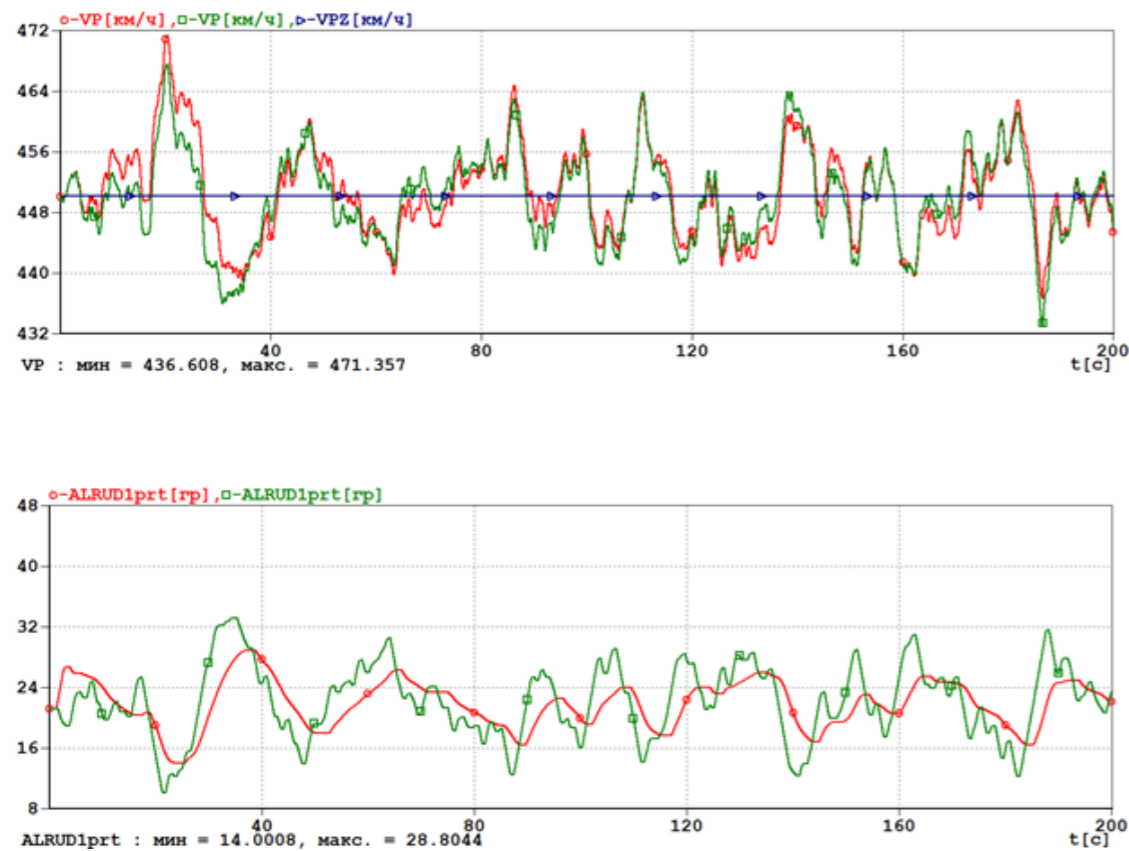


Рис. 6. Влияние ветровых возмущений на параметры полета (красная — с фильтрацией, зеленая — без фильтрации. VP и VPZ — текущая и заданная приборные скорости, ALRUDlprt — угол перемещения РУД)

Эффективность работы комплексного фильтра оценивалась статистическими методами с оценкой дисперсии приборных скоростей и РУДов на режимах с фильтрацией и без нее. Была использована возможность применения рекуррентного метода оценки дисперсии

$$\begin{aligned} \tilde{m}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n-1}{n} \tilde{m}(n-1) + \frac{1}{n} x_n; \\ \tilde{D}(n) &= \frac{n-1}{n} \tilde{D}(n-1) + \frac{1}{n} (x_n - \tilde{m}(n))^2. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{m}(n)$ — оценка математического ожидания по выборке x_i из n отсчетов. Шаг расчета в математической модели $\Delta t = 8 \text{ м/с}$.

На интервале времени 10000 секунд количество вычисления по формуле (16) составило 125000 точек, что достаточно для получения достаточно точной дисперсии в достигнутом стационарном состоянии процесса стабилизации скорости полета.

Исходя из условий снижения нагрузки на силовую установку самолета была проведена оценка дисперсии перемещения рычага управления двигателя (рис. 7).

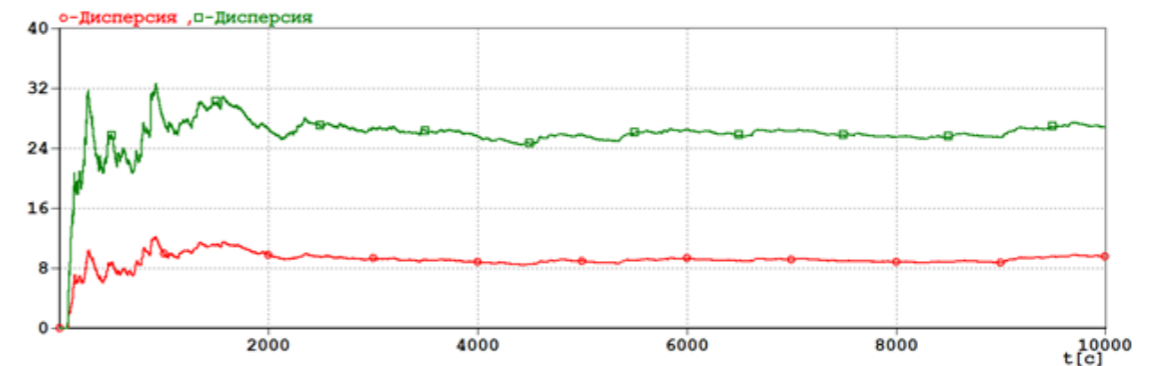


Рис. 7. Дисперсия угла отклонения РУД (красная — с фильтрацией, зеленая — без фильтрации)

Оценка среднеквадратичного отклонения с фильтрацией составила $\tilde{\sigma}_{\alpha_{руд}} \approx 3^\circ$, а без фильтрации $\sigma_{\alpha_{руд}} \approx 5^\circ$, что говорит о существенно меньшем количестве переключений РУД и снижении нагрузки на двигатель.

График оценки рекуррентной дисперсии приборной скорости как критерий точности стабилизации скорости приведен на рис. 8 (стр. 44).

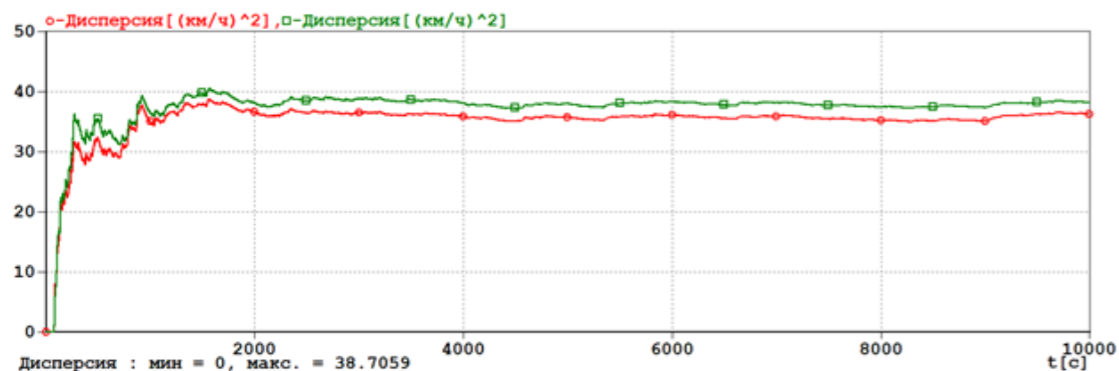


Рис. 8. Дисперсия приборной скорости
(красная — с фильтрацией, зеленая — без фильтрации)

Фильтр не приносит изменения точности стабилизации приборной скорости полета, а разброс почти не отличается от нефильтрованного параметра: $\sigma_{V_{пр}} \approx 5,9 \text{ км/ч}$ с фильтрацией и $\tilde{\sigma}_{V_{пр}} \approx 6,2 \text{ км/ч}$.

В результате синтеза фильтра внесена корректная правка приборной скорости полета на основе использования инерциального параметра путевой скорости, при этом восстановления кинематической скорости по измерениям недостаточно согласованных параметров движения не потребовалось. Использование фильтра второго порядка позволяет вычислить производную путевой скорости. Тот же принцип был применен для создания корректной модели ветровых возмущений, где такой же фильтр был использован как формирующий фильтр случайного сигнала турбулентного ветра. Статистические исследования свидетельствуют о значительном снижении нагрузки на силовую установку от движения РУД-ов через автомат тяги в результате использования предложенного комплексного фильтра без снижения точности стабилизации, что позволяет применять его на практике в составе алгоритмического обеспечения систем автоматического управления.

Литература

1. Доброленский Ю. П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. — М.: Машиностроение, 1969. — 256 с.
2. Харьков В. П. Оптимизация комплексного бароинерциального вычислителя вертикальной скорости и высоты полета ЛА // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника / В. П. Харьков. — Казань. №3, 1988. — С. 18–22.
3. Вычислительная система управления полетом и тягой ВСУПТ-85-204. ИВУК.461231.001 РЭ. Москва. МИЭА, 2009. — 65 с.
4. Бабич О. А. Обработка информации в навигационных комплексах / О. А. Бабич. — М.: Машиностроение, 1991, — 512 с. ISBN 5-217-0160-6.
5. Ведров В. С., Тайц М. А. Летные испытания самолетов. М.: Оборонгиз, 1951. — 483 с.
6. Куликов В. Е. Формирующий фильтр дифференцируемого турбулентного ветра // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. Вып. 7, 2013. — С. 36–42.
7. Кочетков Ю. А. Основы автоматики авиационного оборудования. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1995. — 574 с.

О ПОРЯДКЕ ЧЛЕНОВ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК БИНС И ИХ ВКЛАДАХ В РЕШЕНИЯ

*Александр Владимирович ФОМИЧЕВ, к. ф.-м. н.
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru*

Правые части полной системы уравнений ошибок БИНС содержат члены, существенно различные по порядку. В статье группируются члены уравнений ошибок одинаковых порядков, оценивается их вклад в динамику навигационных погрешностей и делаются выводы о целесообразности их учета в модели ошибок БИНС в зависимости от класса точности БИНС и времени ее работы.

Ключевые слова: БИНС (бесплатформенная инерциальная навигационная система), уравнения ошибок, навигационные погрешности.

ON THE ORDER OF SINS ERROR EQUATIONS MEMBERS AND THEIR CONTRIBUTIONS TO SOLUTIONS

*Alexander V. FOMICHEV, PhD in Phys. and Math.,
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-Mail: inbox@aomiea.ru*

The right sides of SINS error equations within the complete system contain members, which are essentially different in order. The article considers grouping of error equations members with identical orders, estimates their contribution to dynamics of navigation errors and provides conclusions about advisability of their integration into SINS errors model depending on SINS accuracy class and its operation time.

Keywords: SINS (strapdown inertial navigation system), error equation, navigation errors.

Введение

Решение целого ряда задач, возникающих при разработке и эксплуатации БИНС, основывается на уравнениях ошибок БИНС. Прежде всего, это комплексная обработка информации БИНС и внешних корректоров, оценка инструментальных погрешностей при калибровке БИНС и в процессе эксплуатации, исследование предельных допусков на инструментальные погрешности, гарантирующих нахождение навигационных ошибок в заданных диапазонах.

Успешное решение многих из перечисленных задач возможно лишь при использовании модели ошибок БИНС, максимально соответствующей реальному поведению погрешностей БИНС, в особенности если система имеет высокую точность и достаточно большое время работы. С другой стороны, отдельные члены полной модели могут быть столь малыми, что их учет лишь увеличивает загрузку вычислителя и практически не влияет на решение.

В статье группируются члены полной системы уравнений ошибок БИНС, имеющие одинаковый порядок, оценивается их влияние на динамику навигационных погрешностей. Из этого делаются выводы о необходимости удержания либо исключения данных групп членов в зависимости от характерного времени работы и класса точности системы.

Математическая модель ошибок БИНС

В литературе, посвященной инерциальной навигации и комплексированию ИНС и внешних источников корректирующей информации, используется следующая модель ошибок [1–4]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}'_1 &= \delta V_1 + \beta_3 V'_2 - \left(\alpha_2 - \frac{\Delta r'_1}{a} \right) V'_3 + \Omega'_3 \Delta r_2 - \Omega'_2 \Delta h, \\ \Delta \dot{r}'_2 &= \delta V_2 - \beta_3 V'_1 + \left(\alpha_1 + \frac{\Delta r'_2}{a} \right) V'_3 - \Omega'_3 \Delta r_1 + \Omega'_1 \Delta h, \\ \delta \dot{V}'_1 &= -g \alpha_2 + (\Omega'_3 + 2u'_3) \delta V_2 - (\Omega'_2 + 2u'_2) \delta V_3 + \\ &+ (u'_2 V'_2 + u'_3 V'_3) \alpha_1 - u'_1 V'_2 \alpha_2 - u'_1 V'_3 \beta_3 + \\ &+ \frac{u'_1 V'_2}{a} \Delta r_1 + \frac{u'_2 V'_2 + u'_3 V'_3}{a} \Delta r_2 + \\ &+ (d'_{21} v_{p1} + d'_{22} v_{p2} + d'_{23} v_{p3}) V'_3 - (d'_{31} v_{p1} + d'_{32} v_{p2} + d'_{33} v_{p3}) V'_2 + \\ &+ d'_{11} \delta f_{p1} + d'_{12} \delta f_{p2} + d'_{13} \delta f_{p3}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}_2 &= g\alpha_1 - (\Omega'_3 + 2u'_3)\delta V_1 + (\Omega'_1 + 2u'_1)\delta V_3 + \\ &+ (u'_1V'_1 + u'_3V'_3)\alpha_2 - u'_2V'_1\alpha_1 - u'_2V'_3\beta_3 - \\ &- \frac{u'_2V'_1}{a}\Delta r_2 - \frac{u'_1V'_1 + u'_3V'_3}{a}\Delta r_1 - \\ &- (d'_{11}v_{p1} + d'_{12}v_{p2} + d'_{13}v_{p3})V'_3 + (d'_{31}v_{p1} + d'_{32}v_{p2} + d'_{33}v_{p3})V'_1 + \\ &+ d'_{21}\delta f_{p1} + d'_{22}\delta f_{p2} + d'_{23}\delta f_{p3}, \\ \dot{\alpha}_1 &= -\frac{\delta V_2}{a} + \omega'_3\alpha_2 - u'_2\beta_3 - u'_3\frac{\Delta r_1}{a} - \frac{V'_3}{a}\alpha_1 - \Omega'_1\frac{\Delta h}{a} - (d'_{11}v_{p1} + d'_{12}v_{p2} + d'_{13}v_{p3}), \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\delta V_1}{a} - \omega'_3\alpha_1 + u'_1\beta_3 - u'_3\frac{\Delta r_2}{a} - \frac{V'_3}{a}\alpha_2 - \Omega'_2\frac{\Delta h}{a} - (d'_{21}v_{p1} + d'_{22}v_{p2} + d'_{23}v_{p3}), \\ \dot{\beta}_3 &= \omega'_2\left(\alpha_1 + \frac{\Delta r_2}{a}\right) - \omega'_1\left(\alpha_2 - \frac{\Delta r_1}{a}\right) - (d'_{31}v_{p1} + d'_{32}v_{p2} + d'_{33}v_{p3}). \end{aligned} \quad (1)$$

В вектор состояния системы входят:

$\Delta r_1, \Delta r_2$ — позиционные погрешности БИНС вдоль горизонтальных направлений географического трехгранника с заданной азимутальной ориентацией [1, 3] (далее — горизонтальных направлений);

$\delta V_1, \delta V_2$ — динамические погрешностей скорости вдоль горизонтальных направлений [1, 3];

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ — погрешности построения вертикали по горизонтальным направлениям и в азимуте соответственно.

Другие параметры системы (1):

V'_1, V'_2 — горизонтальные компоненты вектора скорости, вычисленной БИНС, вдоль горизонтальных направлений;

V'_3 — вертикальная составляющая вектора скорости, вычисленной БИНС.

a — экваториальный радиус Земли;

Ω'_i — компоненты угловой скорости в осях географического трехгранника, для учета в уравнениях ошибок достаточно считать, что

$$\Omega'_1 = -V'_2/a, \quad \Omega'_2 = V'_1/a. \quad (2)$$

Ω'_3 — азимутальная относительная угловая скорость географического трехгранника. При полусвободной азимутальной ориентации, которая рассматривается в статье, $\Omega'_3 = 0$;

Δh — погрешность высоты, передаваемой от внешнего источника;

u'_1, u'_2, u'_3 — проекции угловой скорости Земли в географических осях, постоянные для стендового эксперимента на малоподвижном основании;

$\omega'_i = \Omega'_i + u'_i$ — компоненты абсолютной угловой скорости географического трехгранника;

g — модуль силы тяжести;

d'_{ij} — элементы матрицы ориентации приборного трехгранника БИНС, образованного осями чувствительности, относительно географического;

δf_{pi} — суммарные погрешности трактов акселерометров в приборных осях;

v_{pi} — суммарные погрешности трактов ДУС в приборных осях.

Система уравнений (1) получается при линеаризации возмущенных уравнений, соответствующих работе БИНС при наличии возмущений начальных условий и инструментальных погрешностей, относительно идеальной опорной траектории, соответствующей работе идеальной БИНС.

При линеаризации отбрасываются только величины второй степени и выше по отклонениям от идеальной траектории. Можно показать, что они много меньше всех линейных членов, фигурирующих в системе (1), что и оправдывает их исключение.

Отбрасывание нелинейных слагаемых является единственным допущением, использованном при выводе уравнений (1), и таким образом система (1) является полной линейной моделью ошибок БИНС. Ее адекватность подтверждается результатами моделирования и результатами практического внедрения.

Группировка членов правой части системы уравнений ошибок по порядку величин

Оценка членов правой части системы (1) показывает, что они имеют существенно разные порядки, однако группируются в блоки величин одного порядка. Для оценки примем, что

$$V'_1 \sim V'_2 \sim 500 \text{ м/с};$$

$\omega'_i \sim \Omega'_i \sim u'_i \sim 10^\circ/\text{час}$, что следует из выражений (2) для Ω'_i и формулы $\omega'_i = \Omega'_i + u'_i$;

$$\alpha_i \sim 1', \quad \beta_3 \sim 3';$$

$$\Delta r_1 \sim \Delta r_2 \sim 1 \text{ км};$$

$$\delta V_1 \sim \delta V_2 \sim 1 \text{ м/с}.$$

Порядок величин, входящих в фазовый вектор системы (1), таких, как ошибки координат, скорости, вертикали и азимута, следует из численных решений системы (1) для дрейфов и смещений нулей, характерных для современных БИНС.

Для исследования влияния ошибок вертикального канала взято заведомо завышенное значение вертикальной скорости $V'_3 \sim 100 \text{ м/с}$, соответствующее интенсивному маневрированию, и погрешность высоты $\Delta h = 100 \text{ м}$. Заметим, что такие параметры взяты для оценки сверху. При магистральных полетах с малым маневрированием в вертикальной плоскости эти величины будут меньше как минимум на порядок.

Оценка правых частей уравнений (1) показывает, что члены уравнений группируются следующим образом.

Таблица 1. Порядок величин правых частей уравнений для позиционных погрешностей

$\delta V_1 \sim \delta V_2$	$\sim 1 \text{ м/с}$
$\beta_3 V'_1 \sim \beta_3 V'_2$	$\sim 0,45 \text{ м/с}$
$\left(\alpha_2 - \frac{\Delta r_1}{a}\right) V'_3 \sim \left(\alpha_1 + \frac{\Delta r_2}{a}\right) V'_3$	$\sim 0,03 \text{ м/с}$
$\Omega'_1 \Delta h \sim \Omega'_2 \Delta h$	$\sim 0,008 \text{ м/с}$

Таблица 2. Порядок величин правых частей уравнений для скоростных погрешностей

$g\alpha_1 \sim g\alpha_2$	$\sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$
$d'_{11} \delta f_{p1} + d'_{12} \delta f_{p2} + d'_{13} \delta f_{p3} \sim d'_{21} \delta f_{p1} + d'_{22} \delta f_{p2} + d'_{23} \delta f_{p3}$	$\sim 10^{-3} \text{ м/с}^2$
$(\Omega'_3 + 2u'_3) \delta V_2 \sim (\Omega'_3 + 2u'_3) \delta V_1 \sim (\Omega'_1 + 2u'_1) \delta V_3 \sim (\Omega'_2 + 2u'_2) \delta V_3$	$\sim 10^{-4} \text{ м/с}^2$
$(u'_2 V'_2 + u'_3 V'_3) \alpha_1 \sim u'_1 V'_2 \alpha_2 \sim (u'_1 V'_1 + u'_3 V'_3) \alpha_2 \sim u'_2 V'_1 \alpha_1$	$\sim 7 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$
$\frac{u'_1 V'_2}{a} \Delta r_1 \sim \frac{u'_2 V'_2 + u'_3 V'_3}{a} \Delta r_2 \sim \frac{u'_2 V'_1}{a} \Delta r_2 \sim \frac{u'_1 V'_1 + u'_3 V'_3}{a} \Delta r_1$	$\sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$
$(d'_{21} v_{p1} + d'_{22} v_{p2} + d'_{23} v_{p3}) V'_3 \sim (d'_{31} v_{p1} + d'_{32} v_{p2} + d'_{33} v_{p3}) V'_2 \sim (d'_{11} v_{p1} + d'_{12} v_{p2} + d'_{13} v_{p3}) V'_3 \sim (d'_{31} v_{p1} + d'_{32} v_{p2} + d'_{33} v_{p3}) V'_1$	$\sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$

Таблица 3. Порядок величин правых частей уравнений для угловых погрешностей

$\frac{\delta V_1}{a} \sim \frac{\delta V_2}{a}$	$\sim 3 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ/\text{час}$
$d'_{11} v_{p1} + d'_{12} v_{p2} + d'_{13} v_{p3} \sim d'_{21} v_{p1} + d'_{22} v_{p2} + d'_{23} v_{p3} \sim d'_{31} v_{p1} + d'_{32} v_{p2} + d'_{33} v_{p3}$	$\sim 10^{-2} \text{ }^\circ/\text{час}$
$u'_2 \beta_3 \sim u'_1 \beta_3$	$\sim 10^{-2} \text{ }^\circ/\text{час}$
$\omega'_3 \alpha_2 - u'_3 \frac{\Delta r_1}{a} \sim \omega'_3 \alpha_1 - u'_3 \frac{\Delta r_1}{a} \sim \omega'_2 \left(\alpha_1 + \frac{\Delta r_2}{a}\right) \sim \omega'_1 \left(\alpha_2 - \frac{\Delta r_1}{a}\right)$	$\sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{час}$
$\frac{V'_3 \alpha_1}{a} \sim \frac{V'_3 \alpha_2}{a}$	$\sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{час}$
$\frac{\Omega'_1 \Delta h}{a} \sim \frac{\Omega'_2 \Delta h}{a}$	$\sim 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ/\text{час}$

Влияние членов разных порядков

Из приведенных таблиц очевидна справедливость тезиса, озвученного в аннотации и введении: отношение наибольших членов правых частей к наименьшим составляет 2—3 порядка. Однако отметим, что траектории и положения равновесия уравнений ошибок БИНС не обладают асимптотической устойчивостью и даже малые члены могут давать значимые вклады в решения, если время интегрирования достаточно большое.

Это дает основание для анализа влияния всех членов уравнений ошибок, включая самые малые из них. Из таблиц вытекает следующая естественная иерархия величин.

- Первый порядок — первые две строки таблиц 1 и 2 и первые три строки таблицы 3.
- Второй порядок — учитываются первые три строки таблиц 1 и 2 и первые четыре из таблицы 3.
- Третий порядок — учитываются все величины из таблиц.

Исходя из этого, получаются системы уравнений ошибок первого, второго приближений и полная система (1), соответствующая учету всех членов правой части.

Приведем системы первых двух приближений и прокомментируем свои особенности.

Система первого приближения:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_1 &= \delta V_1 + \beta_3 V_2', \\ \Delta \dot{r}_2 &= \delta V_2 - \beta_3 V_1', \\ \delta \dot{V}_1 &= -g\alpha_2 + d'_{11}\delta f_{p1} + d'_{12}\delta f_{p2} + d'_{13}\delta f_{p3}, \\ \delta \dot{V}_2 &= g\alpha_1 + d'_{21}\delta f_{p1} + d'_{22}\delta f_{p2} + d'_{23}\delta f_{p3}, \\ \dot{\alpha}_1 &= -\frac{\delta V_2}{a} - u_2\beta_3 - \left(d'_{11}v_{p1} + d'_{12}v_{p2} + d'_{13}v_{p3}\right), \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\delta V_1}{a} + u_1\beta_3 - \left(d'_{21}v_{p1} + d'_{22}v_{p2} + d'_{23}v_{p3}\right), \\ \dot{\beta}_3 &= -\left(d'_{31}v_{p1} + d'_{32}v_{p2} + d'_{33}v_{p3}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Данная система состоит из уравнений ошибок несвязанных «одноканальных» систем, являющихся простейшей моделью ошибок инерциальной навигационной системы. Ей соответствуют известные гармонические колебания погрешностей БИНС с периодом Шулера, равным 84,4 мин. Кроме шулеровских колебаний, моделью (3) объясняются связи ошибок начальной выставки вертикали и азимута с инструментальными погрешностями. Эти факты широко известны, и потому далее не обсуждаются.

Система второго приближения:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_1 &= \delta V_1 + \beta_3 V_2' - \left(\alpha_2 - \frac{\Delta r_1}{a}\right) V_3' - \Omega_2' \Delta h, \\ \Delta \dot{r}_2 &= \delta V_2 - \beta_3 V_1' + \left(\alpha_1 + \frac{\Delta r_2}{a}\right) V_3' + \Omega_1' \Delta h, \\ \delta \dot{V}_1 &= -g\alpha_2 + (\Omega_3' + 2u_3')\delta V_2 - (\Omega_2' + 2u_2')\delta V_3 + \\ &\quad + d'_{11}\delta f_{p1} + d'_{12}\delta f_{p2} + d'_{13}\delta f_{p3}, \\ \delta \dot{V}_2 &= g\alpha_1 - (\Omega_3' + 2u_3')\delta V_1 + (\Omega_1' + 2u_1')\delta V_3 + \\ &\quad + d'_{21}\delta f_{p1} + d'_{22}\delta f_{p2} + d'_{23}\delta f_{p3}, \\ \dot{\alpha}_1 &= -\frac{\delta V_2}{a} + \omega_3'\alpha_2 - u_2'\beta_3 - u_3\frac{\Delta r_1}{a} - \left(d'_{11}v_{p1} + d'_{12}v_{p2} + d'_{13}v_{p3}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2 &= \frac{\delta V_1}{a} - \omega_3'\alpha_1 + u_1'\beta_3 - u_3\frac{\Delta r_2}{a} - \left(d'_{21}v_{p1} + d'_{22}v_{p2} + d'_{23}v_{p3}\right), \\ \dot{\beta}_3 &= \omega_3'\left(\alpha_1 + \frac{\Delta r_2}{a}\right) - \omega_1'\left(\alpha_2 - \frac{\Delta r_1}{a}\right) - \left(d'_{31}v_{p1} + d'_{32}v_{p2} + d'_{33}v_{p3}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Учет членов следующего порядка дает качественное изменение в поведении погрешностей. Уравнения второго приближения уже не распадаются на независимые подсистемы, однако слагаемые второго порядка достаточно малы, и поэтому отличия в решениях систем (3) и (4) при одинаковых начальных условиях и действующих инструментальных погрешностях появляются лишь при достаточно большом времени интегрирования.

Хорошо известным явлением, наблюдаемым при эксплуатации инерциальных систем с полусвободной азимутальной ориентацией опорного трехгранника, являются так называемые «суточные» колебания, при которых на шулеровские колебания накладывается модуляция с периодом порядка суток, зависящем от широты и траектории движения. Они следуют из модели (4).

На рис. 1 (стр. 54) приводятся решения уравнений (3) и (4) для погрешностей скорости, соответствующие воздействию нулевого сигнала тракта акселерометров по первой горизонтальной оси $d'_{11}\delta f_{p1} + d'_{12}\delta f_{p2} + d'_{13}\delta f_{p3} = 10^{-3} \text{ м/с}^2$, смоделированные для неподвижного основания.

Из этих решений следует, что система (3) адекватно описывает поведение погрешностей лишь на интервалах времени меньше, в крайнем случае — порядка периода Шулера. На более длительных интервалах существенно проявляются члены второго порядка малости, качественно изменяющие поведение системы. Отметим, что приведенные выше эффекты хорошо известны из теории навигационных систем и опыта их эксплуатации.

Теперь оценим влияние слагаемых наивысшего порядка малости, стоящих в последней строке таблицы 1, последних трех строках таблицы 2 и последних двух строк таблицы 3.

Как видно из сопоставления предыдущих приближений, достаточно малые слагаемые в правой части способны качественно изменить поведение решений системы уравнений ошибок и поэтому влияние членов низшего порядка малости также требует изучения.

Заметим, что все слагаемые низшего порядка малости пропорциональны скорости движения. Поэтому для изучения их влияния необходимо выбрать траектории с ненулевой скоростью и на них проинтегрировать уравнения ошибок.

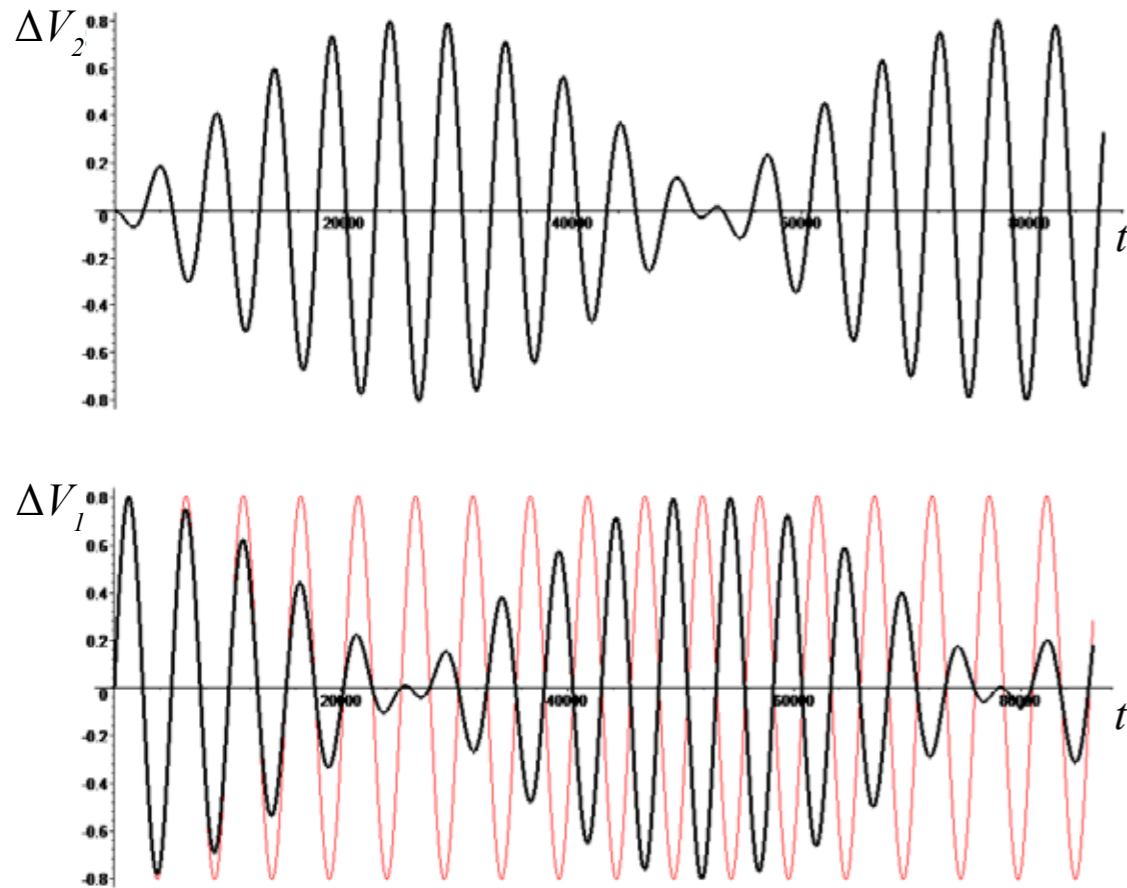


Рис. 1. Погрешности горизонтальных составляющих скорости, вычисленные БИНС при одинаковых (нулевых) начальных условиях и действии смещения нулевого сигнала акселерометра $d'_{11}\delta f_{p1} + d'_{12}\delta f_{p2} + d'_{13}\delta f_{p3} = 10^{-3} \text{ м / с}^2$ вдоль первой оси. Черные кривые — решения (4), красные — решения (3). Для системы (3) $\Delta V_2 \equiv 0$. Время интегрирования — 25 часов

Для данного примера было рассмотрено движение по меридиану со скоростью 100 м/с. Для данного движения были численно проинтегрированы системы уравнений (1) и (4) с одинаковыми инструментальными погрешностями и начальными условиями. После этого были построены графики разностей погрешностей координат, полученные при интегрировании систем (1) и (4), представленные на рис. 2.

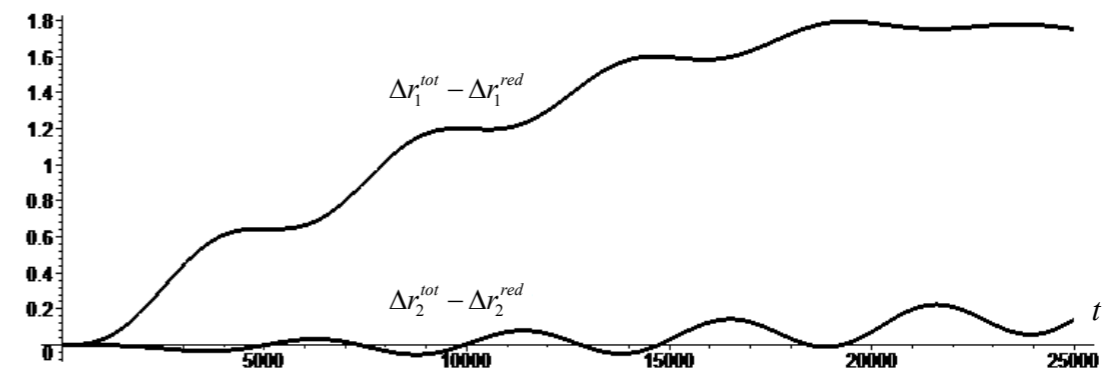


Рис. 2. Разности решений систем уравнений (1) и (4) при одинаковых (нулевых) начальных условиях и действии смещения нулевого сигнала акселерометра $d'_{11}\delta f_{p1} + d'_{12}\delta f_{p2} + d'_{13}\delta f_{p3} = 10^{-3} \text{ м/с}^2$ и дрейфа $d'_{11}v_{p1} + d'_{12}v_{p2} + d'_{13}v_{p3} = 0,01^\circ / \text{час}$. Индекс "tot" используется для обозначения решения полной системы, "red" — редуцированной системы второго приближения

Таким образом, учет членов низшего порядка практически не влияет на поведение решений. Поскольку все компоненты фазового вектора системы уравнений ошибок взаимосвязаны, то из практического совпадения позиционных погрешностей в моделях (1) и (4) следует совпадение и по остальным компонентам вектора состояния, чем и объясняется отсутствие графиков разностей других одноименных компонент векторов состояния.

Также отметим, что увеличение скорости движения в несколько раз в силу линейности уравнений ошибок приведет лишь к пропорциональному увеличению погрешностей, оставляя их пренебрежимо малыми на фоне более существенных слагаемых. Кроме того, при интенсивном маневрировании функции $V_i'(t)$ быстро меняются в сравнении с периодом Шулера, что еще сильнее уменьшает влияние и без того малых членов. Этот эффект объясняется убыванием амплитудно-частотных характеристик линейных систем в области высоких частот.

Таким образом, модель (4) фактически точно описывает динамику погрешностей БИНС на длительных интервалах времени и может быть принята в качестве основной модели ошибок БИНС. Модель (3) допустимо использовать лишь на коротких интервалах времени, меньших периода Шулера, например, для комплексирования грубых БИНС, не работающих длительное время в автономном режиме, либо в тех задачах, где время работы БИНС мало и упрощение модели ошибок удобно, например, для аналитических оценок.

Заключение.

В статье исследовано влияние различных членов полной линейной системы уравнений ошибок БИНС на решения данной системы. Для этого слагаемые правой части системы разбиты на три группы величин одинакового порядка. Для каждой группы описаны наиболее существенные эффекты, обусловленные данными слагаемыми.

Показано, что системы первого и второго приближений описывают хорошо известные в инерциальной навигации шулеровские колебания и так называемые «суточные» модуляции этих колебаний на длительных интервалах времени. Члены третьего приближения проявляются в виде навигационных ошибок порядка нескольких метров, что много меньше типичных ошибок БИНС, имеющих порядок сотен метров или километра.

Из результатов моделирования следует целесообразность использования линейной системы уравнений ошибок БИНС второго приближения (4) в качестве основной модели ошибок БИНС авиационного применения и допустимость использования простейшей модели (3) для описания погрешностей БИНС на сравнительно коротких интервалах времени.

Литература

1. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. – 136 с.
2. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. 2-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2012. – 172 с.
3. Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы инерциальных навигационных систем. Издательство Московского университета, 2020. – 164 с.
4. Голован А. А., Вавилова Н. Б., Козлов А. В., Папуша И. А., Зорина О. А., Кухтевич С. Е., Измайлов Е. А., Фомичев А. В. Интеграция спутниковой и инерциальной навигационных систем с учетом рассинхронизации данных и смещения спутниковой антенны. Опыт практической реализации. «Гироскопия и навигация» № 2, 2021. – С. 52–68.

**Правила оформления материалов,
направляемых для опубликования в журнале
«Навигация и управление летательными аппаратами»**

- Для опубликования в журнале принимаются статьи объемом до 30 с., а также краткие сообщения объемом до 5 стр.
- Статья должна иметь аннотацию не более 600 знаков, ключевые слова.
- На первой странице должны быть указаны: фамилии и инициалы авторов, полное название текста статьи без сокращений, проставлен индекс УДК.
- Материалы должны быть подготовлены в формате *.doc, лист А4, ориентация книжная (вертикальное расположение), шрифт Times New Roman, размер шрифта 12, интервал между строками одинарный, поля (мм): верхнее 22, нижнее 50, левое 30, правое 28, расположение страниц зеркальное. Установить «Автоматическую расстановку переносов». Переносы вручную не ставить.
- Формат формул в MathType или Microsoft Equation: Define Sizes, Full 12 pt, Subscript/Superscript 7 pt, Sub-Subscript/Superscript 5 pt, Symbol 18 pt, Sub-Symbol 12 pt.
- Иллюстрированный материал представляется в формате *.jpg, *.bmp, *.png (разрешение не менее 300 точек на дюйм) или в виде рисунка Word, фрагменты которого объединены в единый объект. Цветные иллюстрации приветствуются.
- В конце текста указывается информация о каждом авторе: Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, полное название и почтовый адрес организации, должность, контактные телефоны (служебный, мобильный или домашний), адрес электронной почты.
- В редакцию предоставляется электронный носитель с текстом статьи и ее распечатка в двух экземплярах, подписанная всеми авторами.
- К статье прилагается экспертное заключение о возможности ее открытой публикации, рецензия, лицензионный договор.
- Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Содержание

А. В. Вавилова, И. А. Папуша, А. В. Козлов, О. А. Зорина, С. Е. Кухтевич, А. В. Фомичев, Е. А. Измайлов	
Об оценке переменных дрейфов датчиков угловых скоростей БИНС фильтром Калмана в наземных испытаниях.....	2
М. Б. Алесов, И. М. Алесова	
Оптимальное по гибриднему критерию управление движением летательного аппарата при смене активного участка маршрута.....	16
В. Е. Куликов, М. С. Балякин, А. А. Кузин, М. В. Лобачев	
Фильтрация турбулентного ветра в задаче автоматической стабилизации приборной скорости полета тяжелого самолета.....	32
А. В. Фомичев	
О порядке членов уравнений ошибок БИНС и их вкладах в решения.....	46