МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И АВТОМАТИКИ (МИЭА)

НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

Под общей редакцией доктора технических наук А. Г. Кузнецова

Выпуск 33

Москва
2021

УДК 629.7.05

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ. КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА

Алексей Григорьевич КУЗНЕЦОВ, *д. т. н., доцент,*
Юрий Павлович НИКОЛАЕВ, *д-р физ.-мат. наук*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru

Цель анализа рассматриваемой в статье декомпозиции характеристического уравнения линейных систем — изучение влияния отдельных групп коэффициентов уравнения на запасы устойчивости системы в целом. Для исследования используются основные положения критерия Гурвица и их модификация (диагональные матрицы).

Результаты работы направлены на получение простых необходимых условий устойчивости, удобных для решения прикладных задач, в частности — для оперативного определения причин возникновения автоколебаний во время отработки новых систем управления.

Ключевые слова: *декомпозиция характеристического уравнения динамической системы, критерий Гурвица, диагональные матрицы Гурвица, геометрия областей устойчивости, простые необходимые условия устойчивости.*

DECOPOSITION AND ANALYSES OF CHARACTERISTIC EQUATION FOR LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH A FEEDBACK. HURWITZ CRITERION

Alexey G. KUZNETSOV, *D.Sc. in Engineering,*
Juriy P. NIKOLAEV, *D.Sc. in Physics and Mathematics*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: aomiea@aviapribor.ru

The intent of decomposition analyses of characteristic equation for linear systems considered in the article is to study individual equation coefficient groups influence on stability margin of the system as a whole. The main provisions of the Hurwitz criterion and their modification (diagonal matrices) are used for the study.

The results of the work are aimed at obtaining simple necessary stability conditions that are convenient for application problems solution. In particular, it will be useful for quick finding the causes of self-vibration during the new control system development.

Keywords: *dynamic system characteristic equation decomposition, Hurwitz criterion, Hurwitz diagonal matrices, stability domain geometry, simple necessary stability conditions.*

1. Задача декомпозиции характеристического уравнения

Рассматривается характеристическое уравнение стационарной динамической системы с обратной связью:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s_n = 0, \qquad a_n > 0. \tag{1}$$

Порядок n характеристического уравнения — произвольный.

Ставится задача *декомпозиции* заданного характеристического уравнения.

Т. е. нужно представить его в виде набора более простых уравнений одинакового порядка $1 < m < n$, где m — нечетное число (например, $m = 3$ или $m = 5$):

$$F_{m,q}(s) = a_q + a_{q+1} s^s + \ldots + a_{q+m} s^m = 0; \quad q = 0, \ldots, n-m, \quad 1 < m < n. \tag{2}$$

Подчеркнем, что все коэффициенты вспомогательных уравнений (2) являются соответствующими коэффициентами исходного характеристического уравнения.

Цель декомпозиции — изучение влияния отдельных групп коэффициентов уравнения (1) на запасы устойчивости системы в целом, на геометрию многомерной области устойчивости и ее сечений.

Такой поход позволяет осуществить преобразование сложной исходной задачи в совокупность более простых однотипных задач, удобных для анализа.

2. Теорема о декомпозиции характеристического уравнения

Теорема 1. Для устойчивости системы с характеристическим полиномом $P(s)$ необходимо, чтобы все корни каждого из вспомогательных уравнений (2) были расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Доказательство теоремы основано на использовании некоторых положений математического аппарата критерия устойчивости Гурвица [1-3].

Но прежде чем перейти к доказательству теоремы, рассмотрим базовые положения теории Гурвица подробнее.

3. Матрица Гурвица и критерий устойчивости Гурвица

Пусть дан полином с вещественными коэффициентами:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s_n, \qquad a_n > 0. \tag{3}$$

Тогда квадратная матрица

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

называется **матрицей Гурвица**, соответствующей полиному $P(s)$.

Пусть для полинома $P(s)$ задан определитель Гурвица:

$$Y = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Воспользуемся следующими определениями теории матриц.

Рассматривается квадратная *матрица A*, *n*-го порядка. *Минором* некоторого элемента a_{ij} *определителя матрицы* называется *определитель* $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij}. Обозначается M_{ij}.

Диагональным минором матрицы A называется минор, диагональные элементы которого являются диагональными элементами матрицы *A*.

Главным диагональным минором матрицы A порядка *k* называется минор, составленный из первых *k* строк и *k* столбцов матрицы *A*.

Гурвиц в 1895 году установил [1–3], что полином (3) устойчив (то есть все его корни имеют строго отрицательную вещественную часть) тогда и только тогда, когда все *главных* диагональных миноров матрицы (4), при условии $a_n > 0$, были положительны:

$$\Delta_1(s) = |a_1| = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2 - a_1(a_1 a_4 - a_0 a_5) > 0$$

и так далее.

Миноры $\Delta_k(s),\ k = 1, 2\dots$ называются определителями Гурвица.

Перейдем к доказательству *Теоремы 1*. Рассматриваться будут только два частных случая, наиболее важных для практических приложений.

4. Доказательство *Теоремы 1* для частного случая *m* = 3

В данном частном случае, т. е. при $m = 3$, уравнения (2) имеют вид:

$$F_{3,q}(s) = a_q + a_{q+1}s^s + \dots + a_{q+3}s^3 = 0; \quad q = 0, \dots, n-3. \quad (6)$$

Проанализируем устойчивость уравнений (6) при $q = 0, \dots, n-3$.

Пусть $q = 0$. Необходимым условием гурвицевости характеристического полинома (3) является, в соответствии с критерием Гурвица, выполнение неравенства:

$$\Delta_{2,(n)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0. \quad (7)$$

Из неравенства (7) следует, что все корни уравнения $F_{3,0}(s) = a_0 + a_1 s^s + a_2 s^2 + a_3 s^3 = 0$ лежат в левой полуплоскости.

Пусть $q = 1$. Примем $a_0 = 0$, тогда: $P_{(n-1)}(s) = a_1 + a_2 s + \dots + a_n s^{n-1}$. Необходимым условием гурвицевости характеристического полинома $P_{(n-1)}(s)$ будет, в соответствии с критерием Гурвица, выполнение неравенства:

$$\Delta_{2,(n-1)} = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0. \quad (8)$$

Из неравенства (8) следует, что все корни уравнения $F_{3,1}(s) = a_1 + a_2 s^s + a_3 s^2 + a_4 s^3 = 0$ лежат в левой полуплоскости.

И так далее.

Наконец, пусть $q = n - 3$, тогда $P_3(s) = a_{n-3} + a_{n-2}s + a_{n-1}s^2 + a_n s^3$.

Необходимым условием гурвицевости характеристического полинома $P_3(s)$ будет, в соответствии с критерием Гурвица, выполнение неравенства:

$$\Delta_{2,(3)} = \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0. \quad (9)$$

Теорема 1 для частного случая $m = 3$ доказана.

5. Доказательство *Теоремы 1* для частного случая $m = 5$

При $m = 5$ уравнения (2) имеют вид:

$$F_{5,q}(s) = a_q + a_{q+1}s^s + \ldots + a_{q+5}s^5 = 0; \quad q = 0,\ldots,n-5. \tag{10}$$

Проанализируем устойчивость уравнений (10) при $q = 0,\ldots,n-5$.

Пусть $q = 0$. Необходимым условием гурвицевости характеристического полинома (3) является, в соответствии с критерием Гурвица, выполнение неравенств:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3(s) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0. \tag{11}$$

Но если неравенства (11) выполняются, то все корни вспомогательного уравнения $F_{5,0}(s) = a_0 + a_1s^s + \ldots + a_5s^5 = 0$ лежат в левой полуплоскости (см., например, [4]).

Пусть $q = 1$. Примем $a_0 = 0$, тогда: $P(s) = a_1 + a_2s + \ldots + a_ns^{n-1}$. Необходимым условием гурвицевости характеристического полинома $P(s)$ в данном случае будет, в соответствии с критерием Гурвица, выполнение неравенств:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3(s) = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} > 0. \tag{12}$$

Из неравенств (12) следует, что все корни вспомогательного уравнения $F_{5,1}(s) = a_1 + a_2s + a_3s^2 + \ldots + a_6s^5 = 0$ лежат в левой полуплоскости.

И так далее. Наконец, пусть $q = n - 5$, тогда

Необходимым условием гурвицевости характеристического полинома $P(s)$ будет, в соответствии с критерием Гурвица, выполнение неравенства:

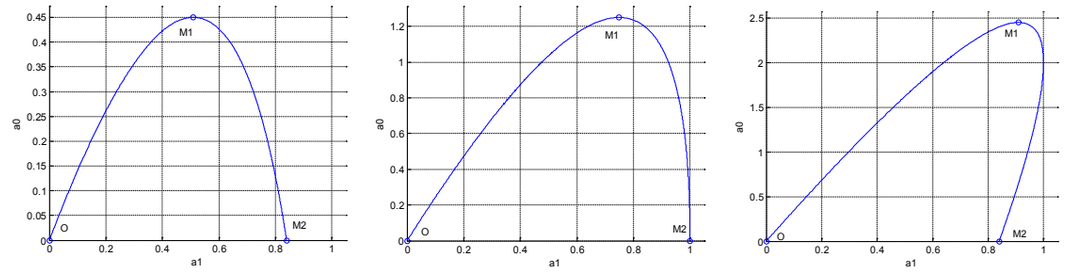
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3(s) = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} > 0. \tag{13}$$

Теорема 1 для частного случая $m = 5$ доказана.

Доказательство *Теоремы 1* для общего случая в целом аналогично приведенному выше доказательству для частных случаев $m = 3$, $m = 5$.

6. Геометрия областей устойчивости для систем порядка $n = 5$

Геометрия области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для характеристического уравнения пятой степени $P(s) = a_0 + a_1s + \ldots + a_5s^5 = 0$ иллюстрируется рис. 6.1.



$\mu_2 = 0{,}3$ $\mu_2 = 0{,}5$ $\mu_2 = 0{,}7$

Рис. 6.1. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для уравнения $P(s) = a_0 + a_1s + \ldots + a_5s^5 = 0$ при различных значениях параметра $\mu_2 = a_3a_4 / a_5$

Из приведенных рисунков следует, что геометрия области устойчивости существенно зависит от величины коэффициента μ_2.

Можно ли говорить о некоторой идеальной граничной кривой области устойчивости?

Определение. В качестве «идеальной» граничной кривой на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для характеристического уравнения пятой степени $P(s) = a_0 + a_1s + \ldots + a_5s^5 = 0$ принимается граничная кривая для аналогичного уравнения четвертой степени $P(s) = a_0 + a_1s + \ldots + a_4s^4 = 0$.

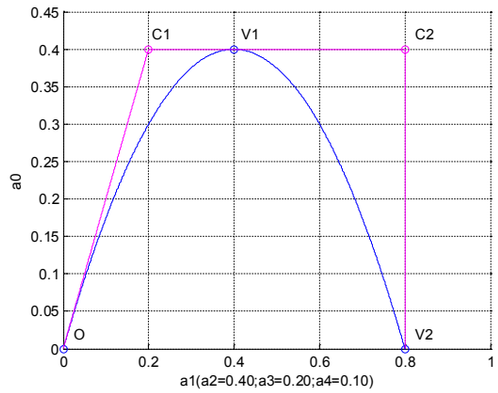


Рис. 6.2. Область устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 для уравнения $P(s) = a_0 + a_1s + \ldots + a_4s^4 = 0$

Граничная кривая на рис. 6.2 представляет собой (независимо от конкретных значений коэффициентов a_2, a_3, a_4) *параболу* OV_1V_2, проходящую через начало координат и точку V_2 на оси абсцисс с координатами $a_0(V_2)=0,\ a_1(V_2)=a_2a_3/a_4$. Координаты точки экстремума граничной параболы: $a_1(V_1)=a_2a_3/a_4,\ a_0(V_1)=a_2^2/4a_4$.

Из сравнительного анализа граничных кривых рис. 6.1 и граничной кривой рис. 6.2 следует, что граничная кривая исследуемой области устойчивости для характеристического уравнения пятой степени $P(s)=a_0+a_1s+...+a_5s^5=0$ будет близка к граничной кривой рис. 6.2 при выполнении условия:

$$\mu_2=a_3a_4/a_5<\mu_2^{\text{доп}}, \tag{14}$$

где

$$\mu_2^{\text{доп}}\cong 0{,}3.$$

7. Алгебраический комбинированный запас устойчивости

Запас устойчивости САУ

Параметры системы управления в условиях ее отработки (летные испытания) и эксплуатации могут отличаться (по тем или иным причинам) от расчетных значений. Эти вариации параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости.

Поэтому стремятся спроектировать систему так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости.

Степень этого удаления называют *запасом устойчивости*.

Наибольшее применение на практике для систем с одним входом / одним выходом (SISO — Single Input Single Output) получили частотные запасы устойчивости (запасы устойчивости по модулю и фазе — см. [5] и др.). Для более сложных систем применяются и другие подходы.

Для исследования геометрии многомерных областей устойчивости динамических систем с обратной связью предлагается новое понятие (новый термин): *алгебраический комбинированный запас устойчивости*.

Формула для алгебраического комбинированного запаса устойчивости:

$$\mu_k=\frac{a_ka_{k+3}}{a_{k+1}a_{k+2}},\quad \mu_k\in(0,1],\quad k=0,...,n-3. \tag{15}$$

Необходимым условием устойчивости полинома является выполнение неравенств:

$$a_k<\mu_k\frac{a_{k+1}a_{k+2}}{a_{k+3}},...,\ k=0,1,...,n-3,\ \mu_k\in(0,1). \tag{16}$$

8. Анализ геометрии областей устойчивости в пространстве коэффициентов

Теорема 2 [6,7]. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ коэффициентов характеристического полинома при *нечетных* значениях *n* и при фиксированных (заранее заданных) значениях трех старших коэффициентов a_{n-2}, a_{n-1}, a_n существует единственная точка, такая, что все ее координаты являются наибольшими (для граничной поверхности многомерной области устойчивости) и определяются формулами:

$$\max a_{2k}=\binom{(n-1)/2}{k}a_{n-1}\left(\frac{2}{(n-1)}\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)^{(n-1)/2-k},\quad k=0,\ 1,...,(n-3)/2, \tag{17}$$

$$\max a_{2k+1}=\binom{(n-1)/2}{k}a_{n}\left(\frac{2}{(n-1)}\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)^{(n-1)/2-k},\quad k=0,1,...,(n-5)/2, \tag{18}$$

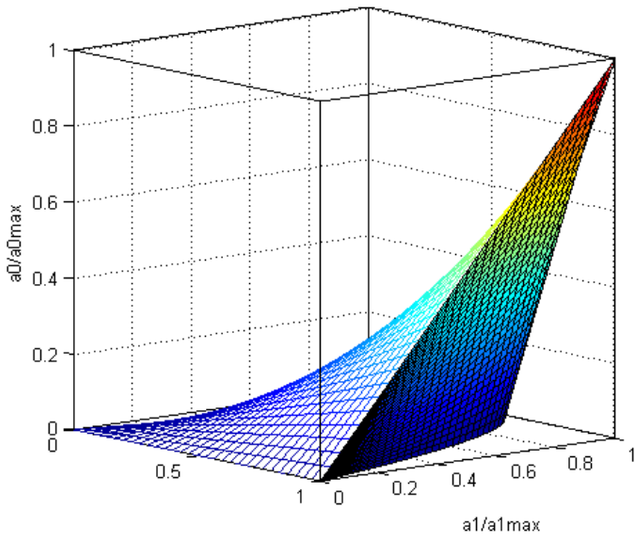
где

$$\binom{(n-1)/2}{k}=\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)!}k!$$

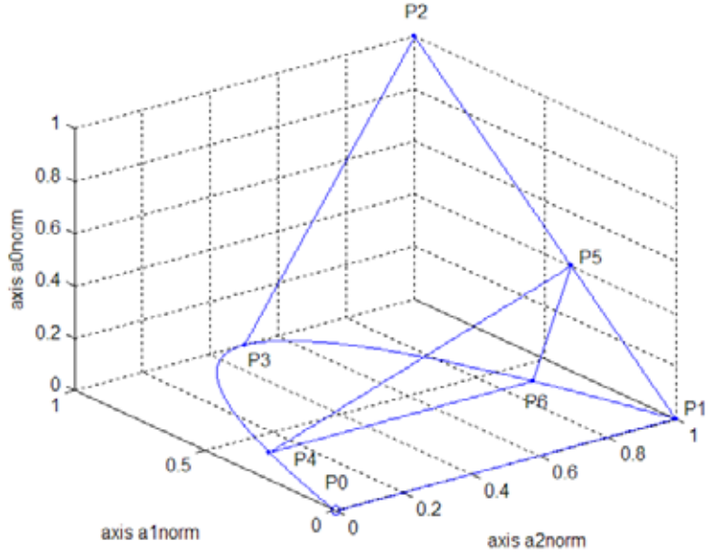
При $n=5$ точная верхняя граница для координат точек области устойчивости (при заданных трех старших коэффициентах a_3, a_4, a_5) определяется формулами:

$$\max a_0=\frac{a_3^2a_4}{4a_5^2},\quad \max a_1=\frac{a_3^2}{4a_5},\quad \max a_2=\frac{a_3a_4}{a_5},\quad a_3,a_4,a_5\in R_+. \tag{19}$$

Трехмерная область устойчивости (а) в пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2 и ее конструктивные параметры (б), $n=5$, представлены на рис. 8.1 (стр. 10).



а)



б)

Рис. 8.1. Трехмерная область устойчивости (а) и ее конструктивные параметры (б), n = 5

Найдем значения алгебраических запасов устойчивости μ_2, μ_1, μ_0 для вершины трехмерной области устойчивости.

Воспользуемся формулами (15) для алгебраического комбинированного запаса устойчивости. При $n = 5$ имеем:

$$a_2 = \mu_2 \frac{a_3 a_4}{a_5}, \quad a_1 = \mu_1 \frac{a_2 a_3}{a_4}, \quad a_0 = \mu_2 \frac{a_1 a_2}{a_3}, \quad \mu_k \in (0,1]. \tag{20}$$

Из формул (15), (19), (20) получим:

$$a_2 = \mu_2 \frac{a_3 a_4}{a_5}, \quad \mu_2 = 1; \quad a_1 = \mu_1 \frac{a_2 a_3}{a_4}, \quad \mu_1 = \frac{1}{4}; \quad a_0 = \mu_0 \frac{a_1 a_2}{a_3}, \quad \mu_0 = 1. \tag{21}$$

9. Заключение

Теорема 1 является основным результатом данной работы и представляет собой, по-видимому, принципиально новый результат в теории устойчивости. Доказательство теоремы производится с использованием основных положений критерия Гурвица.

Поставлена и решена задача построения простой, удобной для разработчиков «модели» матрицы Гурвица. Модель предназначена для решения локальной, но важной задачи анализа необходимых условий устойчивости динамической системы произвольного порядка. В качестве такой модели предложено использовать блочно-диагональные матрицы Гурвица.

Отметим, что данная работа является продолжением статьи авторов [8]. Отдельные частные случаи *Теоремы 1* рассматривались ранее — см. [9—14].

Приложение.

БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ ГУРВИЦА. ПРОСТЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим построение простой, удобной для разработчиков «модели» матрицы Гурвица. Модель предназначена для решения локальной задачи анализа необходимых условий устойчивости динамической системы произвольного порядка. В качестве такой модели предлагается использовать блочно-диагональные матрицы Гурвица.

Предварительно сформируем из матрицы Гурвица трехдиагональную матрицу (матрицу Якоби [15, 16]):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & & \\ & a_1 & \dots & \dots & \\ & & \dots & \dots & a_n \\ & & & a_{n-3} & a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}.1)$$

в которой во всех местах, кроме главной диагонали и двух соседних с ней, стоят нули.

Элементами главной диагонали матрицы (3.2) являются коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Отметим, что определитель трехдиагональной матрицы задается *рекуррентной* формулой [15,16], что затрудняет применение трехдиагональной матрицы для решения *аналитических* задач.

Поэтому рассмотрим другой подход, связанный с использованием *блочных* диагональных матриц. Сформируем из построенной диагональной матрицы последовательность блоков, каждый из которых состоит из четырех коэффициентов:

$$(a_1, a_3, a_0, a_2), (a_2, a_4, a_1, a_3), \dots, (a_{n-2}, a_n, a_{n-3}, a_{n-1}).$$

Каждому блоку соответствует свой определитель:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_{n-3} = \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (\text{П}.2)$$

Построим из рассмотренных блоков блочно-диагональную матрицу (Block Diagonal Matrix):

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{A}_m \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}.3)$$

где A_k — k-квадратная матрица для всех $k = 1, \dots, m$.

Пример. Диагональная матрица D и соответствующая ей блочно-диагональная матрица A для $n = 1$ имеют вид:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & \\ & a_1 & a_3 & a_5 \\ & & a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & & & & \\ a_0 & a_2 & & & & \\ & & a_2 & a_4 & & \\ & & a_1 & a_3 & & \\ & & & & a_3 & a_5 \\ & & & & a_2 & a_4 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П}.4)$$

Воспользуемся известной формулой для определителя блочно-диагональной матрицы:

$$\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}_1 \times \dots \times \det \mathrm{A}_m. \qquad (\text{П}.5)$$

Получим искомую формулу для определителя блочно-диагональной матрицы:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \times \dots \times \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (\text{П}.6)$$

Лемма П.1. Пусть для всех определителей в формуле (П.2) выполняется условие:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{k+1} & a_{k+3} \\ a_k & a_{k+2} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-3.$$

Тогда определитель соответствующей блочно-диагональной матрицы будет положителен:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \times \ldots \times \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0 \qquad (\text{П}.7)$$

и система с характеристическим полиномом $P(s)$ будет устойчива.

Доказательство утверждения следует, в частности, из формулы (П.6).

Пятидиагональная матрица Гурвица

Сформируем из матрицы Гурвица пятидиагональную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & & & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & & & \\ & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & & \\ & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}.8)$$

в которой во всех местах, кроме главной диагонали и четырех соседних с ней (две слева и две справа), стоят нули.

Элементами главной диагонали матрицы (П.8) являются коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Сформируем из построенной диагональной матрицы последовательность блоков.

Каждому блоку соответствует свой определитель третьего порядка:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-4} = \begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \\ a_{n-5} & a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (\text{П}.9)$$

Построим из созданных блоков блочно-диагональную матрицу:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{A}_m \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}.10)$$

где A_k — k-квадратная матрица для всех $k = 1, \ldots, m$.

Воспользуемся известной формулой для определителя блочно-диагональной матрицы:

$$\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}_1 \times \ldots \times \det \mathrm{A}_m. \qquad (\text{П}.11)$$

В итоге получим искомую формулу для определителя блочно-диагональной матрицы

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \times \ldots \times \begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \\ a_{n-5} & a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (\text{П}.12)$$

Лемма П.2. Пусть для всех определителей в формуле (П.12) выполняется условие: $\Delta_k > 0, k = 0, \ldots, n-4$. Тогда определитель соответствующей блочно-диагональной матрицы будет положителен: $\det \mathrm{A} > 0$ и система с характеристическим полиномом $P(s)$ будет устойчива.

Доказательство утверждения следует, в частности, из формулы (П.12).

Литература

1. Hurwitz A. Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt // Mathematische Annalen: magazin. – 1895. – Bd. 46, Nr. 2. – P. 273–284.

2. Gantmacher F. R. Applications of the Theory of Matrices. – 1959. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 5-е изд. М.: Физматлит, 2004.

3. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. инст. имени Стеклова В. А., т. 24. Изд-во АН СССР, 1949.

4. Многорежимные и нестационарные системы автоматического управлении. Под ред. акад. Б. Н. Петрова. М.: Машиностроение, 1978. – С. 93–118.

5. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. Пер. с англ. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. Phillips C., Harbor R. Feedback Control Systems, 4th Edition. 2000. Prenticehall, Inc. – 2000.

6. Николаев Ю. П. Наибольшие значения основных параметров и условие ограниченности характеристической области устойчивости линейных систем // АиТ, 1993, №12. С. 33–43. Yu. P. Nikolaev. Maximum values of the principal parameters and the boundedness condition for the characteristic domain of asymptotic stability of linear systems Automat. and Remote Control. – 1993. 54:12. – P. 1751–1759.

7. Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П. Анализ геометрии многомерных областей устойчивости линейных систем с обратной связью // Навигация и управление летательными аппаратами, 2018. Вып. 22. – С. 2–9.

8. Кузнецов А. Г., Николаев Ю. П. Критерий Гурвица. Модификация // М.: МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами, 2020. Вып. 28. – С. 2–10.

9. Constantinescu F. Relations entre les coefficients de deux polynomes dout les racines se separent // Casopis pro pestovani matematiky. – 1964. 89, Nr.1. – P. 1–3.

10. Лебедев А. Н. Простой грубый критерий устойчивости линейных непрерывных систем. Изв. вузов, Приборостроение, 1968, №3. – С. 51–54.

11. Лебедев А. Н. Усиление простого грубого критерия устойчивости. Изв. вузов, Приборостроение, 1975, т. 18, №3. – С. 29–31.

12. Липатов А. В. Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия гурвицевости полиномов // Дифференц. уравнения, 1976. — Т. XII. №12. – С. 2269–2270.

13. Липатов А. В., Соколов Н. И. О некоторых достаточных условиях устойчивости и неустойчивости линейных непрерывных стационарных систем // АиТ, 1978, №9. – С. 30–37.

14. Немировский А. С., Поляк Б. Т. Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование // АиТ, 1994, №11. – С. 113–119.

15. El-Mikkawy M. E. A. On the inverse of a general tridiagonal matrix // Applied Mathematics and Computation. — 2004. — Т. 150, Nr. 3. — P. 669–679.

16. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Наука, 1996.

УДК 629.7.015

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ВИРТУАЛЬНЫХ ЛЕТНЫХ ИСПЫТАНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Александр Витальевич ГРЕБЁНКИН, *д. т. н.,*
Ольга Борисовна КЕРБЕР, *к. т. н., с. н. с.*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-Mail: inbox@aomiea.ru,
Александр Александрович ЛУШНИКОВ
Группа компаний «Волга-Днепр»

В статье рассматривается сценарий захода на посадку и ухода на второй круг с реализацией непрерывного адаптивного управления траекторным движением в вертикальной плоскости на режимах стабилизация высоты, захвата и стабилизация глиссады, перелома траектории и адаптивный выход на заданную высоту круга.

Решение задач траекторного управления рассматривается в контексте разработки логики и законов адаптивного управления тягой двигателей по критерию оптимизации потребного режима работы двигателей с оценкой эффективности комплексного адаптивного управления траекторным движением и тягой двигателей в сложных многофакторных ситуациях полета магистрального самолета.

Ключевые слова: *сценарий захода на посадку и ухода на второй круг, непрерывное адаптивное управление траекторным движением и тягой двигателей, сложные многофакторные ситуации полета.*

APPLICATION OF VIRTUAL FLIGHT TESTS TECHNOLOGY IN RESEARCH OF ENERGY APPROACH TO TRAJECTORY CONTROL

Alexander V. GREBYONKIN, *D. Sc. in Engineering,*
Olga B. KERBER, *PhD in Engineering*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-Mail: inbox@aomiea.ru,
Alexander A. LUSHNIKOV
'Volga-Dnepr Group'

The article considers landing approach and go-around scenario with realization of continuous adaptive control of flight path in vertical plane on altitude hold, glideslope capture and control, arch of trajectory and an adaptive go-around circle height capture modes.

Addressing the problems of trajectory control is considered in a context of working out of engine thrust adaptive control logic and laws by criterion of necessary engines operating mode optimization with the estimation of the efficiency of flight path and engine thrust complex adaptive control under the inflight multi-factor abnormal circumstances for the long-range aircraft.

Keywords: *landing approach and go-around scenario, flight path and engine thrust continuous adaptive control, inflight multi-factor abnormal circumstances.*

Введение

В основе технологии виртуальных летных испытаний (ТВЛИ) заложены возможности имитационной математической модели (ИММ) «Экипаж — Самолет — Автоматическая система штурвального управления (АСШУ) — САУ — Внешняя среда». Обобщенная структурная схема ИММ показана на рис. 1.

Различные сложные многофакторные ситуации полета в математической модели представляются в виде сценария, элементы которого находятся в блоке формирования полетных ситуаций и действий экипажа. Основными элементами сценария являются **события полета (Е)**, **задачи (Т) и процедуры (Р) управления** [4].

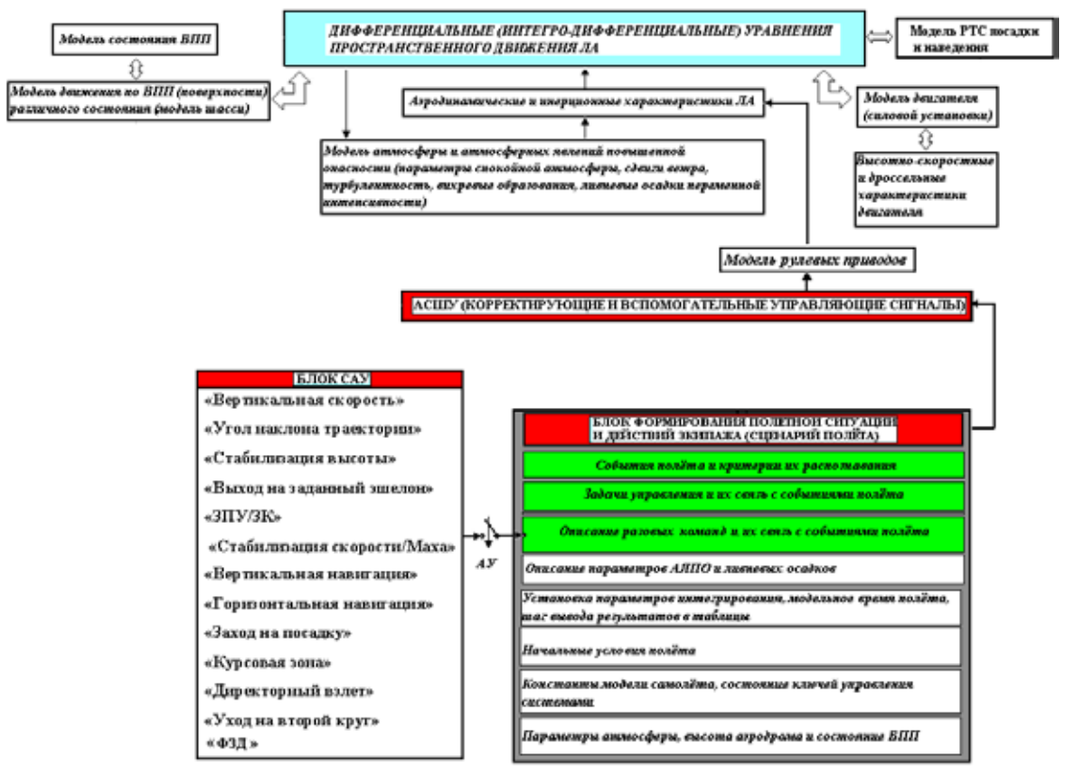


Рис. 1. Обобщенная структурная схема имитационной математической модели

На рис. 2 показан сценарий захода на посадку и ухода на 2-й круг. Основой сценария являются события полета, которые распознаются по установленным критериям распознавания. В рамках распознанных событий полета функционируют задачи и процедуры управления.

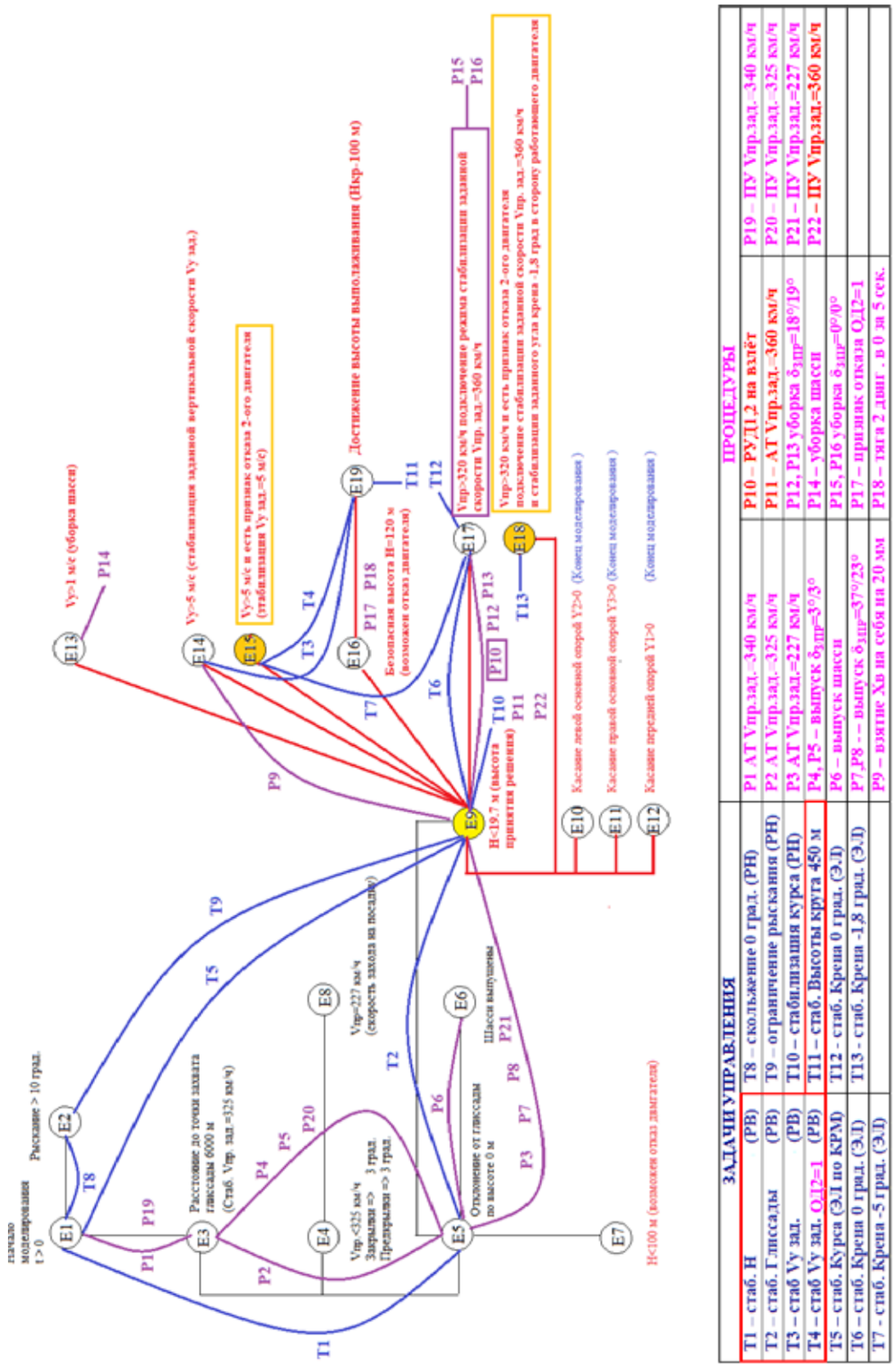


Рис. 2. Сценарий захода на посадку с уходом на 2-й круг

ТВЛИ позволяет проводить исследования, направленные на поиск решений оптимального штурвального и автоматического управления в сложных многофакторных (опасных) ситуациях полета, включая исследования по синтезу законов управления и возможности использования методов адаптивного управления непрерывно на различных этапах полета, включая возможность использования нескольких режимов управления с переходом от штурвального к автоматическому управлению, в ожидаемых условиях эксплуатации и особых ситуациях полета.

В рамках ТВЛИ рассматривается задача адаптивного управления траекторным движением магистрального самолета типа Ту-204СМ в вертикальной плоскости (заход на посадку и уход на 2-й круг) с реализацией технологии адаптивного управления тягой двигателей.

Постановка задачи

Целью настоящих исследований является повышение безопасности полетов, эффективности и экономичности эксплуатации магистральных самолетов путем формирования оптимальных комплексных управляющих воздействий на руль высоты и тягу двигателей при заходе на посадку и уходе на 2-й круг [2].

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Разработка сценария захода на посадку и ухода на второй круг с реализацией непрерывного адаптивного управления в вертикальной плоскости на режимах:
   - стабилизация высоты,
   - захват и стабилизация глиссады,
   - перелом траектории и адаптивный выход на заданную высоту круга.
2. Разработка способа адаптивного управления траекторным движением в вертикальной плоскости при выходе на заданную высоту.
3. Разработка логики и законов адаптивного управления тягой двигателей по критерию оптимизации потребного режима работы двигателей в фактических многофакторных ситуациях полета.
4. Оценка эффективности комплексного адаптивного управления траекторным движением и тягой двигателей в сложных многофакторных ситуациях полета магистрального самолета.

Для реализации энергетического метода траекторного управления предлагается способ управления, направленный на минимизацию угла $\varepsilon_ц$

между вектором траекторной скорости и направлением на воображаемую точку, которая движется по заданной траектории на заданном удалении от центра масс самолета (см. рис. 3).

Этот способ управления позволяет изменять манеру управления при движении самолета в вертикальной и горизонтальной плоскости с учетом изменяющихся условий полета.

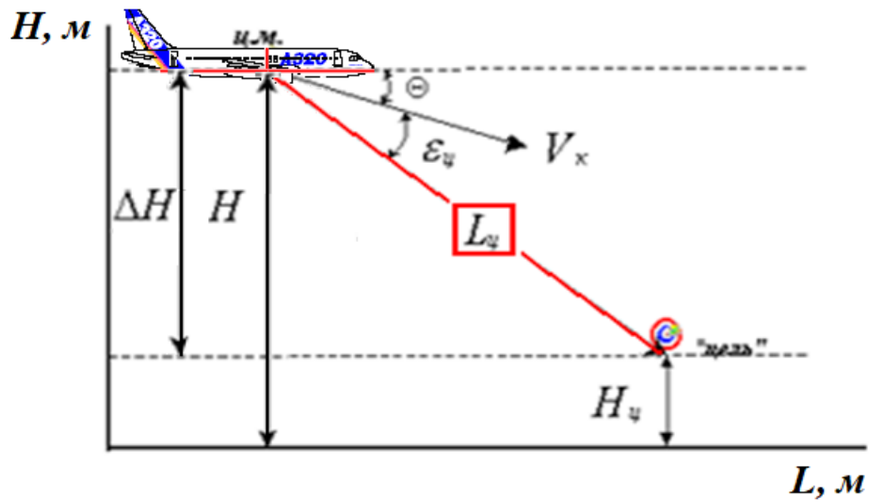


Рис. 3. Управление траекторным движением в вертикальной плоскости

Угол $\varepsilon_ц$ и скорость его изменения $\dot{\varepsilon}_ц$ зависит от расстояния до «цели» ($L_ц$) и величины линейного отклонения от заданной траектории по высоте (ΔH):

$$\varepsilon_ц = \Theta + \arcsin\left(\frac{\Delta H}{L_ц}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\varepsilon}_ц = \dot{\Theta} + \frac{\dot{H}}{\sqrt{L_ц^2 - \Delta H^2}}. \tag{2}$$

С учетом реакции на $\varepsilon_ц$ и $\dot{\varepsilon}_ц$ закон управления ручкой управления по тангажу (или штурвальной колонкой) можно представить в следующем виде:

$$X_{шк_i} = X_{шк_{i-1}} + K_{\varepsilon_ц}\varepsilon_ц + K_{\dot{\varepsilon}_ц}\dot{\varepsilon}_ц + K_{\omega_ц}\omega_z + K_{\dot{\omega}_ц}\dot{\omega}_z, \tag{3}$$

где: $X_{шк_i}$ — положение ручки управления по тангажу на текущем шаге управления,

$X_{шк_{i-1}}$ — положение ручки управления по тангажу на предыдущем шаге управления,

$K_{\omega_ц}\omega_z + K_{\dot{\omega}_ц}\dot{\omega}_z$ — суммарная реакция на угловую скорость и ускорение тангажа.

При заданных и неизменных коэффициентах усиления $K_{\varepsilon_ц}, K_{\dot{\varepsilon}_ц}, K_{\omega_ц}, K_{\dot{\omega}_ц}$ характер управляющих сигналов будет зависеть от параметра $L_ц$ (см. рис. 3):

— при увеличении $L_ц$, угол $\varepsilon_ц$ уменьшается, стабилизация заданной траектории движения становится менее строгой (более затянутый процесс),

— при уменьшении $L_ц$, угол $\varepsilon_ц$ увеличивается, стабилизация заданной траектории движения становится более строгой (менее затянутый процесс с быстрым переходом на заданную траекторию движения).

Очевидно, что закон управления (3) позволяет обеспечить движение самолета по любой траектории, заданной движением «цели» в вертикальной плоскости, при условии минимизации угла между вектором траекторной скорости и направлением на «цель». На рис. 4 показана траектория движения самолета на этапах стабилизации высоты (задача управления Т1), захвата и стабилизации глиссады (задача управления Т2) и на этапе ухода на второй круг, включающих в себя подэтапы перелома траектории, выход на высоту круга и стабилизация высоты круга (задача управления Т3).

В задачах Т1 и Т2 «цель» движется на заданном неизменном расстоянии от центра масс самолета ($\boldsymbol{L_{ц_{баз}}}$ **= 275 м**), обеспечивая тем самым заданную (оптимальную) манеру управления на участках стабилизации высоты круга (Т1 — «цель» движется на постоянной высоте $H_{зад} = H_{кр}$) и стабилизации глиссады (Т2 — «цель» движется на высоте глиссады $H_{зад} = H_{гл}$).

При достижении высоты принятия решения об уходе на 2-й круг ($H \le H_{пр}$) подключается задача Т3, в которой заложена логика формирования заданной величины $L_ц$ в зависимости от запаса полной энергии самолета, который оценивается по величине изменения воздушной скорости. Изменение воздушной скорости при неизменном режиме работы двигателей достигается изменением градиента набора высоты или снижения.

При этом идентифицируются два возможных состояния:

- **Состояние 1** — запаса энергии достаточно для разгона и набора заданной высоты эшелона (после перелома траектории ($V_y > 1$ м/с) и допустимое ускорение <u>больше</u> пороговой величины 0,2 м/с^2);

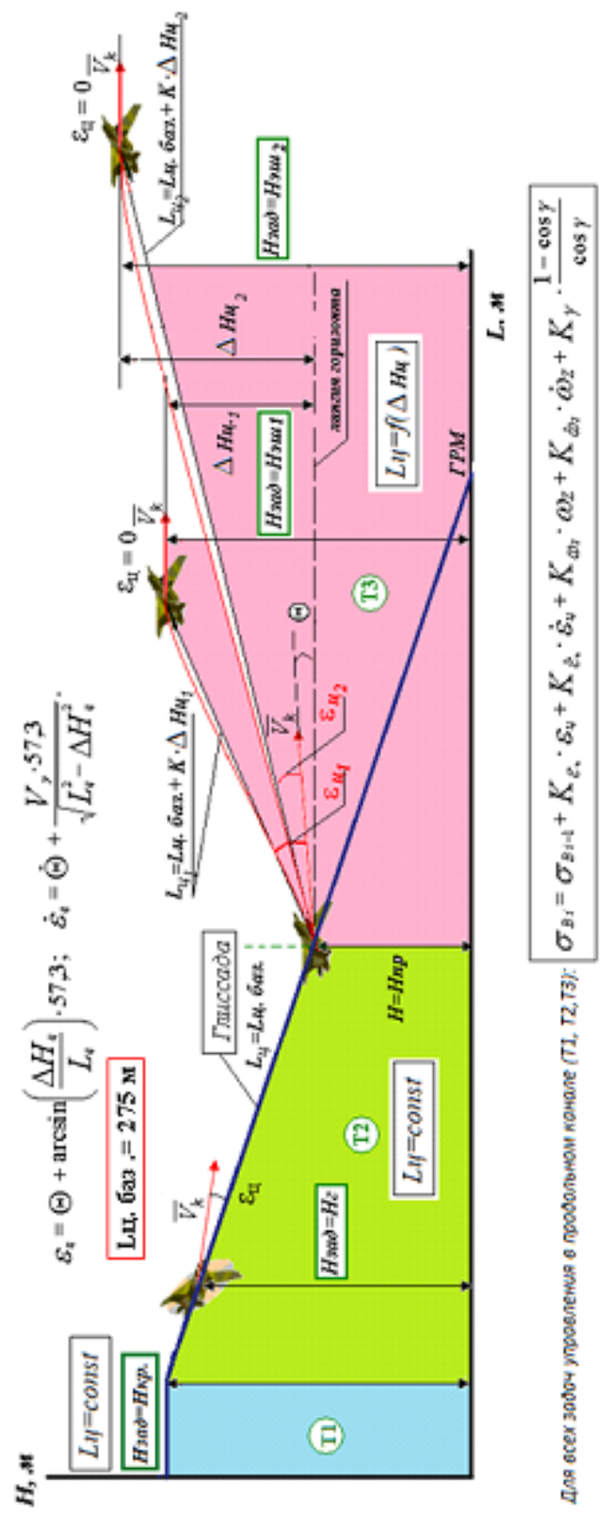


Рис. 4. Заход на посадку и уход на второй круг с применением терминального способа траекторного управления в продольном движении

- **Состояние 2** — запаса энергии недостаточно для разгона и набора заданной высоты эшелона (после перелома траектории (V_y > 1 м/с) и допустимое ускорение меньше пороговой величины 0,2 м/с^2).

При идентификации **состояния 1** выполняются следующие действия:

1. При достижении высоты принятия решения об уходе на второй круг определяется **один раз** максимальное потенциальное приращение высоты:

$$\Delta H_{\max} = H_{\text{эш}} - H_{\text{пр}}.$$

2. Определяется один раз максимальное расстояние до «цели»

$$L_{\text{ц}_{\max}} = L_{\text{ц}_{\text{баз}}} + K_L\left(H_{\text{эш}} - H_{\text{пр}}\right),$$

где: $K_L = 1 + 0{,}004 \cdot \Delta H_{\max}$ — обеспечивает требование к минимальному градиенту набора высоты, минимальному запасу полной энергии самолета и ограничение вертикальной скорости;

$L_{\text{ц}_{\text{баз}}} = 275$ м — определяет заданное качество управления на этапах стабилизации высоты и глиссады.

3. Для автомата тяги задается заданная скорость, соответствующая скорости полета с убранной механизацией крыла: $V_{\text{пр. зад}}$ = 360 км/ч.

4. Определяется текущий добавок к $L_{\text{ц}}$ в зависимости от фактического изменения высоты полета:

$$\Delta H_L = K_L\left(H - H_{\text{пр}}\right).$$

5. Определяется текущее значение расстояния до «цели»:

$$L_{\text{ц}_1} = L_{\text{ц}_{\max}} - \Delta H_L.$$

6. Определяется фильтрованное значение скорости изменения воздушной скорости в зависимости от атмосферных возмущений:

$$\dot{V} = \frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta T_{\text{АСШУ}}}; \qquad \tilde{\dot{V}} = \dot{V}\frac{1}{0.1p + 1}.$$

При идентификации **состояния 2** выполняются следующие действия:

7. Формируется новое значение расстояния до «цели», учитывающее изменение приборной скорости

$$L_{\text{ц}} = L_{\text{ц}_2}; \qquad L_{\text{ц}_2} = L_{\text{ц}_{\max}} - \Delta H_L + K_V\left|\Delta V_{\text{пр}}\right|,$$

где: $K_V = \begin{cases} 25, & \text{если нет признака отказа двигателя;} \\ 250, & \text{если принят признак отказа двигателя;} \end{cases}$

$$\Delta V_{\text{пр}} = V_{\text{пр}} - \Delta V_{\text{пр. зад}}.$$

8. Если достигнута высота круга ($H > H_{\text{зад.}}$), то расстояние до «цели» принимает значение базовой величины

$$L_{\text{ц}_{\max}} = L_{\text{ц}_{\text{баз}}}.$$

В рамках сценария выполняются следующие задачи и процедуры управления:

1. До захвата глиссады:

- Управление рулем высоты: стабилизация заданной высоты круга ($H_{\text{ц}} = H_{\text{кр}}$)

$$\boxed{X_{\text{шк}_i} = X_{\text{шк}_{i-1}} + K_{\omega_z}\omega_z + K_{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z + K_{\varepsilon_{\text{ц}}}\varepsilon_{\text{ц}} + K_{\dot{\varepsilon}_{\text{ц}}}\dot{\varepsilon}_{\text{ц}},}$$

- Управление элеронами: стабилизация заданного курса по сигналам курсового радиомаяка:

$$X_{\text{ш}_i} = X_{\text{ш}_{i-1}} + K_{\varepsilon_k}\varepsilon_k + K_{\dot{\varepsilon}_k}\dot{\varepsilon}_k + K_{\omega_x}\omega_z + K_{\dot{\omega}_x}\dot{\omega}_z - K_{\psi}\dot{\psi},$$

- Управление рулем направления:

— минимизация скольжения, если угол рыскания менее 10°
или
— стабилизация угла рыскания, если угол рыскания больше или равен 10°

$$X_{\text{п}_i} = X_{\text{п}_{i-1}} + K_{\beta}\beta + K_{\omega_y}\omega_y + K_{\dot{\omega}_y}\dot{\omega}_y,$$

$$X_{\text{п}_i} = X_{\text{п}_{i-1}} + K_{\psi}\left(\psi - \psi_{\text{зад.}}\right) + K_{\dot{\psi}_y}\dot{\psi} + K_{\omega_y}\omega_y + K_{\dot{\omega}_y}\dot{\omega}_y,$$

- Управление тягой двигателей, направленное на стабилизацию заданной скорости:

— до достижения дальности до точки захвата глиссады $L_{\text{зг}}$ = 6000 м $V_{\text{пр. зад}}$ = 340 км/ч;
— при $L_{\text{зг}}$ < 6000 м, $V_{\text{пр. зад}}$ = 325 км/ч (выпуск закрылков и предкрылков в положение $\delta_{\text{з/пр}}$ = 3°/ 3°);
— при $L_{\text{зг}} \geq 0$ м, $V_{\text{пр.зад}}$ = 227 км/ч (выпуск закрылков и предкрылков в положение $\delta_{\text{з/пр}}$ = 37°/ 23° и выпуск шасси).

2. На этапе стабилизации глиссады:

- Управление рулем высоты по сигналам глиссадного радиомаяка ($H_ц = H_{гл}$)

$$\boxed{X_{шк_i} = X_{шк_{i-1}} + K_{\omega_z}\omega_z + K_{\dot\omega_z}\dot\omega_z + K_{\varepsilon_ц}\varepsilon_ц + K_{\dot\varepsilon_ц}\dot\varepsilon_ц.}$$

- Управление элеронами: стабилизация заданного курса по сигналам курсового радиомаяка

$$X_{ш_i} = X_{ш_{i-1}} + K_{\varepsilon_k}\varepsilon_k + K_{\dot\varepsilon_k}\dot\varepsilon_k + K_{\omega_x}\omega_x + K_{\dot\omega_x}\dot\omega_x - K_{\dot\psi}\dot\psi,$$

- Управление рулем направления: минимизация скольжения, если угол рыскания менее 10°

$$X_{п_i} = X_{п_{i-1}} + K_\beta\beta + K_{\omega_y}\omega_y + K_{\dot\omega_y}\dot\omega_y,$$

или стабилизация угла рыскания, если угол рыскания больше или равен 10°

$$X_{п_i} = X_{п_{i-1}} + K_\psi\left(\psi - \psi_{зад.}\right) + K_{\dot\psi_y}\dot\psi + K_{\omega_y}\omega_y + K_{\dot\omega_y}\dot\omega_y,$$

- Управление тягой двигателей, направленное на стабилизацию заданной скорости захода на посадку $V_{пр.\ зад} = 227$ км/ч.

3. При достижении высоты принятия решения:

Управление рулем высоты: выход на заданную высоту круга по траектории, зависящей от запаса полной энергии самолета ($H_ц = H_{кр}$)

$$\boxed{X_{шк_i} = X_{шк_{i-1}} + K_{\omega_z}\omega_z + K_{\dot\omega_z}\dot\omega_z + K_{\varepsilon_ц}\varepsilon_ц + K_{\dot\varepsilon_ц}\dot\varepsilon_ц.}$$

- Управление элеронами:

  — Если нет признака отказа двигателя: минимизация угла крена $\gamma_{зад} = 0°$.

  — Если получен признак отказа двигателя и $V_y > 5$ м/с:

  - при $V_{пр} < 320$ км/ч удержание заданного угла крена в сторону работающего двигателя $\boldsymbol{\gamma_{зад} = 5°}$.
  - при $V_{пр} > 320$ км/ч удержание заданного угла крена в сторону работающего двигателя $\boldsymbol{\gamma_{зад} = 1{,}8°}$.

$$X_{ш_i} = X_{ш_{i-1}} + K_\gamma\left(\gamma - \gamma_{зад}\right) + K_{\omega_x}\omega_x + K_{\dot\omega_x}\dot\omega_x.$$

- Управление рулем направления: удержание заданного угла пути

$$X_{п_i} = X_{п_{i-1}} + K_\psi\left(\psi - \psi_{зад}\right) + K_{\dot\Psi_y}\dot\Psi + K_{\dot\psi_y}\dot\psi + K_{\omega_y}\omega_y - K_z Z.$$

- Управление двигателями (два способа) [6]:

  1-й способ — на высоте принятия решения перевод РУД на взлетный режим с последующим подключением стабилизации $V_{пр.\ зад} = 360$ км/ч при разгоне до $V_{пр} = 320$ км/ч;

  2-й способ — на высоте принятия решения подключение стабилизации заданной скорости $V_{пр.\ зад} = 360$ км/ч.

- Управление шасси и закрылками:

1. После принятия решения по ухожу на 2-й круг закрылки и предкрылки переводятся во взлетное положение $\boldsymbol{\delta_{з/пр} = 18°/19°}$.

2. По условию $V_y > 1$ м/с — уборка шасси.

3. При увеличении скорости до $V_{пр} = 320$ км/ч закрылки и предкрылки убираются в крейсерское положение $\boldsymbol{\delta_{з/пр} = 0°/0°}$.

Управляющие действия летчика или САУ при реализации задач траекторного управления самолетом в вертикальной плоскости неизбежно оказывают влияние на формирование управляющих сигналов в канале тяги двигателей в процессе стабилизации заданной приборной скорости. В связи с этим целесообразно найти такой **способ управления тягой двигателей**, который позволяет учесть не только величину и характер изменения скорости полета, но и характер изменения высоты полета самолета, обусловленный изменением запаса полной энергии самолета. Запас полной энергии самолета оценивается по величине ускорения $\dot V$ (изменения по времени истинной скорости полета). При этом при формировании управляющего сигнала необходимо учитывать располагаемую скорость изменения тяги двигателя (приемистость).

Суть предлагаемого способа автоматического управления тягой двигателей поясняется на рис. 5 [3, 5]. По отношению к заданной приборной скорости задается ***адаптивная точность стабилизации***, которая определяется следующими условиями с учетом ограничений

$$\Delta V_{пр.\ зад} = \begin{cases} \Delta V^{max}_{пр.\ зад} - 0{,}01\cdot\left|V_{пр} - V_{пр.\ зад}\right|, & \text{если} \quad \Delta V_{пр.\ зад} > \Delta V^{min}_{пр.\ зад}; \\ \Delta V^{min}_{пр.\ зад}, & \text{если} \quad \Delta V_{пр.\ зад} > \Delta V^{min}_{пр.\ зад}; \end{cases}$$

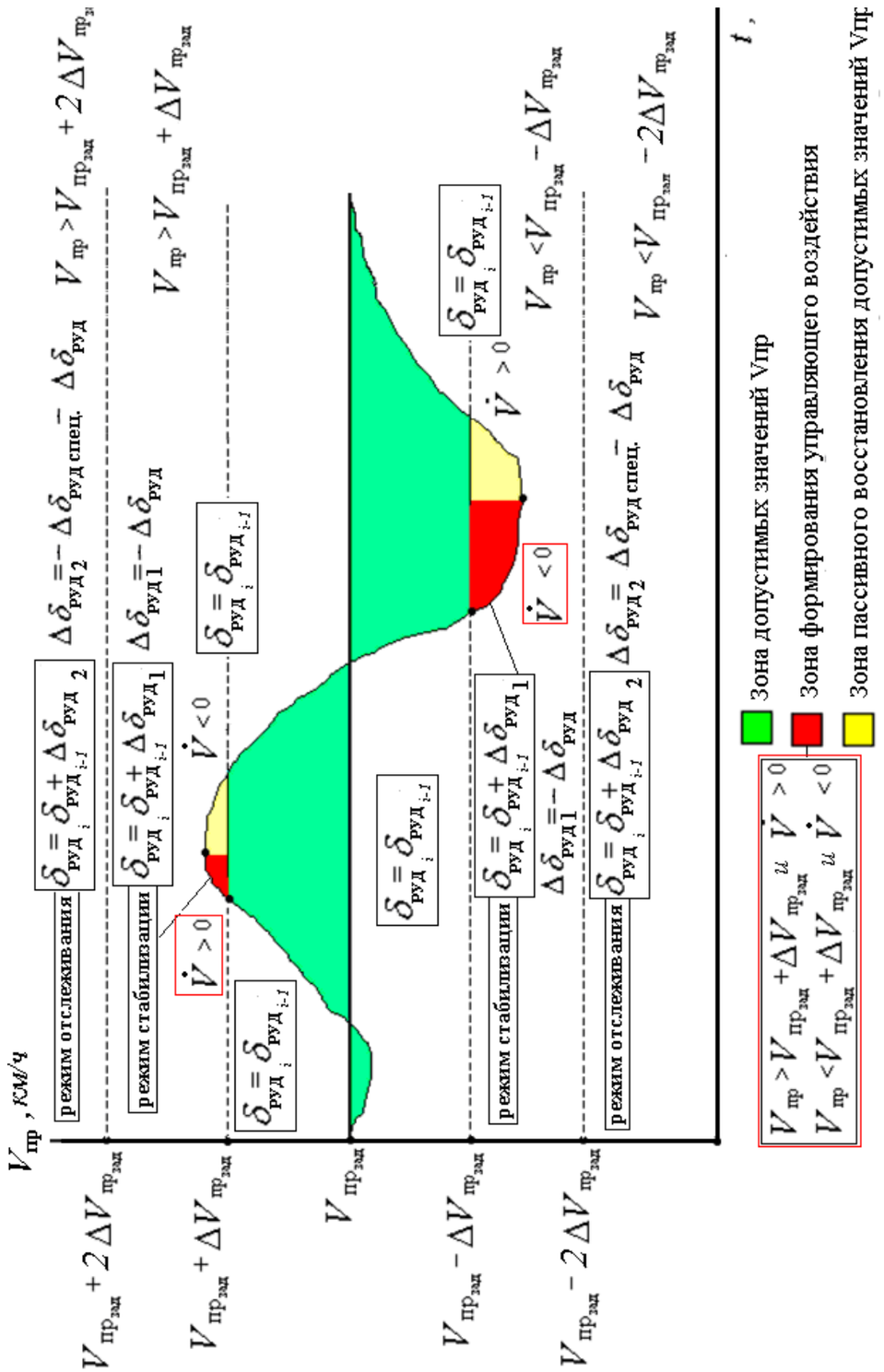


Рис. 5. Логика адаптивного управления тягой двигателей

Для оценки особенностей функционирования адаптивного автомата тяги на примере двигателя ПС-90А2 и самолета Ту-204СМ принято:

$$\Delta V^{max}_{пр.\ зад} = 3\ км/ч, \qquad \Delta V^{min}_{пр.\ зад} = 1\ км/ч.$$

Если текущее значение приборной скорости не выходит за установленные ограничения (на рис. 5 — зеленая область допустимых значений приборной скорости), то управляющее воздействие на изменение тяги двигателей не формируется.

Если приборная скорость увеличивается и выходит за **верхнее** ограничение в область **режима стабилизации**:

$$V_{пр.\ зад} + 2\Delta V_{пр.\ зад} > V_{пр} > V_{пр.\ зад} + \Delta V_{пр.\ зад},$$

то выполняется оценка знака изменения воздушной скорости $\dot{V}$:

— если $\dot{V} > 0$/м/с/с, то формируется очередное управляющее воздействие (на рис. 5 красная зона формирования управляющего воздействия);

— если $\dot{V} \le 0$/м/с/с, то очередное управляющее воздействие на изменение тяги двигателей не формируется (на рис. 5 зона желтого цвета пассивного восстановления допустимых значений приборной скорости).

Если сформировались условия очередного управляющего воздействия (на i-том шаге дискретности бортового вычислителя в момент времени $t_{УВ}$), то вычисляется i-тый добавок к предыдущему положению РУД:

$$\Delta\delta_{РУД_i} = -k_{пер} \cdot \frac{m\tilde{\dot{V}}}{n\dfrac{dP}{d\delta_{РУД}}},$$

где: $k_{пер}$ — коэффициент перерегулирования $\left(k_{пер} = 1\right)$;

m — масса самолета;

$\tilde{\dot{V}}$ — фильтрованная величина воздушного ускорения;

n — количество работающих двигателей;

$\dfrac{dP}{d\delta_{РУД}}$ — производная тяги по положению РУД.

Текущее положение РУД на *i*-том шаге управляющих воздействий (УВ) формируется с учетом приемистости двигателя по следующей формуле:

$$\delta_{\text{РУД}_i} = \delta_{\text{РУД}_{i-1}} + 0,5 \cdot \Delta\delta_{\text{РУД}_{i_1}} \left(1,0 - \cos\left(3,1415\sqrt{\frac{t - t_{\text{УВ}}}{\Delta t_1}}\right)\right),$$

где: $\delta_{\text{РУД}_{i-1}}$ — положение РУД после предыдущего управляющего воздействия;

t — текущее время;

$\Delta t_1 = \frac{\left|\Delta\delta_{\text{РУД}_{i_1}}\right|}{10}$ — интервал времени на отработку процедуры перемещения РУД на вычисленное приращение в сторону <u>уменьшения тяги в зоне стабилизации</u>;

10 — время (с) на изменение тяги двигателя от малого газа до взлетного режима (определяется по характеристикам приемистости двигателя).

Если приборная скорость увеличивается и выходит за **верхнее** ограничение в область **режима отслеживания**: $V_{\text{пр}} > V_{\text{пр. зад}} + 2\Delta V_{\text{пр. зад}}$, то вычисляется *i*-тый добавок к предыдущему положению РУД с учетом добавления специального добавка $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}$:

$$\Delta\delta_{\text{РУД}_{i_2}} = -\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} - k_{\text{пер}} \frac{m\tilde{\dot{V}}}{n\frac{dP}{d\delta_{\text{РУД}}}},$$

где: $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}$ — **специальный адаптивный добавок к текущему положению РУД**, вычисляемый по формуле

$$\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} = \Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}^{\text{MIN}}} + 0,4\left|V_{\text{пр}} - V_{\text{пр. зад}}\right|;$$

$$\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} = \begin{cases} 20, & \text{если } V_{\text{пр}} > V_{\text{пр. зад}}; \\ 10, & \text{если } V_{\text{пр}} < V_{\text{пр. зад}}. \end{cases}$$

Текущее положение РУД на *i*-том шаге управляющих воздействий в области режима отслеживания формируется с учетом приемистости двигателя по следующей формуле:

$$\delta_{\text{РУД}_i} = \delta_{\text{РУД}_{i-1}} + 0,5 \cdot \Delta\delta_{\text{РУД}_{i_2}} \left(1,0 - \cos\left(3,1415\sqrt{\frac{t - t_{\text{УВ}}}{\Delta t_2}}\right)\right),$$

где: $\delta_{\text{РУД}_{i-1}}$ — положение РУД после предыдущего управляющего воздействия;

t — текущее время;

$\Delta t_2 = \frac{\left|\Delta\delta_{\text{РУД}_{i_2}}\right|}{10}$ — интервал времени на отработку процедуры перемещения РУД на вычисленное приращение в сторону <u>уменьшения тяги в зоне отслеживания</u>.

Если в момент времени $\boldsymbol{t_{\text{УВ}}}$ приборная скорость уменьшается и выходит за **нижнее** ограничение в область **режима стабилизации**:

$$V_{\text{пр. зад}} - 2\Delta V_{\text{пр. зад}} < V_{\text{пр}} < V_{\text{пр. зад}} - \Delta V_{\text{пр. зад}},$$

то так же, как и при выходе за верхнее ограничение, выполняется оценка знака изменения ускорения $\dot{V}$.

По результатам оценки $\dot{V}$, если $\dot{V} < 0$ м/с/с, то формируется очередное управляющее воздействие, направленное на увеличение тяги (на рис. 5 красная зона формирования управляющего воздействия)

$$\delta_{\text{РУД}_i} = \delta_{\text{РУД}_{i-1}} + 0,5 \cdot \Delta\delta_{\text{РУД}_{i_3}} \left(1,0 - \cos\left(3,1415\sqrt{\frac{t - t_{\text{УВ}}}{\Delta t_3}}\right)\right),$$

$$\Delta\delta_{\text{РУД}_{i_3}} = -k_{\text{пер}} \cdot \frac{m\tilde{\dot{V}}}{n\frac{dP}{d\delta_{\text{РУД}}}};$$

где: $\Delta t_3 = \frac{\left|\Delta\delta_{\text{РУД}_{i_3}}\right|}{8}$;

8 — время (с) на изменение тяги двигателя от взлетного режима до режима малого газа (определяется по характеристикам приемистости двигателя).

Если $\dot{V} \geq 0$ м/с/с, то очередное управляющее воздействие на изменение тяги двигателей не формируется (на рис. 5 зона желтого цвета пассивного восстановления допустимых значений приборной скорости).

Если приборная скорость уменьшается и выходит за **нижнее** ограничение в область **режима отслеживания**: $V_{\text{пр}} < V_{\text{пр. зад}} - 2\Delta V_{\text{пр. зад}}$, то вычисляется *i*-тый добавок к предыдущему положению РУД с учетом добавления специального добавка $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}$:

$$\Delta\delta_{\text{РУД}_{i_4}} = -\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} - k_{\text{пер}} \frac{m\tilde{\dot{V}}}{n\dfrac{dP}{d\delta_{\text{РУД}}}},$$

$$\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} = \Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}^{\text{MIN}}} + 0,4\left|V_{\text{пр}} - V_{\text{пр. зад}}\right|;$$

$$\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} = \begin{cases} 20, & \text{если } V_{\text{пр}} > V_{\text{пр. зад}}; \\ 10, & \text{если } V_{\text{пр}} < V_{\text{пр. зад}}. \end{cases}$$

Отработка вычисленного добавка к текущему положению РУД выполняется в интервале времени $\Delta t_4 = \dfrac{\left|\Delta\delta_{\text{РУД}_{i_4}}\right|}{8}$ по закону

$$\delta_{\text{РУД}_i} = \delta_{\text{РУД}_{i-1}} + 0,5 \cdot \Delta\delta_{\text{РУД}_{i_4}} \left(1,0 - \cos\left(3,1415\sqrt{\frac{t - t_{\text{УВ}}}{\Delta t_4}}\right)\right),$$

На рис. 6 показана отработка управляющего сигнала на РУД при необходимости **дозированного** увеличения или уменьшения тяги двигателя с учетом приемистости.

Результаты математического моделирования

На рис. 7 (стр. 36) показано влияние заданной точности стабилизации приборной скорости при неизменной величине специального добавка к РУД в зоне отслеживания ($\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} = 10°$).

Заданная приборная скорость меняется в соответствии со сценарием захода на посадку и ухода на второй круг (см. рис. 2). Рассмотрены варианты управления тягой при всех работающих двигателях и одном отказавшем в момент достижения высоты принятия решения об уходе на второй круг. Заданная точность стабилизации приборной скорости варьировалась в диапазоне от 1 км/ч до 4 км/ч. При заданной точности стабилизации 1 км/ч на участках захода на посадку и снижения по глиссаде выдерживание заданной скорости сопровождается резкими избыточными (с забросами) перемещениями РУД. На участке стабилизации высоты круга $H_{\text{кр}}$ = 1000 м при полете со всеми работающими двигателями, стабилизация заданной приборной скорости $V_{\text{пр. зад}}$ = 360 км/ч с точностью $\Delta V_{\text{пр. зад}}$ = 1 км/ч привела к необходимости сформировать 4 кратковременных импульсных перемещений РУД при условии всех работающих двигателей.

ВЫЧИСЛЯЕМЫЙ ДОБАВОК К ТЕКУЩЕМУ ПОЛОЖЕНИЮ РУД

$$\Delta\delta_{\text{РУД}} = k_{\text{пер}} \frac{m\tilde{\dot{V}}}{n\dfrac{dP}{d\delta_{\text{РУД}}}},$$

$k_{\text{пер}}$ – коэффициент перерегулирования,
m – масса самолета;
n – количество работающих двигателей;
$\dfrac{dP}{d\delta_{\text{РУД}}}$ – производная тяги по положению РУД

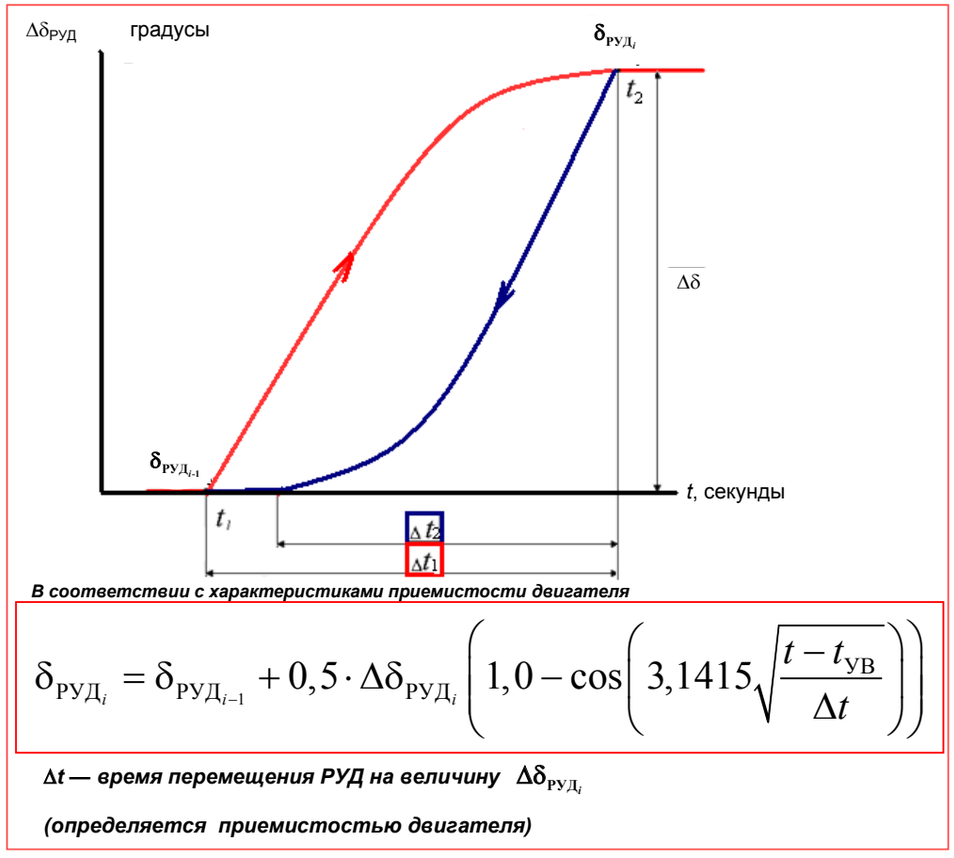


Рис. 6. Формирование очередного (i-ого) управляющего воздействия на шаге дискретности вычислителя на увеличение тяги (красная линия) и уменьшение тяги (синяя линия)

При полете на высоте круга с одним отказавшим двигателем выдерживание заданной скорости с точностью 1 км/ч потребовало только одного импульсного воздействия на РУД. Изменение заданной точности стабилизации приборной скорости на 2 км/ч, 3 км/ч и 4 км/ч сопровождалось уменьшением перерегулирования и уменьшением количества потребных перемещений РУД, как при всех работающих двигателях, так и одном отказавшем.

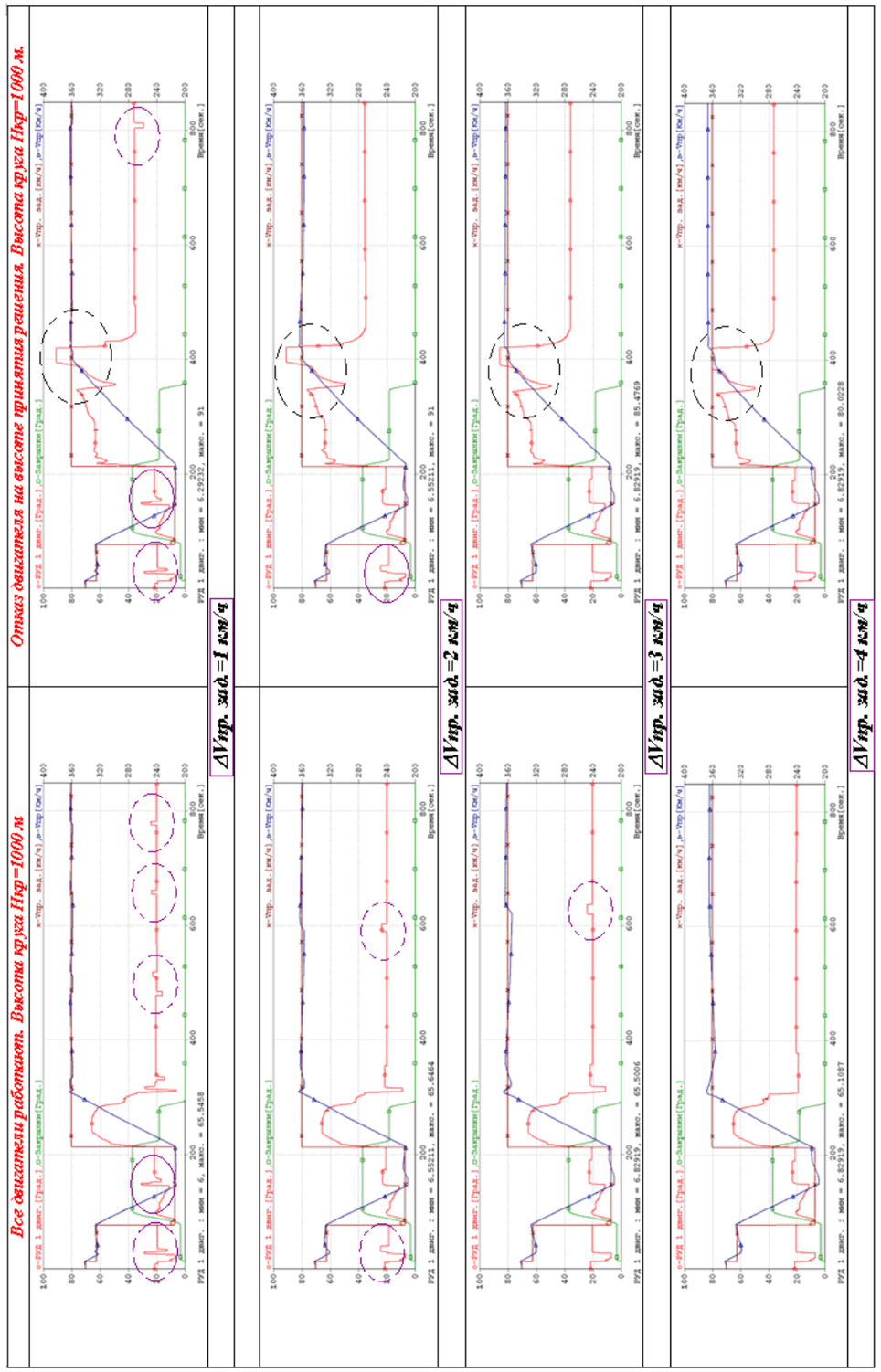


Рис. 7. Оценка влияния заданной точности стабилизации приборной скорости $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} = 10°$; $\Delta T_{ya} = 0{,}05$ *с*; $K_{пер.} = 1$ ($G_{c\text{-}та} = 70$ *т — средняя*)

Следует отметить, что при выполнении ухода на второй круг с одним отказавшим двигателем увеличение допустимого отклонения от заданной приборной скорости приводит к уменьшению максимального потребного перемещения РУД при выходе на заданную скорость 360 км/ч.

На рис. 8, 9 (стр. 38–39) показано влияние заданной величины специального добавка к положению РУД $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right)$ в зоне отслеживания при неизменной величине заданной точности стабилизации приборной скорости ($\Delta V_{\text{пр. зад}} = 4$ км/ч).

На рис. 8 приводятся результаты влияния $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right)$ на характер формирования управляющих воздействий направленных на управление тягой двигателей. Увеличение $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right)$ приводит к улучшению качества переходных процессов в задачах, связанных с уменьшением заданной скорости полета (наилучший результат при $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right) = 20°$). В задачах, связанных с увеличением скорости полета (этап ухода на второй круг), увеличение $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right)$ сопровождается увеличением градиента разгона при соответствующем увеличении потребного перемещения РУД. Исходя из условий выбора оптимального градиента разгона, при оптимальном управлении тягой двигателей, наилучший результат получен при $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right) = 10°$.

Оценка влияния величины специального добавка к РУД на градиент набора высоты проиллюстрирована на рис. 9. Результаты моделирования ухода на второй круг при нормальной работе всех двигателей показали, что величина $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right)$ не оказывает существенного влияния на величину и характер изменения градиента набора высоты.

Результаты моделирования ухода на второй круг с отказом двигателя на высоте принятия решения показали, что при величине специального добавка 5° процесс набора высоты круга излишне затянут (набор высоты выполняется с углом наклона траектории 2°). Увеличение $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right)$ до 10° позволило увеличить градиент набора высоты круга до приемлемых значений и обеспечить набор высоты круга с максимальным углом наклона траектории $\theta_{max} = 5{,}5°$. Результаты моделирования показали, что градиент набора высоты увеличивается после полной уборки закрылков.

На рис. 10, 11 (стр. 40–41) показаны результаты влияния адаптивного изменения специального добавка к РУД и адаптивного изменения заданной точности стабилизации приборной скорости: на рис. 10a, 11a величина специального добавка к РУД и величина заданной точности стабилизации приборной скорости не изменяются, а на рис. 10b, 11b эти параметры изменяются в зависимости от разницы между текущим значением приборной скорости и текущем значением заданной величины приборной скорости.

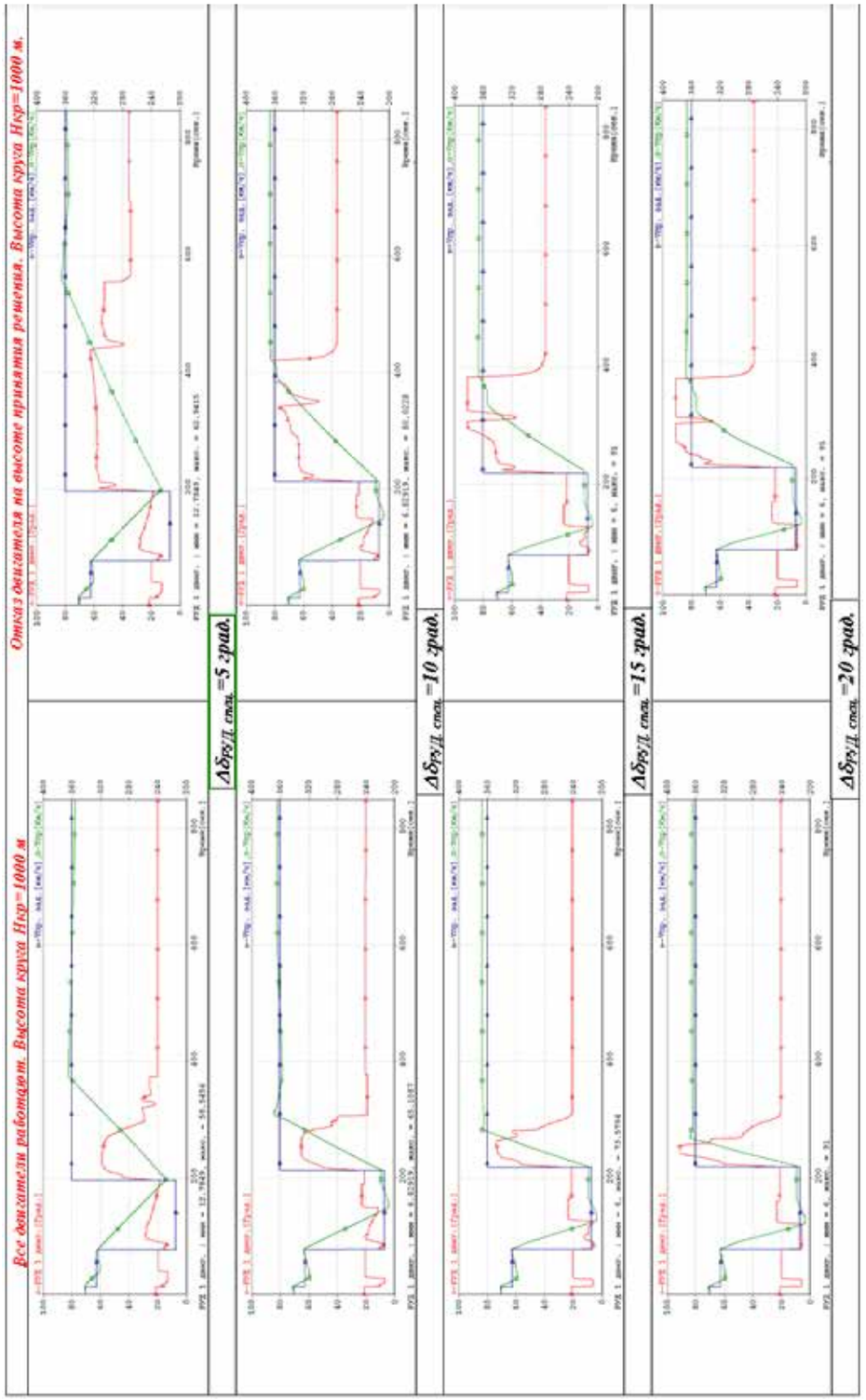


Рис. 8. Оценка влияния величины специального добавка к РУД на градиент разгона
$\Delta V_{пр.зад} = 4$ км/ч; $\Delta T_{ув} = 0{,}05$ с; $K_{пер} = 1$ ($G_{с\text{-}та} = 70$ т — средняя)

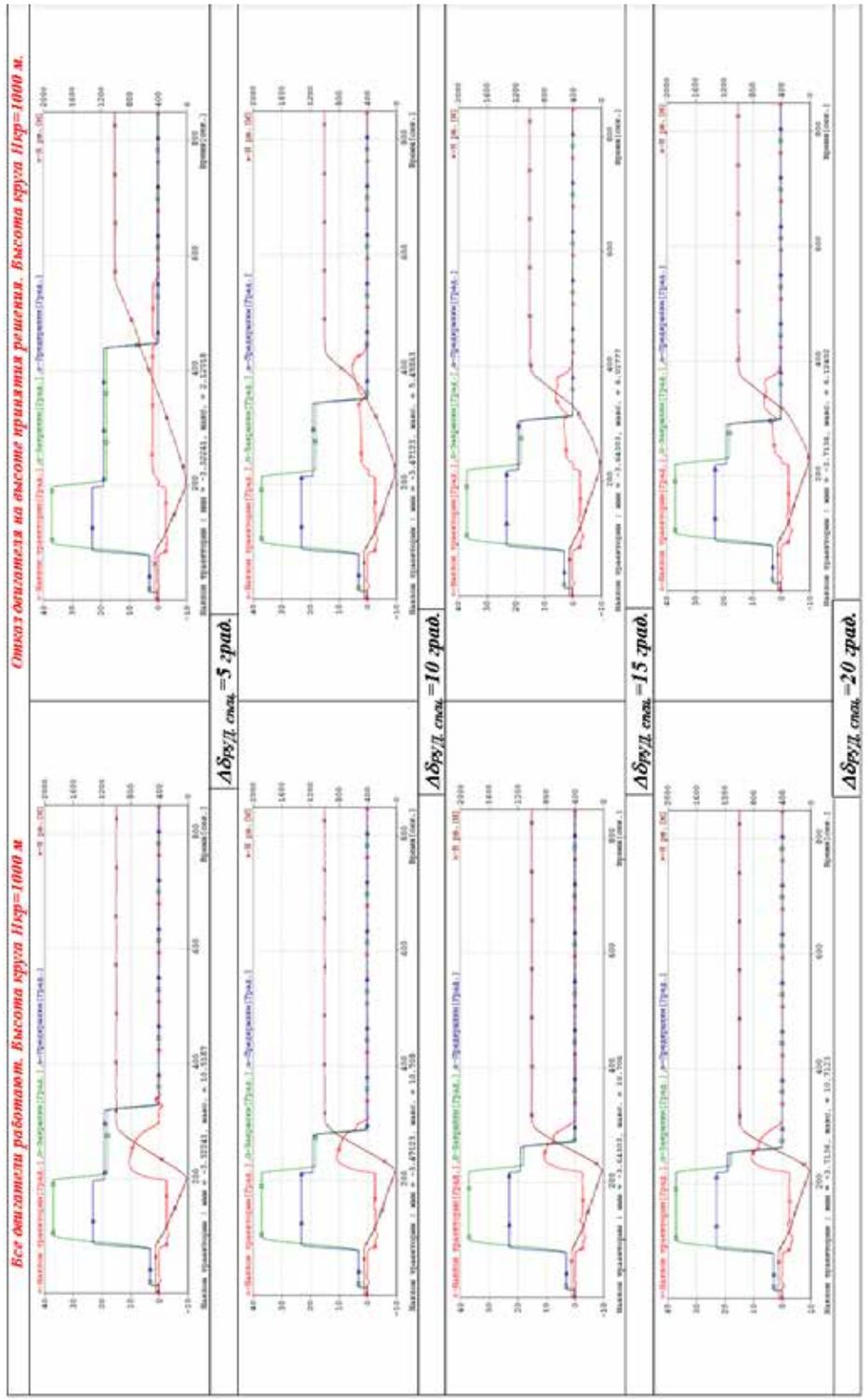
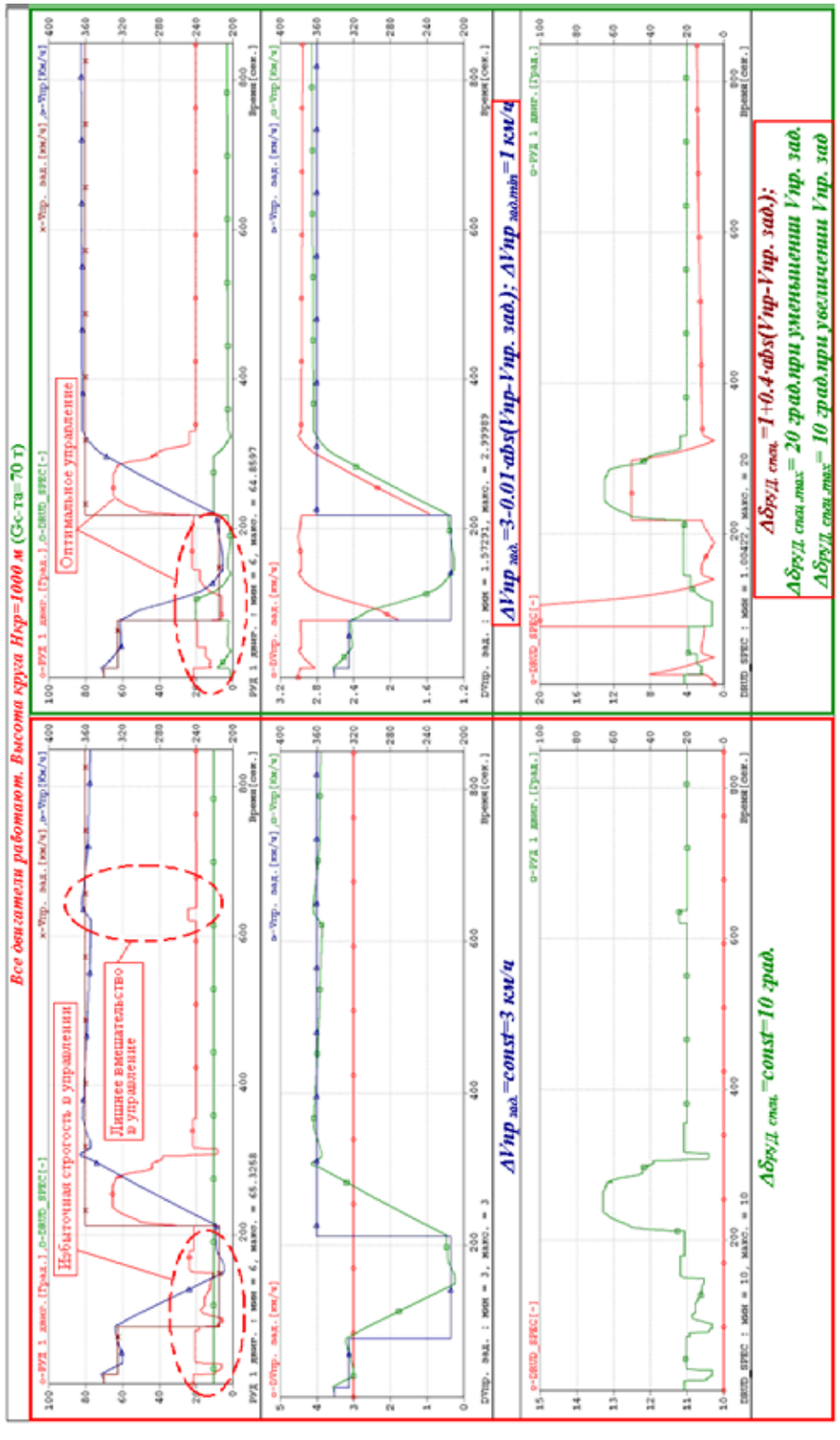


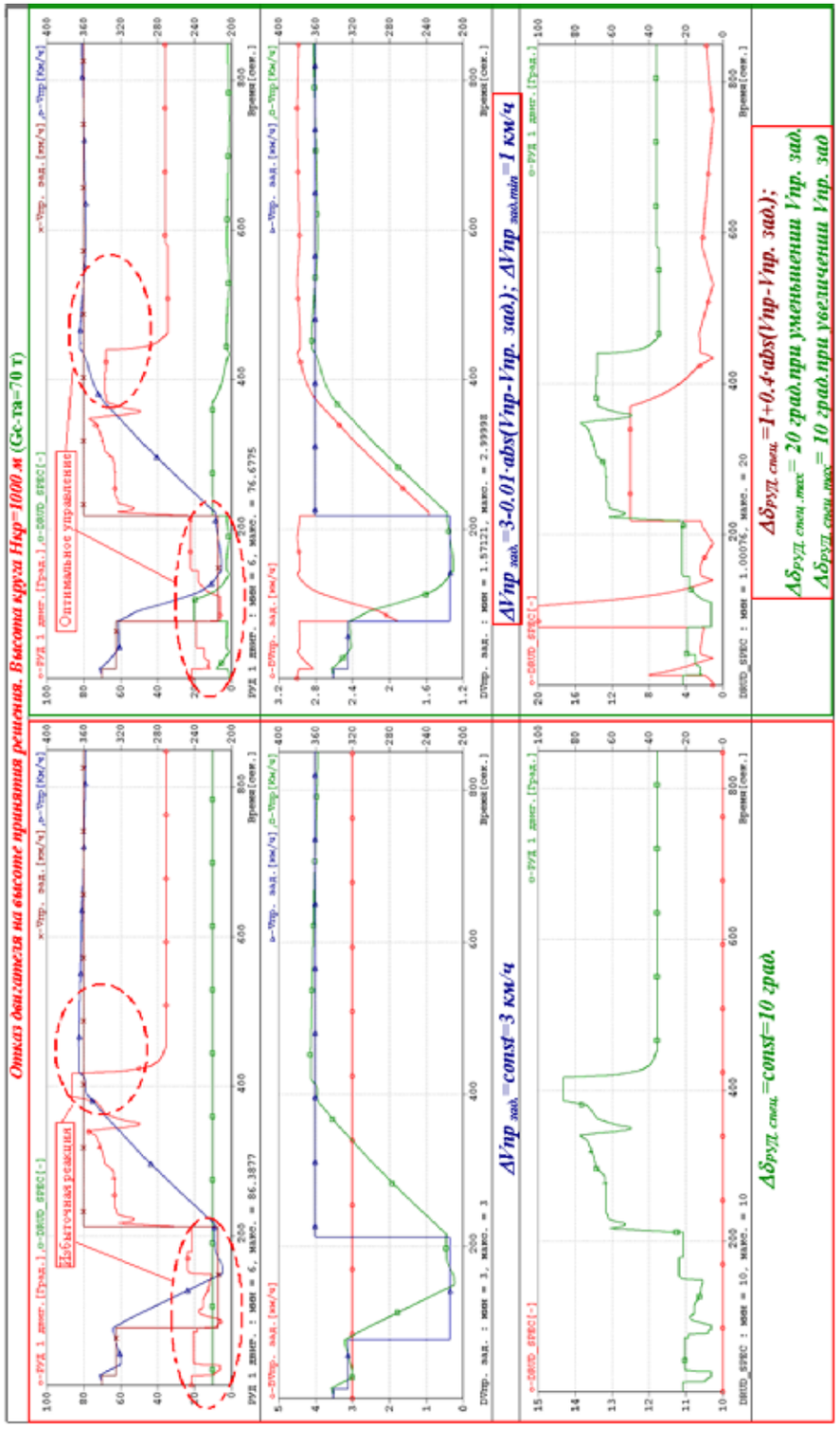
Рис. 9. Оценка влияния величины специального добавка к РУД на градиент набора высоты
$\Delta V_{пр.зад} = 4$ км/ч; $\Delta T_{ув} = 0{,}05$ с; $K_{пер} = 1$ ($G_{с\text{-}та} = 70$ т — средняя)



a) $\Delta\delta_{РУД.\,спец} = const,\ \Delta V_{пр.\,зад} = const$

b) $\Delta\delta_{РУД.\,спец} = f(V_{пр} - V_{пр.\,зад}),\ \Delta V_{пр.\,зад} = f(V_{пр} - V_{пр.\,зад})$,

Рис. 10. Оценка влияния адаптивного изменения $\Delta\delta_{РУД}^{СПЕЦ}$ *и* $\Delta V_{пр.\,зад}$ *при всех работающих двигателях*



a) $\Delta\delta_{РУД.\,спец} = const,\ \Delta V_{пр.\,зад} = const$

b) $\Delta\delta_{РУД.\,спец} = f(V_{пр} - V_{пр.\,зад}),\ \Delta V_{пр.\,зад} = f(V_{пр} - V_{пр.\,зад})$,

Рис. 11. Оценка влияния адаптивного изменения $\Delta\delta_{РУД}^{СПЕЦ}$ *и* $\Delta V_{пр.\,зад}$ *при отказе двигателя на высоте принятия решения*

На рис. 10a, b приведены результаты моделирования управления тягой двигателей на этапах захода на посадку и ухода на второй круг при всех работающих двигателях. До достижения высоты принятия решения об уходе на второй круг заданная скорость уменьшалась в соответствии с выпуском взлетно-посадочной механизации и установленной скоростью движения по глиссаде. На высоте принятия решения заданная скорость увеличивалась до значения, рекомендованного для полета с убранной механизацией крыла.

На рис. 10a специальный добавок к установленному положению РУД и заданная точность стабилизации приборной скорости не изменялись и их значения были выбраны как оптимальные. В этом случае на участках изменения заданной приборной скорости скорость изменяется по линейному закону с участками резкого входа в зону стабилизации. Скорость изменения приборной скорости определяется заданной величиной специального добавка к РУД ($\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right) = 10°$) при неизменной заданной точности стабилизации приборной скорости $\Delta V_{\text{пр. зад}} = 3$ км/ч. Резкий вход в зону стабилизации явился причиной однократной коррекции скорости на участке стабилизации заданной скорости 360 км/ч.

На рис. 10b рассмотрено влияние изменения $\left(\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\right)$ и $\Delta V_{\text{пр. зад}}$ в зависимости от абсолютной разницы между текущей и заданной скоростью полета. Адаптивное изменение заданной точности стабилизации определяется следующей зависимостью:

$$\Delta V_{\text{пр. зад}} = \Delta V_{\text{пр. зад}_{\max}} - 0{,}01\left|\Delta V_{\text{пр.}} - \Delta V_{\text{пр. зад}}\right|,$$

где: $\Delta V_{\text{пр. зад}_{\max}} = 3$ км/ч.

С увеличением разницы между заданной и текущей скоростью $\Delta V_{\text{пр. зад}}$ уменьшается. Минимальное значение адаптивной точности стабилизации ограничивается значением $\Delta V_{\text{пр. зад}_{\min}} = 1$ км/ч. Характер изменения $\Delta V_{\text{пр. зад}}$ ($\Delta V_{\text{пр}}$) показан на рис. 10b (обозначение на графике идентификатором DVпр. зад).

Специальный добавок к РУД с увеличением разницы между заданной и текущей скоростью, $\Delta V_{\text{пр. зад}}$ увеличивается:

$$\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}} = \Delta V_{\text{пр. зад}_{\min}} - 0{,}4\left|\Delta V_{\text{пр}} - \Delta V_{\text{пр. зад}}\right|,$$

где: $\Delta\delta_{\text{РУД}_{\min}}^{\text{СПЕЦ}} = 1°$.

С увеличением разницы между заданной и текущей скоростью, $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}$ увеличивается.

Для минимизации потребных перемещений РУД в решении задач стабилизации заданных значений приборной скорости принято два ограничения максимальной величины специального добавка к РУД:

$\Delta\delta_{\text{РУД}_{\max}}^{\text{СПЕЦ}} = 20°$ при изменении заданной величины приборной скорости в сторону уменьшения,

$\Delta\delta_{\text{РУД}_{\max}}^{\text{СПЕЦ}} = 10°$ при изменении заданной величины приборной скорости в сторону увеличения.

Характер изменения $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\left(\Delta V_{\text{пр}}\right)$ показан на рис. 10b (обозначение на графике идентификатором DRUD_SPEC).

Адаптивное изменение $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}\left(\Delta V_{\text{пр}}\right)$ и $\Delta V_{\text{пр. зад}}$ ($\Delta V_{\text{пр}}$) позволило улучшить качество переходных процессов изменения приборной скорости и оптимизировать перемещение РУД по критериям частоты вмешательства в управление и максимальной величины потребного перемещения.

На рис. 11a и 11b показано влияние отказа двигателя на характер адаптивного управления тягой на этапе ухода на второй круг. Адаптивное изменение $\Delta\delta_{\text{РУД}}^{\text{СПЕЦ}}$ и $\Delta V_{\text{пр. зад}}$ ($\Delta V_{\text{пр}}$) позволило улучшить качество переходных процессов изменения приборной скорости и уменьшить потребное перемещение РУД работающего двигателя при достижении заданной скорости стабилизации на высоте круга.

Результаты функционирования алгоритма адаптивного управления траекторным движением в вертикальной плоскости при реализации режима ухода на второй круг с адаптивным управлением тягой двигателей проиллюстрированы на рис. 12 (стр. 44) и рис. 13 (стр. 45). Рассмотрено влияние заданной высоты круга в диапазоне от 400 м до 1000 м.

На рис. 12 приведены некоторые результаты влияния заданной высоты круга при реализации адаптивного способа управления траекторным движением и скоростью полета при нормальной работе всех двигателей. По характеру изменения $L_{\text{ц}}$ можно сделать вывод, что для всех вариантов заданных высот круга энергии самолета достаточно для выхода на заданную высоту круга (идентифицировано **состояние 1** без коррекции $L_{\text{ц}}$ величиной изменения приборной скорости). Адаптивное управление тягой двигателей, направленное на стабилизацию заданной скорости $V_{\text{пр. зад}} = 360$ км/ч, обеспечило примерно одинаковый градиент изменения приборной скорости для всех рассмотренных выходов на заданную высоту круга. При этом распределение полной энергии самолета на набор высоты и разгон позволило избежать необходимости применения взлетного режима работы двигателей (по мере увеличения заданной высоты круга, максимальное значение положения РУД уменьшалось). Аналогичный характер имеет изменение максимальной величины угла наклона траектории и вертикальной скорости в процессе выхода на заданную высоту круга.

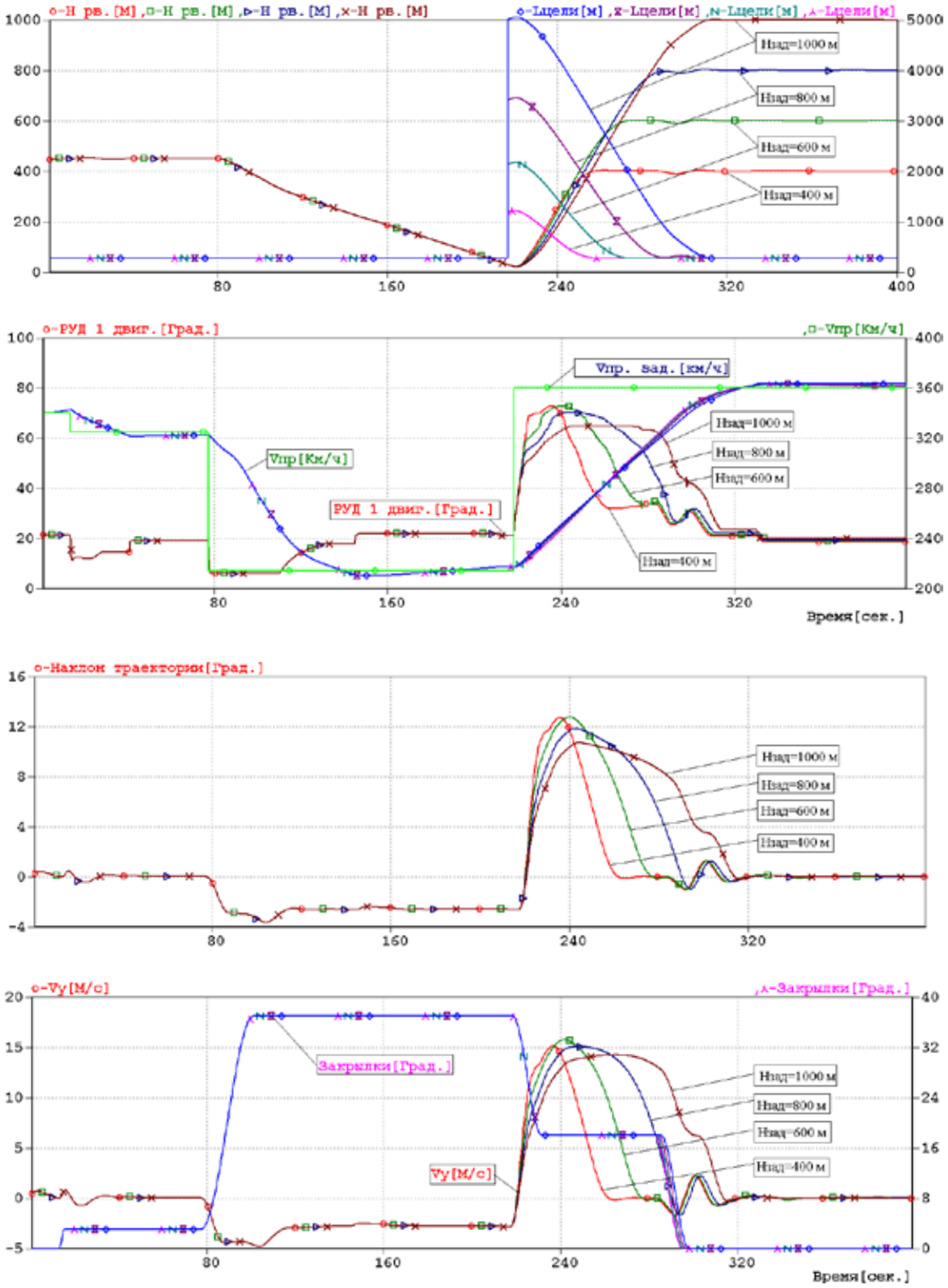


Рис. 12. Оценка влияния заданной высоты круга ($G_{c\text{-}ma}$ = 70 т)
(все двигатели работают)

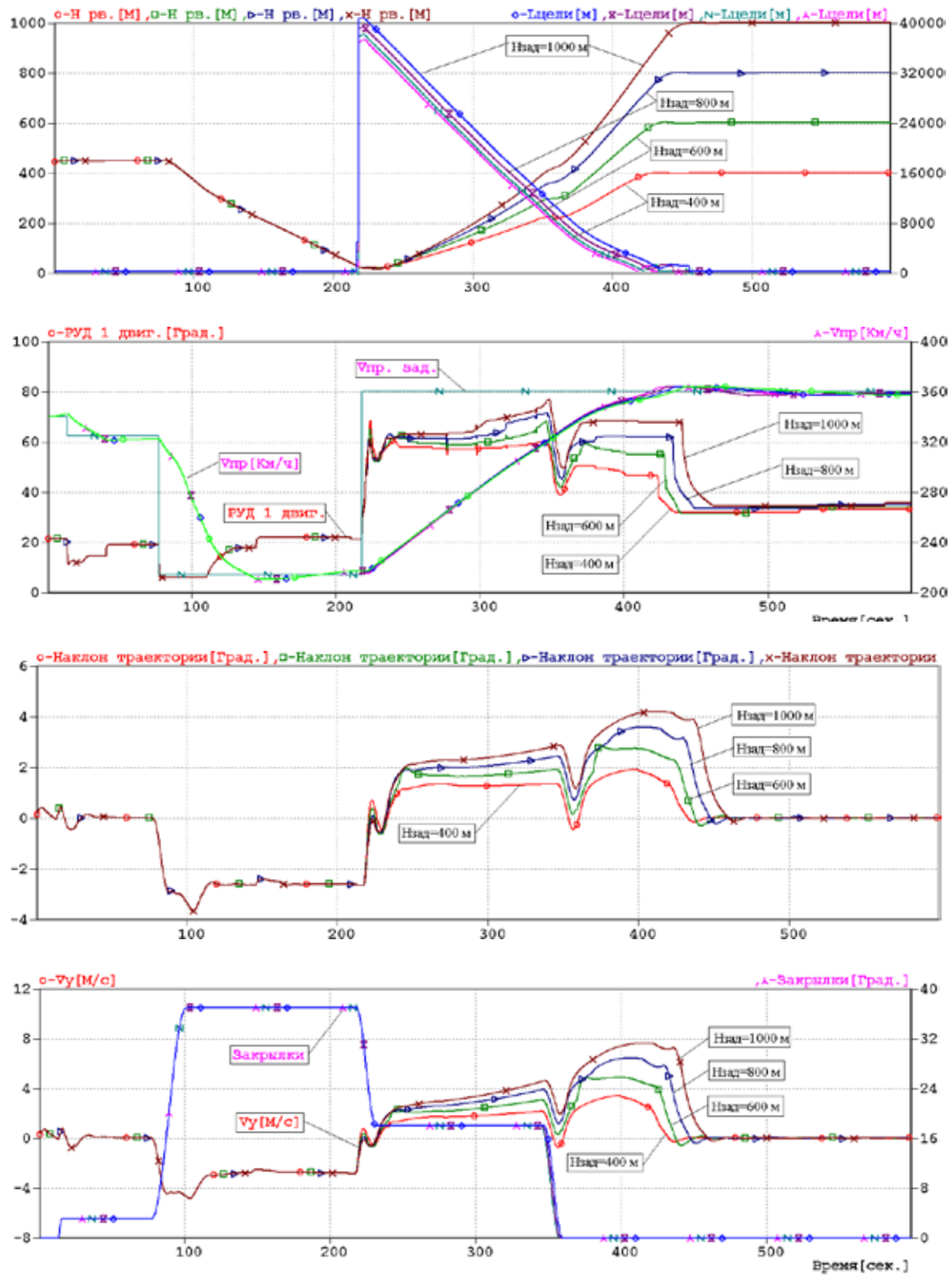


Рис. 13. Оценка влияния заданной высоты круга ($G_{c\text{-}ma}$ = 70 т)
(отказ двигателя на высоте принятия решения)

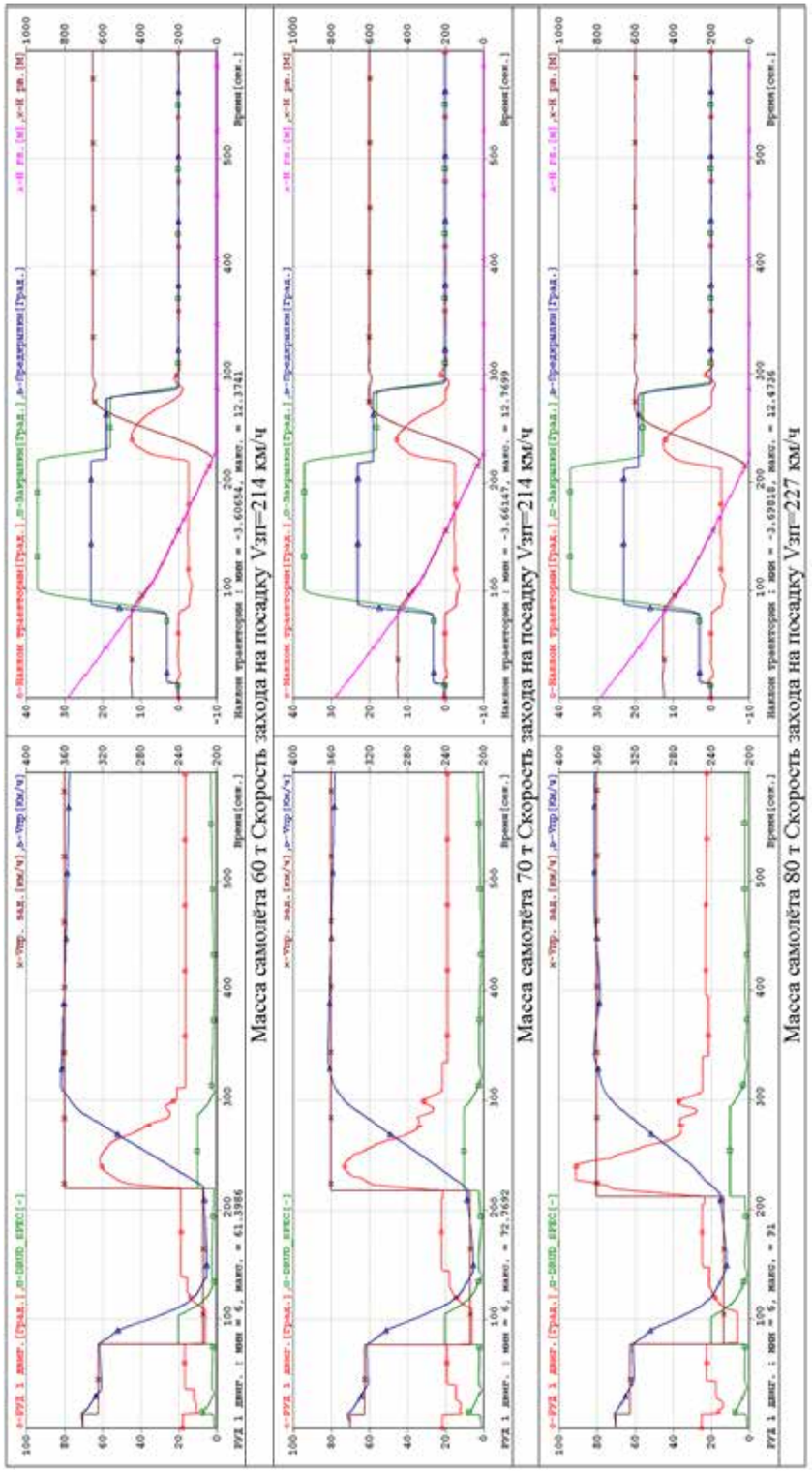


Рис. 14. Адаптивное управление скоростью и траекторией полета
Оценка влияния массы самолета (все двигатели работают)

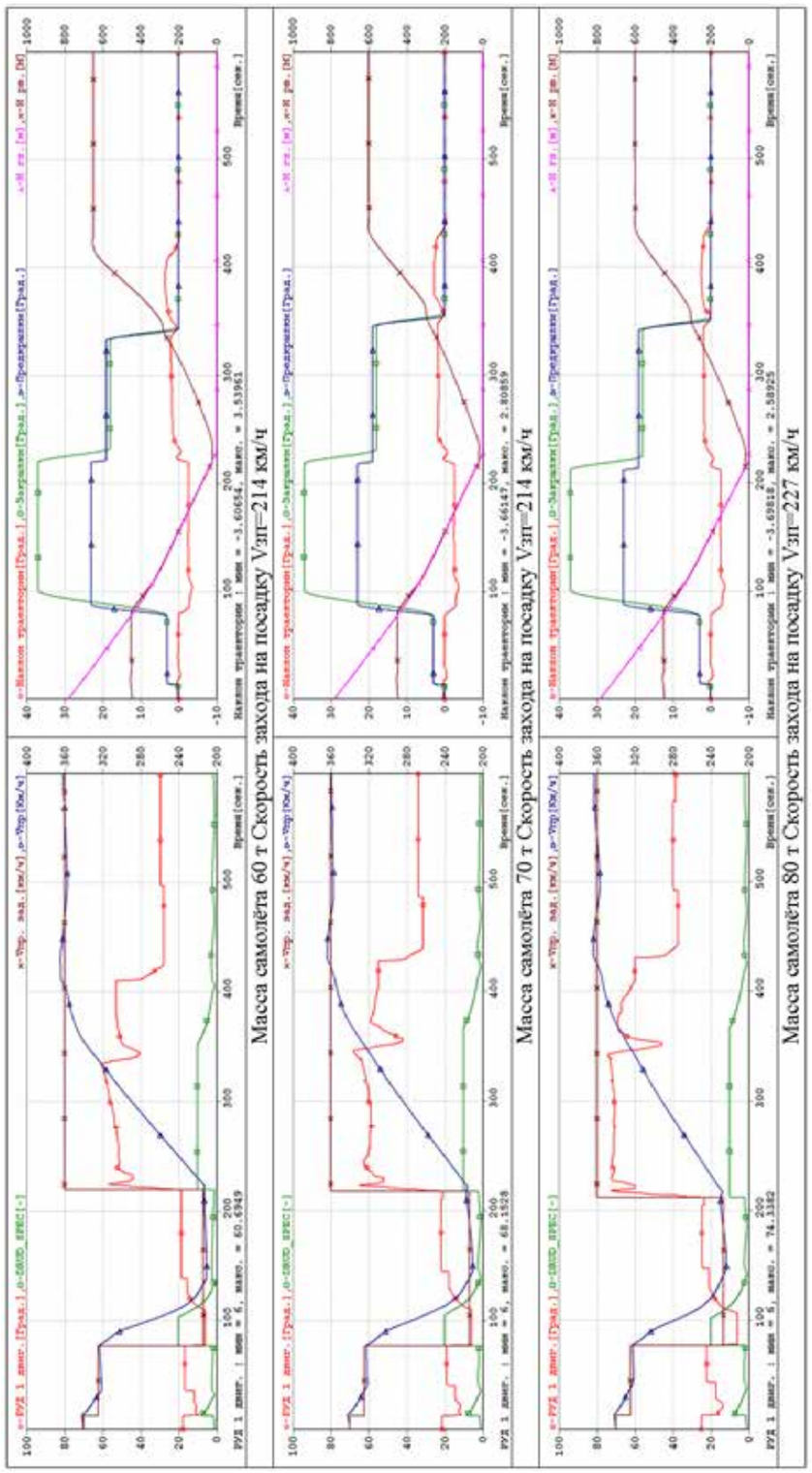


Рис. 15. Адаптивное управление скоростью и траекторией полета
Оценка влияния массы самолета (отказ двигателя на высоте принятия решения)

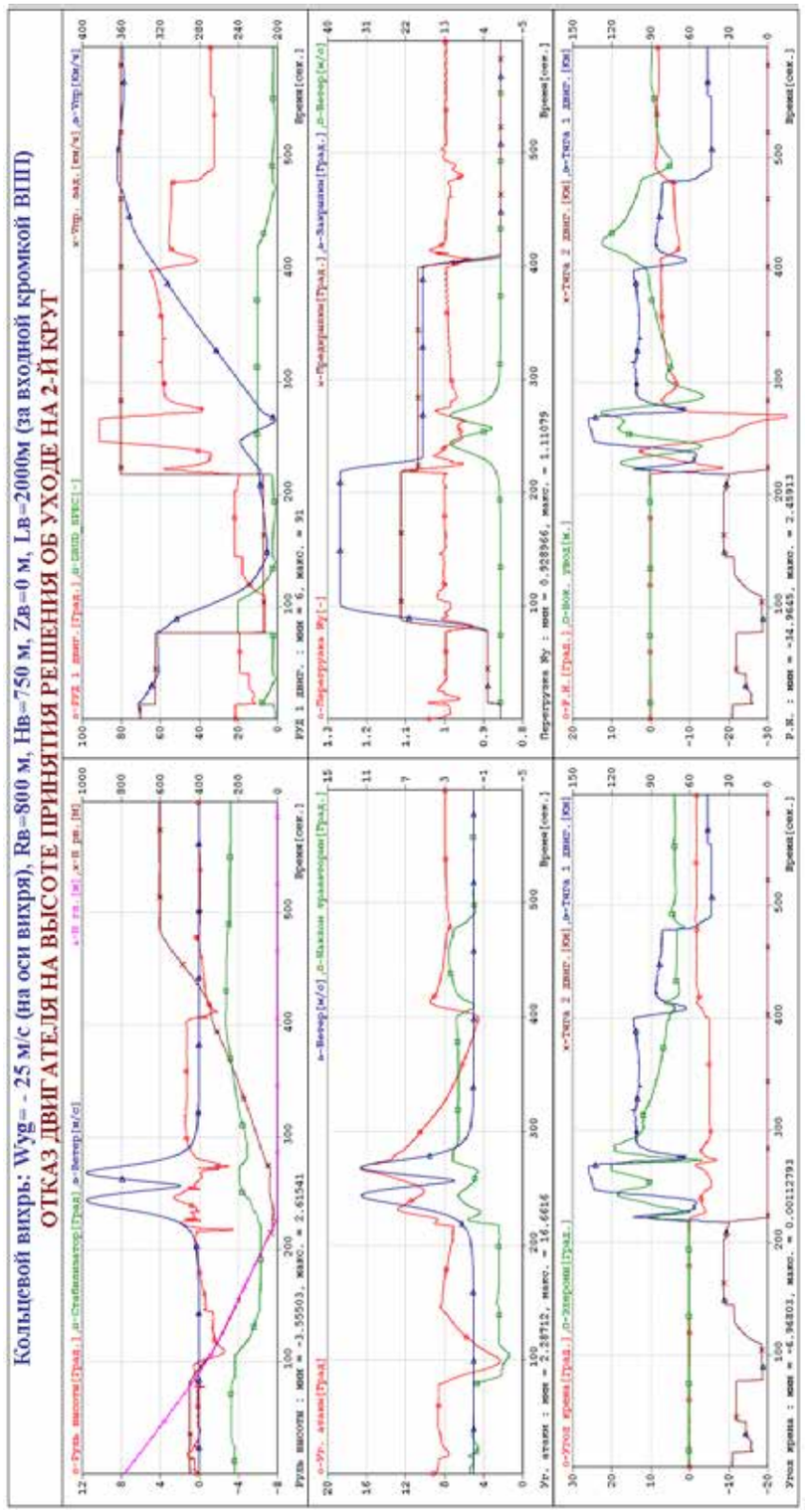


Рис. 16. Заход на посадку и уход на второй круг в условиях кольцевого вихря ($G_{c\text{-}ma} = 70$ m)
$\Delta\delta_{РУД}^{СПЕЦ} = 1{,}0 + \left|V_{пр} - V_{пр.\,зад}\right|$; *На глиссаде* $\Delta\delta_{РУД_{max}}^{СПЕЦ} = 20°$. *На траектории ухода на 2-й круг* $\Delta\delta_{РУД_{max}}^{СПЕЦ} = 10°$.
$\Delta V_{пр.\,зад} = 3{,}0 - 0{,}01\left|\Delta V_{пр} - \Delta V_{пр.\,зад}\right|$ $\Delta V_{пр.\,зад_{min}} = 1$ км/ч

На рис. 13 приведены результаты адаптивного выхода на заданную высоту круга в условиях отказа одного двигателя. По характеру изменения $L_ц$ видно, что сформировались условия для **состояния 2** (запаса энергии недостаточно для разгона и набора заданной высоты круга). При этом $L_ц$ получает приращение, которое позволяет сформировать более пологую траекторию набора высоты при сохранении одинакового градиента разгона при выходе на разные высоты круга с сохранением запаса по располагаемому избытку тяги на возможные непредвиденные ситуации (попадание в сдвиги ветра, дождь и т. п.). В сценарии захода на посадку с уходом на 2-й круг (см. рис. 2) начало уборки закрылков и предкрылков в крейсерскую конфигурацию (процедуры Р15 и Р16) формируется по условию $V_{пр} \geq 320$ км/ч (событие Е17). После уборки закрылков наклон траектории и вертикальная скорость набора высоты увеличиваются.

На рис. 14 и рис. 15 (с. 46–47) приведены результаты оценки влияния массы самолета на параметры движения и адаптивного управления при реализации ухода на второй круг (заданная высота круга $H_{кр} = 650$ м) со всеми работающими двигателями и одним отказавшим соответственно. В основном увеличение массы самолета приводит к соответствующему увеличению максимального режима работы двигателей.

На рис. 16 (с. 48) приведены результаты математического моделирования захода на посадку и ухода на второй круг с адаптивным управлением траекторным движением и тягой двигателей в сложных многофакторных условиях полета, включающих в себя:

– внезапный отказ двигателя сразу после принятия решения об уходе на второй круг с высоты 30 м;

– наличие атмосферного явления повышенной опасности типа «микровзрыв» (кольцевой вихрь), расположенного на траектории ухода на второй круг на высоте 750 м и удалении 2000 м от входной кромки ВПП [1].

Характеристики вихря определялись заданной величиной вертикальной составляющей скорости нисходящего потока воздуха на оси вихря $W_{y_{g_{вих}}} = -25$ м/с и радиусом вихря $R_{вих} = 800$ м. До пролета створа вихря самолет находился под влиянием встречно-восходящего потока воздуха. При пролете створа вихря ветровой режим резко поменялся: встречно-восходящий поток ветра сменился попутно-нисходящим потоком. При этом сложились условия уменьшения скорости полета и соответствующего увеличения угла атаки. Адаптивный автомат тяги отреагировал на уменьшение скорости увеличением режима работы двигателя до взлетного, при этом адаптивное управление траекторным движением обеспечило достаточное допустимое снижение градиента набора высоты.

Это позволило ограничить падение скорости величиной 40 км/ч с последующим устойчивым положительным градиентом разгона при потребном положении РУД в пределах номинального режима работы двигателя.

Выводы

1. Разработан сценарий захода на посадку и ухода на второй круг с реализацией непрерывного адаптивного управления в вертикальной плоскости на режимах стабилизации высоты, захвата и стабилизации глиссады, перелома траектории и адаптивного выхода на заданную высоту круга;

2. Разработан способ адаптивного управления траекторным движением в вертикальной плоскости при выходе на заданную высоту с контролем полной энергии самолета и формированием потребного градиента набора высоты;

3. Разработана логика и алгоритмы адаптивного управления тягой двигателей по критерию величины управляющего воздействия и частоты вмешательства в управление в фактических многофакторных ситуациях полета;

4. Выполнена оценка и доказана эффективность комплексного адаптивного управления траекторным движением и тягой двигателей в сложных многофакторных ситуациях полета магистрального самолета.

Литература

1. Гребёнкин А. В. Математическое моделирование ветрового воздействия типа «микровзрыв». В кн.: Научный вестник МГТУ ГА №2. Серия «Аэромеханика и прочность». – Москва: МГТУ ГА, 1998. С. 57–63.

2. Гребёнкин А. В., Гладкая Д. Ю. Реализация терминального способа автоматического управления продольным движением самолета на режиме «Уход на второй круг». Труды Московского института электромеханики и автоматики. Вып. 12: Навигация и управление летательными аппаратами. – М.: МИЭА, 2016. – С. 21–22.

3. Гребёнкин А. В., Ахромеев А. Ж., Гладкая Д. Ю. Развитие концепции автоматического управления скоростью полета самолета. Журнал «История науки и техники», №9. М.: «Научтехлитиздат», 2016. – С. 36–49.

4. Alexander Grebenkin, Ivan Burdun «Aircraft Virtual Flight Test and Certification Technology: Validation and Application Experience» (presentation abstract accepted by the Program Committee of the SAE 2016 Aviation Technology Forum, June 2016. P. 13–14, Shanghai, China).

5. Гребёнкин А. В., Лушников А. А., Моисеев В. Н. Адаптивная стабилизация и отслеживание заданной высоты и скорости полета. Научно-технический журнал «Автоматизация процессов управления», №3. Ульяновск: ФНПЦ АО «НПО «Марс», 2017. С. 14–21.

6. Гребёнкин А. В., Володина Л. А. Оценка возможности понижения тяги двигателей на режиме «уход на второй круг». // Навигация и управление летательными аппаратами, № 30. – М.: МИЭА, 2020. – С. 19–33.

УДК 629.7.05

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОНОМНЫХ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ КУРСОВЕРТИКАЛЕЙ С РАДИАЛЬНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИЕЙ

Алексей Григорьевич КУЗНЕЦОВ, *д. т .н., доцент,*
Виктор Иванович ГАЛКИН, *к. т. н., с. н. с.,*
Евгений Владимирович КУЗИН
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru

В статье рассмотрены структурные схемы построения бесплатформенных курсовертикалей с радиальной и интегральной коррекцией погрешностей датчиков первичной информации. Проанализированы их преимущества и недостатки. Даны рекомендации для применения при использовании «грубых» и «точных» микромеханических гироскопов и акселерометров.

Ключевые слова: *пилотажные системы управления, курсовертикаль, микромеханические датчики, радиальная коррекция, интегральная коррекция.*

COMPARATIVE ANALYSIS OF STAND-ALONE MICROMECHANICAL ATTITUDE AND HEADING REFERENCE SYSTEMS WITH RADIAL AND INTEGRAL CORRECTION

Alexey G. KUZNETSOV, *D. Sc. In Engineering,*
Victor I. GALKIN, *PhD in Engineering,*
Evgeniy V. KUZIN
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-Mail: inbox@aomiea.ru

The article reviews structural diagrams of strapdown attitude and heading reference systems with radial and integral correction of sensor information. The advantages and disadvantages of the systems are analyzed. The article provides recommendations for the usage of high-accuracy and low-accuracy micromechanical gyroscopes and accelerometers.

Keywords: *flight control systems, attitude and heading reference system, micromechanical sensors, radial correction, integral correction.*

Введение

Микромеханические курсовертикали обладают следующими преимуществами: высокая надежность работы, стойкость к ударам и вибрациям, миниатюрность и малое энергопотребление, благодаря чему находят широкое применение в летательных аппаратах как в качестве самостоятельных приборов в беспилотных летательных аппаратах (БПЛА), так и в качестве резервных приборов в комплексных системах управления пилотируемых самолетов гражданского и специального назначения для повышения безопасности их полетов в процессе эксплуатации [1—3].

Вместе с тем из-за невысоких точностных характеристик микромеханических датчиков: низкая чувствительность, большая нестабильность нулевых сигналов и масштабных коэффициентов, возможность построения курсовертикали с заданными точностными характеристиками во многом зависит от способа ее реализации.

В настоящей статье рассмотрены два способа построения автономных, то есть не использующих внешнюю коррекцию, микромеханических курсовертикалей: по схеме радиальной коррекции и интегральной коррекции.

Микромеханическая курсовертикаль с радиальной коррекцией

Структурно-функциональная схема алгоритма курсовертикали показана на рис. 1 (стр. 54).

Работа курсовертикали осуществляется следующим образом [4]. Информация об угловых скоростях поступает в алгоритм ЧА2.01, где приращения углов по измерительным осям в связанной системе координат преобразуются в углы поворота ЛА относительно инерциальных осей в виде матрицы направляющих косинусов (A):

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix} = \tag{1}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\gamma - \sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma & \sin\psi\sin\vartheta\sin\psi + \cos\psi\cos\gamma \\ \cos\psi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma - \sin\psi\sin\gamma & \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma - \sin\psi\cos\gamma \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma \end{vmatrix}.$$

Матрица (А) передается в алгоритмы ЧА2.04 и ЧА2.05, где с использованием ее элементов рассчитываются углы тангажа $\vartheta(n_3)$, крена $\gamma(n_3)$ и курса $\psi_{\tilde{A}}(n_3)$:

$$\vartheta(n_3) = \mathrm{arctg}(a_{31}/\tilde{a}_0);$$
$$\gamma(n_3) = \arcsin(a_{33}/\tilde{a}_0); \qquad (2)$$
$$\psi_{\Gamma}(n_3) = \arcsin(a_{11}/\tilde{a}_0).$$

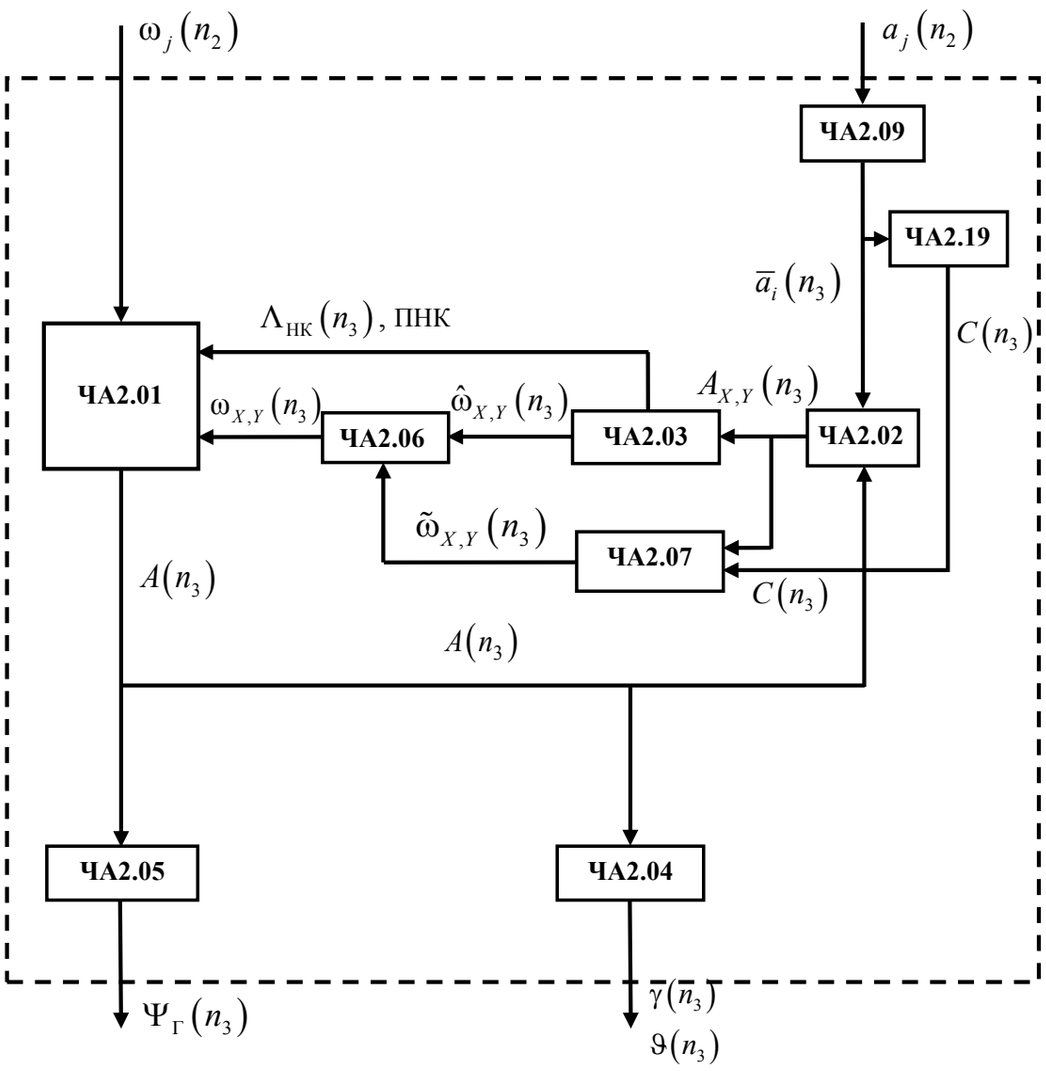


Рис. 1. Структурно-функциональная схема алгоритма курсовертикали с радиальной коррекцией

Для компенсации погрешностей гироскопов сформирована обратная связь системы управления виртуальной платформой в виде цепочки алгоритмов ЧА2.02, ЧА2.03. С этой целью матрица (*A*) из алгоритма ЧА2.01 передается в алгоритм ЧА2.02, в котором линейные ускорения, поступающие из акселерометров в связанной системе координат, перепроектируются на инерциальные оси с помощью углов, рассчитанных по показаниям гироскопов. Если гироскопы угловую скорость ЛА измеряют с погрешностью, то при отсутствии внешних ускорений и идеальных акселерометрах на выходе алгоритма ЧА2.02 появятся составляющие линейных ускорений на инерциальных осях, пропорциональные погрешности измерения углов ориентации гироскопами:

$$A_x(n_3) = a_{11}a_{x1}(n_3) + a_{12}a_{y1}(n_3) + a_{13}a_{z1}(n_3);$$
$$A_y(n_3) = a_{21}a_{x1}(n_3) + a_{22}a_{y1}(n_3) + a_{23}a_{z1}(n_3). \qquad (3)$$

В алгоритме ЧА2.03 линейные ускорения, поступающие из алгоритма ЧА2.02, преобразуются в инерциальные угловые скорости, используемые для корректировки положения виртуальной платформы в инерциальной системе координат:

$$\hat{\omega}_X = -K_1 A_Y; \quad \hat{\omega}_Y = K_1 A_X. \qquad (4)$$

Графически закон управления виртуальной платформой показан на рис. 2.

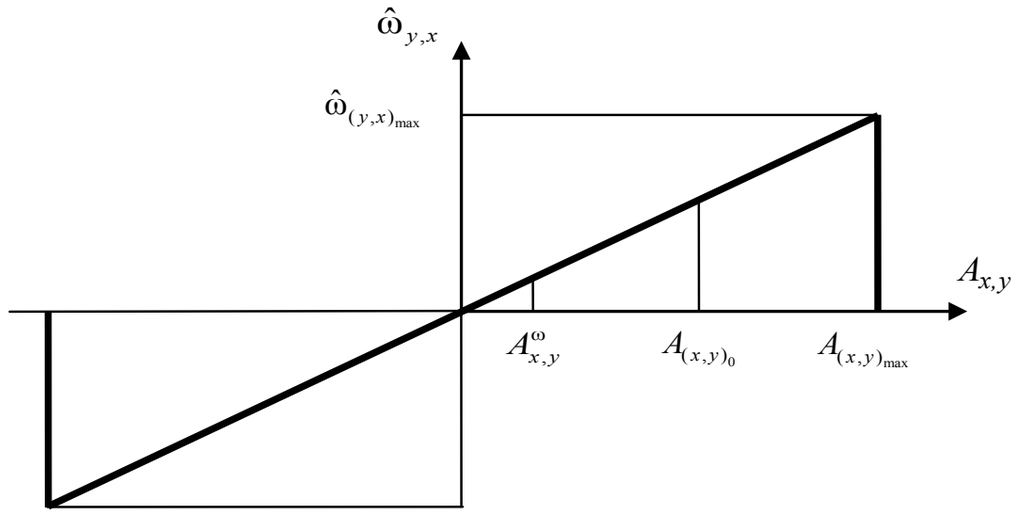


Рис. 2. График зависимости корректирующей угловой скорости $\omega_{y,x}$ от величины $A_{x,y}$

При такой схеме управления максимальная погрешность определения углового положения ЛА определяется величиной инерциального ускорения $A_{x,y}$, обеспечивающего компенсацию дрейфа гироскопических датчиков углового положения. Максимально допустимая величина $A_{(x,y)_{\max}}$, выше которой обратная связь будет отключена, складывается из следующих составляющих:

$$A_{(x,y)_{\max}} = A^{\omega}_{x,y} + A_{(x,y)_0} + A^{a}_{x,y},$$

где: $A^{\omega}_{x,y}$ — ускорение, обеспечивающее компенсацию дрейфа гироскопа, вращение Земли и угловую скорость облета Земли; $A_{(x,y)_0}$ — собственный дрейф нулевых сигналов акселерометров; $A^{a}_{x,y}$ — допустимое линейное ускорение, вызванное разгоном или торможением ЛА.

Величина $A_{(x,y)_{\max}}$ связана со статической погрешностью определения углового положения ЛА следующим соотношением:

$$\Delta\gamma = \frac{A_{x_{\max}}}{g}[\text{рад}]; \quad \Delta\vartheta = \frac{A_{y_{\max}}}{g}[\text{рад}].$$

Например, при уровне дрейфа нулевого сигнала «грубых» датчиков угловой скорости типа ADXRS — $\omega_{(y,x)_0} = 0{,}01\,°/\text{с}$ и датчиках линейных ускорений ADXL — $A_{(x,y)_0} = 0{,}01g$ американской фирмы Analog Devices суммарная угловая погрешность определения углового положения по крену и тангажу при коэффициенте усиления в обратной связи $K_1 = 100\,°/c/g$ и допустимом линейном ускорении $A^{a}_{x,y} = 0{,}01g$, составит:

$$\Delta\gamma = \Delta\vartheta = \left(A^{\omega}_{xy} + A_{(xy)_0} + A^{a}_{xy}\right)\Big/ g = 0{,}02 \text{ рад} \approx 1{,}15°.$$

Корректировка положения виртуальной платформы осуществляется в алгоритме ЧА2.01 путем перемножения текущего кватерниона на корректирующий кватернион.

Основная особенность и достоинство такого способа построения курсовертикали заключается в том, что нарастающие во времени ошибки определения углов крена и тангажа, вызванные погрешностями гироскопов, преобразуются с помощью обратной связи системы регулирования в статические ошибки.

К недостаткам следует отнести: отсутствие возможности компенсации ошибок определения углов, вызванных погрешностями акселерометров, и ограничения, накладываемые на время отключения обратной связи. Например, при не скомпенсированном дрейфе гироскопа $\omega_{(z1x1)_0} = 0{,}01\,°/\text{с}$, предельно допустимая погрешность определения углов $\Delta\vartheta = \Delta\gamma = 2°$ будет достигнута уже через 200 секунд.

Кроме того, при снятии внешних ускорений ошибки измерения углов, накопленные гироскопами, могут привести к недопустимым для управления значениям линейных ускорений по инерциальным осям, и обратная связь алгоритма ЧА2.03 не будет включаться. Виртуальная платформа уйдет в «завал».

Для устранения этого недостатка в алгоритм курсовертикали с радиальной коррекцией (рис. 1) введена дополнительная обратная связь, состоящая из блоков ЧА2.19, ЧА2.07 и ЧА2.06, с помощью которой осуществляется выведение виртуальной платформы из зоны «завала» в зону устойчивого регулирования.

В алгоритме ЧА2.19 контролируется условие допустимых линейных ускорений, действующих по связанным осям $a_{X1}, a_{Z1} \le a_{\text{доп}}$. При выполнении этого условия формируется признак $C(n_3)$, передаваемый в алгоритм ЧА2.07 и разрешающий включать обратную связь для списывания накопившейся от дрейфа гироскопов угловой ошибки. Расчет корректирующей угловой скорости в алгоритме ЧА2.07 производится аналогично алгоритму ЧА2.03:

$$\tilde{\omega}_X = -K_2 A_Y; \quad \tilde{\omega}_Y = K_2 A_X. \tag{5}$$

Рассчитанная угловая скорость коррекции передается в алгоритм ЧА2.01 через суммирующий алгоритм ЧА2.06. Списывание алгоритмом ЧА2.07 накопившейся погрешности производится до достижения допустимой для включения алгоритма ЧА2.03 величины $A_{(X,Y)_{\max}}$.

Курсовой угол в такой системе не корректируется. Поэтому погрешность его определения будет расти пропорционально величине дрейфа курсового гироскопа и времени работы курсовертикали.

Автономная микромеханическая курсовертикаль с интегральной коррекцией

Идея автономной курсовертикали с интегральной коррекцией заключается в том, что управление виртуальной платформой, сформированной по показаниям датчиков угловых скоростей, осуществляется не по линейным ускорениям, спроектированным на инерциальные оси, а по линейным скоростям, полученным путем интегрирования линейных ускорений [5]. При этом, если длина маятника принимается равной радиусу Земли, то курсовертикаль становится невозмущаемой, а угловая погрешность, обусловленная датчиками первичной информации, будет не накапливаться во времени, а, оставаясь постоянной по амплитуде, изменяться с частотой Шулера [6]:

— угловые погрешности, вызванные дрейфом нулевых сигналов гироскопов $\omega_{др}$:

$$\Delta\vartheta = \Delta\gamma = \left(\omega_{др}/\omega_{sch}\right)\sin\omega_{sch}\,t; \qquad (6)$$

— угловые погрешности, вызванные дрейфом нулевых сигналов акселерометров a_0:

$$\Delta\vartheta = \Delta\gamma = \frac{a_0}{R\,\omega_{sch}^2}\left(1-\cos\omega_{sch}\,t\right), \qquad (7)$$

где: $\omega_{sch} = 0{,}071^\circ/\text{с} = 0{,}00124\ \ 1/\text{с}$ — угловая частота Шулера; R — радиус Земли.

Структурно-функциональная блок-схема алгоритма автономной курсовертикали с интегральной коррекцией представлена на рис. 3.

В блоке ЧА3.01 по показаниям датчиков угловых скоростей формируется матрица направляющих косинусов (A) аналогично тому, как это сделано в курсовертикали с радиальной коррекцией — алгоритм ЧА2.01.

Матрица направляющих косинусов передается в два блока ЧА3.02 и ЧА3.03.

В блоке ЧА3.03 по данным, поступающим из блока ЧА3.01, производится вычисление углов ориентации аналогично тому, как это сделано в курсовертикали с радиальной коррекцией.

В блоке ЧА3.02 производится интегрирование кажущихся ускорений, поступающих от микромеханических акселерометров в виде приращений за временной интервал $h_3 = 4h_2$, и их пересчет на инерциальные оси по показаниям матрицы направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}
\Delta W_X &= a_{11}W_{x1} + a_{12}W_{y1} + a_{13}W_{z1},\\
\Delta W_Y &= a_{21}W_{x1} + a_{22}W_{y1} + a_{23}W_{z1},\\
\Delta W_Z &= a_{31}W_{x1} + a_{32}W_{y1} + a_{33}W_{z1},
\end{aligned} \qquad (8)$$

где: $W_{X1} = \sum_1^4 a_{X1}(n_2)h_2$; $W_{Y1} = \sum_1^4 a_{Y1}(n_2)h_2$; $W_{Z1} = \sum_1^4 a_{Z1}(n_2)h_2$ — линейные скорости на связанные оси за четыре такта h_2;

$a_{11}, a_{12}, \ldots a_{33}$ — элементы матрицы (A);

h_2 — временной интервал передачи ускорений.

Информация из блока ЧА3.02 передается в блоки ЧА3.04 и ЧА3.05.

В блоке ЧА3.04 осуществляется выставка курсовертикали — вычисление начального кватерниона для запуска алгоритма в блоке ЧА3.01.

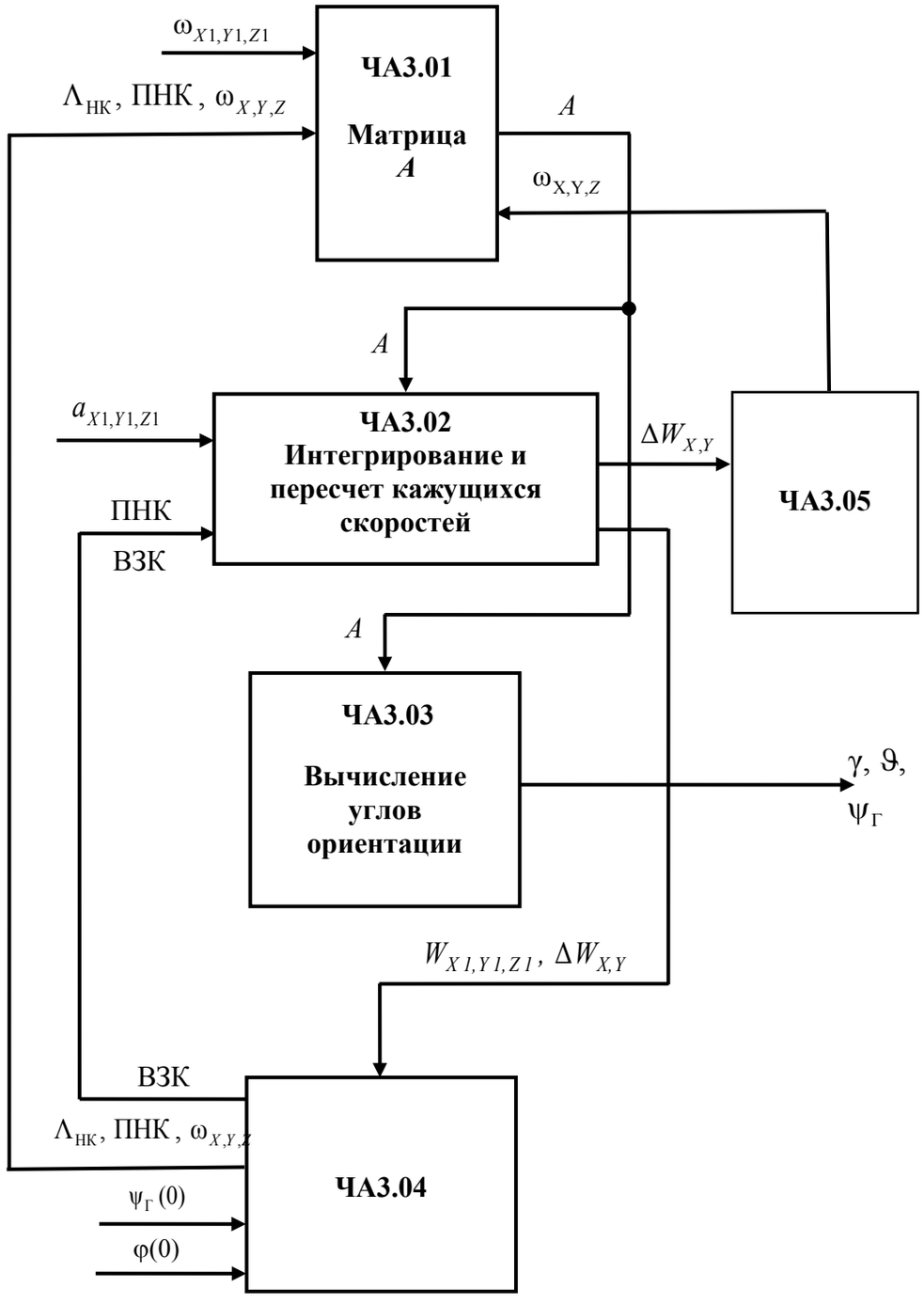


Рис. 3. Структурно-функциональная блок-схема алгоритма автономной курсовертикали с интегральной коррекцией

В блоке ЧА3.05 вырабатываются угловые скорости, корректирующие виртуальную платформу, сформированную по показаниям гироскопов:

— рассчитываются текущие значения линейных скоростей по инерциальным осям V_X, V_Y, вызванные облетом Земли, скоростью вращения Земли и ошибками микромеханических гироскопов и акселерометров:

$$\begin{aligned} V_X(n) &= V_X(n-1) + \Delta W_X(n); \\ V_Y(n) &= V_Y(n-1) + \Delta W_Y(n); \end{aligned} \tag{9}$$

— при пренебрежении эллиптичностью Земли и высотой полета рассчитываются угловые скорости, соответствующие линейным скоростям на среднем радиусе Земли:

$$\Omega_X = -\frac{V_Y(n)}{R}; \quad \Omega_Y = \frac{V_X(n)}{R}; \tag{10}$$

— по заданным широте φ и долготе λ местности рассчитываются составляющие угловой скорости Земли на инерциальных осях:

$$\begin{aligned} U_X &= U\, b_{13}; \\ U_Y &= U\, b_{23}; \\ U_Z &= U\, b_{33}, \end{aligned} \tag{11}$$

где: U — угловая скорость вращения Земли; b_{13}, b_{23}, b_{33} — коэффициенты матрицы (B), устанавливающей связь между осями сопровождающего трехгранника и инерциальной системой координат;

— рассчитываются угловые скорости, корректирующие положение виртуальной платформы:

$$\begin{aligned} \omega_X &= \Omega_X + U_X; \\ \omega_Y &= \Omega_Y + U_Y; \\ \omega_Z &= U_Z. \end{aligned} \tag{12}$$

Значения корректирующих угловых скоростей передаются в алгоритм ЧА3.01, где коррекция положения виртуальной платформы осуществляется перемножением текущего кватерниона на корректирующий кватернион.

Если чувствительность микромеханических гироскопов ниже скорости вращения Земли, то в формуле (12) вводить корректировку от скорости вращения Земли не следует, так как это будет приводить к дополнительной ошибке.

Недостаток такой схемы построения курсовертикали заключается в том, что ошибки определения углов, вызванные дрейфами нулевых сигналов микромеханических гироскопов и акселерометров, без привлечения внешней информации не корректируется. Ошибки определения углов изменяются во времени с частотой Шулера, а их амплитуды пропорциональны погрешностям датчиков.

Поэтому при использовании такой схемы построения автономной курсовертикали для обеспечения заданной точности определения углов ориентации потребуются микромеханические датчики предельной точности. Например, гироскопы STIM-210 норвежской фирмы Sensonor AS с нестабильностью нулевого сигнала 0,001°/с и акселерометры MS9010.D швейцарской фирмы Colibrys с нестабильностью нулевого сигнала 0,001*g*. При использовании датчиков такой точности максимальная погрешность определения углов — амплитуда колебаний — составит:

— от гироскопов:

$$\Delta\vartheta = \Delta\gamma = \left(\omega_{\text{др}}/\omega_{\text{sch}}\right) = \left(0{,}001/0{,}071\right)\left(180/\pi\right) = 0{,}8^\circ;$$

— от акселерометров:

$$\Delta\vartheta = \Delta\gamma = \frac{a_0}{R\omega_{sch}^2} = \frac{0{,}001\cdot 9{,}81}{6\cdot 10^6\left(1{,}24\cdot 10^{-3}\right)^2}\left(180/\pi\right) = 0{,}06^\circ.$$

Максимальная погрешность определения углов от акселерометров будет равна $2\Delta\vartheta = 2\Delta\gamma = 0{,}12^\circ$.

На рис. 4 (стр. 62) показан результат экспериментального измерения угловой погрешности тангажа интегральной курсовертикали.

Начальный угол тангажа в момент выставки составил 1,4°. После перехода в режим навигации угол тангажа начал изменяться вокруг начального угла с периодом Шулера с амплитудой 0,625°. Это свидетельствует о том, что основным источником погрешности является нескомпенсированный нулевой сигнал гироскопа.

С течением времени амплитуда колебаний уменьшается, что, по-видимому, вызвано дрейфом гироскопа с противоположным знаком относительно нескомпенсированного нулевого сигнала.

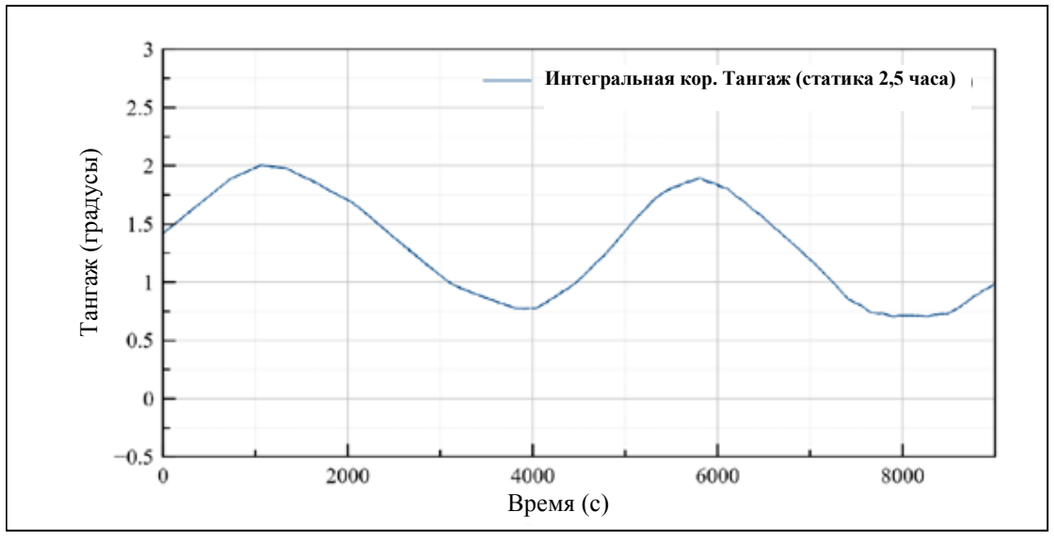


Рис. 4. График изменения угловой ошибки измерения тангажа микромеханической курсовертикали с интегральной коррекцией, вызванной погрешностью микромеханического гироскопа

Выводы

1. Выбор схемы построения алгоритма автономной микромеханической курсовертикали на заданные точностные характеристики без использования внешней информации во многом зависит от типа используемых гироскопов и акселерометров:

— при использовании «грубых», невысокой стоимости микромеханических гироскопов и акселерометров предпочтительнее курсовертикаль с радиальной коррекцией погрешностей датчиков, так как в ней осуществляется списание накопившейся погрешности;

— при использовании «точных» микромеханических гироскопов и акселерометров предпочтительнее курсовертикаль с интегральной коррекцией погрешностей датчиков, так как в ней не происходит накопление погрешностей, но и не осуществляется их списание.

2. Дальнейшее повышение точностных характеристик автономных курсовертикале возможно при осуществлении интегральной коррекции с использованием дополнительной информации от датчиков воздушной скорости, высоты и магнитного компаса, входящих, как правило, в комплектацию бортового оборудования летательных аппаратов.

Литература

1. Кузнецов А. Г., Абутидзе З. С., Портнов Б. И., Галкин В. И., Калик А. А. Микромеханические датчики для пилотажных систем управления // Гироскопия и навигация — 2010, №2 (69). С. 50—56.

2. Матвеев В. В., Распопов В. Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем — СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», ISBN 978-5-900780-73-3, 2009 г. — 280 с.

3. Галкин В. И. Гироскопические приборы на микромеханических датчиках — Проблемы и пути их решения, LAP LAMBERT Academic Publishing RU, ISBN: 978-620-2-79865-5, 2020 г. — 165 с.

4. Галкин В. И., Кузин Е. В., Воробьев Д. Н. Способ управления цифровой платформой в бесплатформенной гировертикали и устройство для его реализации // Патент РФ № 2667320, Бюллетень изобретений № 26, 2018 г.

5. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем: Часть I: Математические модели инерциальной навигации. — 3-е изд., испр. и доп. — М.:МАКС Пресс, 2011. — 136 с. ISBN 978-5-317-03803-8.

6. Инерциальная навигация, под редакцией К. Ф. О/Донелла, перевод с английского, изд. «Наука», 1969. — 592 с.

Правила оформления материалов, направляемых для опубликования в журнале «Навигация и управление летательными аппаратами»

- Для опубликования в журнале принимаются статьи объемом до 30 с., а также краткие сообщения объемом до 5 стр.
- Статья должна иметь аннотацию не более 600 знаков, ключевые слова.
- На первой странице должны быть указаны: фамилии и инициалы авторов, полное название текста статьи без сокращений, проставлен индекс УДК.
- Материалы должны быть подготовлены в формате *.doc, лист А4, ориентация книжная (вертикальное расположение), шрифт Times New Roman, размер шрифта 12, интервал между строками одинарный, поля (мм): верхнее 22, нижнее 50, левое 30, правое 28, расположение страниц зеркальное. Установить «Автоматическую расстановку переносов». Переносы вручную не ставить.
- Формат формул в MathType или Microsoft Equation: Define Sizes, Full 12 pt, Subscript/Superscript 7 pt, Sub-Subscript/Superscript 5 pt, Symbol 18 pt, Sub-Symbol 12 pt.
- Иллюстрированный материал представляется в формате *.jpg, *.bmp, *.png (разрешение не менее 300 точек на дюйм) или в виде рисунка Word, фрагменты которого объединены в единый объект. Цветные иллюстрации приветствуются.
- В конце текста указывается информация о каждом авторе: Ф. И. О., ученая степень, ученое звание, полное название и почтовый адрес организации, должность, контактные телефоны (служебный, мобильный или домашний), адрес электронной почты.
- В редакцию предоставляется электронный носитель с текстом статьи и ее распечатка в двух экземплярах, подписанная всеми авторами.
- К статье прилагается экспертное заключение о возможности ее открытой публикации, рецензия, лицензионный договор.
- Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Содержание

А. Г. Кузнецов, Ю. П. Николаев
Декомпозиция и анализ характеристического уравнения линейных стационарных систем с обратной связью. Критерий Гурвица.....2

А. В. Гребёнкин, О. Б. Кербер, А. А. Лушников
Применение технологии виртуальных летных испытаний в исследовании энергетических методов траекторного управления.....18

А. Г. Кузнецов, В. И. Галкин, Е. В. Кузин
Сравнительные характеристики автономных микромеханических курсовертикалей с радиальной и интегральной коррекцией.....52