МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И АВТОМАТИКИ (МИЭА)

НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

Под общей редакцией доктора технических наук А. Г. Кузнецова

Выпуск 30

Москва
2020

УДК 681.5.015.42

КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПУТЕВОЙ СКОРОСТЬЮ САМОЛЕТА И СИСТЕМЫ ВОЗДУШНЫХ СИГНАЛОВ*

Игорь Сергеевич КИКИН, *к. т. н.*
ФГУП «Государственный научно исследовательский институт авиационных систем» ГНЦ РФ
E-mail: kikin@gosniias.ru

Продемонстрирована эффективность мгновенного апостериорного оценивания (МАО) путевой скорости и путевой дальности самолета, реализуемого алгоритмом комплексной обработки информации инерциальной системы управления (ИСУ) путевой скоростью и системы воздушных сигналов. Сигнал коррекции ИСУ в режиме МАО формируется в режиме наблюдения процесса изменения истинной воздушной скорости. При проведении исследований использована имитационная математическая модель (ИММ) продольного канала инерциального счисления пути, функционирующего совместно с системой автоматического регулирования тяги двигателя для управления путевой скоростью полета. В ИММ учитывались следующие факторы неопределенности измерительной информации и внешних воздействий:

- аддитивная и мультипликативная погрешности измерения продольного ускорения;

- погрешность измерения динамического давления;

- погрешность априорных данных о коэффициенте лобового сопротивления;

- отклонения статического давления и температуры воздуха от значений, соответствующих международной стандартной атмосфере;

- ошибки измерений статического давления и температуры;

- возмущающая продольная сила;

- ветровое возмущение.

Указанные факторы задаются случайными числами, которые сохраняют постоянные значения на интервале наблюдения.

Главное достоинство реализации режима МАО – возможность коррекции ИСУ, не используя внешних информационных систем позиционирования.

Проведен анализ точности оценивания в режиме МАО путевой скорости и путевой дальности самолета.

Ключевые слова: *мгновенное апостериорное оценивание, инерциальная система управления, инерциальное счисление пути, путевая дальность, накопление погрешностей измерения.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-08-00752

GROUND SPEED INERTIAL CONTROL SYSTEM AND AIR DATA SYSTEM INTEGRATION

Igor S. KIKIN, *PhD in Engineering*
'FSUE "State Research Institute of Aviation Systems' State Scientific Center of Russian Federation
E-mail: kikin@gosniias.ru

The article shows the efficiency of aircraft ground speed and along track distance instantaneous posterior estimation (IPE), implemented by the ground speed inertial control system (ICS) and air data system integrated data processing algorithm. ICS update signal in IPE mode is generated in true air speed change monitoring mode. Simulation mathematical model (SMM) of inertial dead reckoning longitudinal channel that operates together with the engine thrust control system for ground speed control was used for research. The following factors of measurement data uncertainty and external influences were considered in SMM:

- *additive/multiplicative longitudinal acceleration measurement errors;*
- *dynamic pressure measurement error;*
- *drag coefficient apriori data error;*
- *static pressure and air temperature deviations from the ISA values;*
- *static pressure and temperature measurement errors;*
- *disturbing axial force;*
- *wind disturbance.*

The specified factors are determined as random numbers that remain constant on the monitoring interval.

IPE mode implementation main benefit is the possibility of ICS updating without using external positioning systems.

The analysis of the aircraft ground speed and along track distance estimation accuracy in IPE mode was performed.

Keywords: *instantaneous posterior estimation, ground speed inertial control system, inertial dead reckoning, along track distance, measurement error accumulation.*

*The study was supported by grant № 19-08-00752 from RFBR (Russian Foundation for Basic Research)

Введение

Важная научная проблема в области прикладной теории автоматического управления – создание методов синтеза информационно-управляющих систем (ИУС), в которых реализуется формирование оценок вектора состояния объекта управления (ОУ), инвариантных к погрешностям измерения вектора выхода объекта.

Эта проблема наиболее актуальна для ИУС с накоплением ошибок измерений, в которых непосредственно измеряется первая или вторая производная обобщенной позиционной координаты, а сама координата определяется в результате однократного или двукратного интегрирования непосредственно измеряемой величины. Применительно к таким системам решение проблемы позволяет реализовать коррекцию ошибок счисления позиционных координат без внешних систем позиционирования.

Перспективный метод решения проблемы — мгновенное апостериорное оценивание (МАО) состояния ОУ. Общие принципы построения алгоритмов МАО представлены в [1, 2]. Использование на данном этапе исследований максимально простых адекватных моделей САУ позволяет реализовать принцип решения проблемы «от простого к сложному», заключающийся в обобщении результатов решения конкретных частных задач. Результаты исследования вариантов применения МАО для одноканальных САУ приведены в [3 – 7].

Общий алгоритм оценивания состояния ОУ с использованием режима МАО включает в себя следующие этапы:

1. Формирование исходных данных для имитации процесса управления и/или процесса измерений при отсутствии факторов неопределенности (при полной априорной информации об условиях реализации процессов):

1.1 Пассивное накопление информации об управляемом процессе с регистрацией наблюдаемых переменных состояния и управления, а также формированием необходимых текущих оценок параметров процесса.

1.2 Апостериорная параметрическая идентификация в режиме МАО факторов неопределенности процесса управления — случайных воздействий на ОУ и ошибок измерителей.

2. Моделирование указанных в п. 1 процессов в режиме МАО с целью формирования имитационных оценок координат состояния ОУ, инвариантных к ошибкам измерений.

Наиболее затратный по загрузке вычислительных ресурсов алгоритм — алгоритм этапа 1.2, который требует, как правило, реализации

схемы идентификации с настраиваемой моделью. На настоящем этапе развития теории МАО осуществляется поиск решений конкретных практических задач с упрощенным режимом идентификации факторов неопределенности. Один из вариантов такого упрощения связан с возможностью оценивания эквивалентного возмущения, действующего на объект управления по установившемуся значению управляющей переменной [3, 4].

В [6, 7] представлены результаты исследований применения МАО в системах курсо-доплеровского и курсо-воздушного счисления путевой дальности (ПД) самолета. Оценка путевой скорости (ПС) и ПД формировалась в режиме МАО с использованием на входе модели движения объекта эквивалентной возмущающей силы, определяемой по величине управляющего воздействия в установившемся режиме полета. Принципиальное значение для точности оценивания в режиме МАО на основе идентификации эквивалентного возмущения имеет реализация связи, компенсирующей силу лобового сопротивления [6], представленной в разделе «Постановка задачи». В [7] представлены результаты разработки алгоритмов оптимальной коррекции эквивалентного возмущения, позволяющей практически исключить влияние ошибок априорных данных о c_X и минимизировать погрешности оценивания для конечного момент интервала наблюдения.

В настоящей работе представлены результаты исследования точности счисления ПД самолета с использованием комбинированной ИУС, включающей в себя: инерциальный канал регулирования ПС и счисления ПД; систему воздушных сигналов (СВС), обеспечивающую косвенное измерение истинной воздушной скорости.

Имитационные математические модели анализируемого канала управления и счисления пути соответствуют концепции алгоритмического конструирования САУ, представленной в [1, 2]. В имитационной математической модели рабочего режима (ИМРР), применяемой для имитации функционирования реальной системы на интервале наблюдения, учтены следующие факторы неопределенности измерительной информации и внешних воздействий:

- аддитивная и мультипликативная погрешности измерения продольного ускорения,
- погрешность измерения динамического давления;
- погрешность априорных данных о коэффициенте лобового сопротивления;
- отклонения статического давления и температуры воздуха от значений, соответствующих международной стандартной атмосфере;
- ошибки измерений статического давления и температуры атмосферного воздуха;

- возмущающая продольная сила;
- ветровое возмущение.

При имитационном моделировании процессов регулирования скорости полета ЛА и ее оценивания указанные факторы представляются случайными числами, которые сохраняют постоянные значения на интервале наблюдения. Задача решалась в условиях отсутствия априорных данных о ветре.

Тяга силовой установки в ИМРР, так же как и в моделях, описываемых в [6] и [7], представляется переменной величиной, непосредственно формируемой регулятором. В этой части имитационная модель отличается от физической, поскольку фактическая управляющая переменная – положение дроссельной заслонки. Тяга и расход топлива определяются функциональной зависимостью вида $P = \phi(\bar{\delta}, M, h)$, где $\bar{\delta}$ — относительное положение дроссельной заслонки,

M — число Маха,

h — высота полета над уровнем моря.

Для исследуемой проблемы методическая погрешность алгоритма формирования тяги приводит к изменению случайной возмущающей силы F, которая применяется в ИМРР в качестве групповой оценки случайных силовых воздействий на ОУ.

Применение инерциальных систем управления (ИСУ) связано с необходимостью компенсации накопления ошибок измерений, осуществляемой за счет скоростной и позиционной коррекции ИСУ с использованием внешних источников информации.

В настоящей статье в качестве внешнего источника информации рассматривается СВС, входящая в состав обязательного приборного оборудования самолета. Продемонстрирован вариант применения МАО для комплексной обработки информации о параметрах полета летательного аппарата.

Следует сразу обратить внимание на применение упрощенных моделей случайных факторов реализации процессов регулирования, счисления ПД и коррекции ИСУ, в том числе исключение из рассмотрения шумовых составляющих измерений, которые требуют применения традиционных методов фильтрации. Результаты, приведенные в статье, можно рассматривать как постановку задачи создания методов коррекции ИСУ без внешней системы позиционирования носителя.

Постановка задачи

Исходные данные для синтеза алгоритмической структуры ИУС

1) Система дифференциальных уравнений, описывающая полет самолета на постоянной высоте.

$$\begin{cases} dL/dt = W, \\ dW/dt = m^{-1}\left(P + X + F\right), \\ dm/dt = \dot{m}_{\text{уд}} \cdot P, \end{cases} \qquad (01)$$

где L — текущее значение ПД самолета, м; W — ПС самолета, м/с; m — масса ЛА, кг; P — тяга силовой установки, Н; X — сила лобового сопротивления, Н; F — продольная возмущающая сила, Н; $\dot{m}_{\text{уд}}$ — удельный расход топлива, кг/Н·с; $\dot{m}_{\text{уд}} = \text{const}$.

$$X = -c_X qS,$$

где c_X — безразмерный аэродинамический коэффициент сопротивления; S — характерная площадь; q — динамическое давление (скоростной напор), Па.

$$q = 0{,}5\rho V^2,$$

где ρ — плотность воздуха, соответствующая эшелону полета, кг/м^3.

$$\rho = \frac{p \cdot \mu}{R \cdot T},$$

где p — статическое давление воздуха на высоте полета, Па; μ — молярная масса сухого воздуха (μ = 0,0289644 кг/моль); R — универсальная газовая постоянная (R = 8,31447 Дж/(моль)·К); T — температура воздуха на высоте полета, К.

$$p = p_{\text{МСА}} + \Delta p_{\text{МСА}},$$

$$T = T_{\text{МСА}} + \Delta T_{\text{МСА}},$$

где индекс «МСА» — значение параметра, соответствующее Международной стандартной атмосфере, Δ — отклонение фактического значения параметра от стандартного.

V — истинная воздушная скорость ЛА, м/с.

$$V = W - U_{\text{ЭКВ}},$$

где $U_{\text{ЭКВ}}$ — скорость эквивалентного ветра, направление которого совпадает с линией пути, а скорость такова, что он создает такую же ПС,

как и реальный ветер. В данной работе исследование проводится в предположении отсутствия априорной информации о ветре. В ИММ скорость эквивалентного ветра задается случайным числом, сохраняющим постоянное значение на интервале наблюдения. Положительному значению $U_{\text{ЭКВ}}$ соответствует попутный ветер.

2) Модель измерений.

Описывает процесс инерциального счисления величины ПС и ПД самолета, а также процессы косвенного измерения истинной воздушной скорости и числа Маха в СВС.

Введем обозначение продольного ускорения: $\dfrac{d^2L}{dt^2} = \dfrac{dW}{dt} = \sigma.$

$$\begin{cases} \sigma^* = \sigma(1+\lambda) + \eta, \quad W^* = W^*(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \sigma^*(\tau)d\tau, \quad L^* = L^*(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} W^*(\tau)d\tau, \\ q^* = (1+\beta)q, \quad \rho^* = \dfrac{p^* \cdot \mu}{R \cdot T^*}, \quad p^* = p + \Delta p, \quad T^* = T + \Delta T, \quad V^* = \sqrt{2q^*/\rho^*}, \\ a^* = 20{,}047\sqrt{T^*}, \quad M^* = V^*/a^*. \end{cases} \tag{2}$$

где a — скорость звука; M — число Маха; знаком «*» обозначены измеренные значения параметров полета, а символом «Δ» — отклонения измеренных значений от фактических.

3) Коэффициент лобового сопротивления $c_X = c_X^* + \Delta c_X$,
где c_X — фактическое значение коэффициента, $c_X^* = c_X^*(M^*)$ — значение коэффициента лобового сопротивления по априорным данным об аэродинамических характеристиках ЛА, Δc_X — погрешность априорных данных.

4) Диапазоны значений факторов неопределенности измерительной информации и возмущений: $|\Delta p_{\text{МСА}}| \le 0{,}05 p_{\text{МСА}}$, Па$\left(\text{Н}/\text{м}^2\right)$;

$$|\Delta p| \le 200, \text{ Па}; \quad |\Delta T_{\text{МСА}}| \le 0{,}05 T_{\text{МСА}}, \text{ К}; \quad |\Delta T| \le 5, \text{ К};$$

$$|F| \le 0{,}15 P_{\max \text{КР}}, \text{ Н}; \quad |U_{\text{ЭКВ}}| \le 50, \text{ м/с}; \quad |\beta| \le 0{,}01;$$

$$|\Delta c_X| \le 0{,}05 c_X; \quad |\lambda| \le 0{,}01; \quad |\eta| \le 0{,}02, \text{ м/с}^2,$$

где $P_{\max \text{КР}}$ — максимальная тяга силовой установки в крейсерском режиме.

5) Структура регулятора тяги силовой установки.

В структуру регулятора тяги ИМРР введена связь, компенсирующая силу лобового сопротивления (определяет отличие структур, представленных на рис. 1 и рис. 1а). В задачах, представленных в [6] и [7] такая связь была необходимой для реализации МАО. В рассматриваемой задаче возможность реализации или эффективность МАО счисляемых переменных не является причиной реализации компенсирующей связи. Целесообразность ее реализации обусловлена возможностью улучшения динамических свойств контура регулирования скорости полета самолета при отработке начальных возмущений.

При реализации компенсирующей связи тяга силовой установки представляется в виде двух слагаемых:

$$P = P_X + P_R$$

где $P_X = c_X^* q^*$ — компонента тяги, компенсирующая силу лобового сопротивления; P_R — компонента тяги, формируемая регулятором скорости полета.

$$P_R = P_{RP} + P_{RJ},\ P_{RP} = k_P \varepsilon^*,\ P_{RJ} = P_{RJ}(t_0) + k_J \int_0^t \varepsilon^*(\tau)\, d\tau, \qquad (3)$$

где P_{RP}, P_{RJ} — пропорциональная и интегральная составляющие управляющего сигнала, формируемого регулятором;

$\varepsilon^* = W^* - W_{\text{ЗАД}}$ — рассогласование измеренной и заданной путевой скорости полета;

k_P, k_J — коэффициенты пропорциональной и интегральной составляющих сигнала регулятора;

$P_{RJ}(t_0)$ — начальное значение интегральной составляющей сигнала регулятора.

Формулировка задачи

1) Для управляемого процесса, соответствующего (1) – (3), синтезировать модель измерительного процесса, обеспечивающую в режиме МАО формирование имитационных оценок ПС и ПД самолета, точность которых в момент завершения интервала наблюдения не зависит от погрешностей измерения ускорения.

2) Оценить точность коррекции ошибок инерциального счисления ПС и ПД в режиме МАО.

Примечание. Оценка точности проводится без учета погрешностей информации о начальной скорости и начальном местоположении ЛА.

Имитационная модель полета самолета на интервале наблюдения

Первый этап реализации метода МАО заключается в наблюдении на заданном интервале времени рабочего режима ОУ (режима штатной эксплуатации). На этапе научных исследований необходимо создать имитационную модель рабочего режима (ИМРР) в соответствии с исходными данными, представленными в постановке задачи. Структурная схема ИМРР представлена рис. 1.

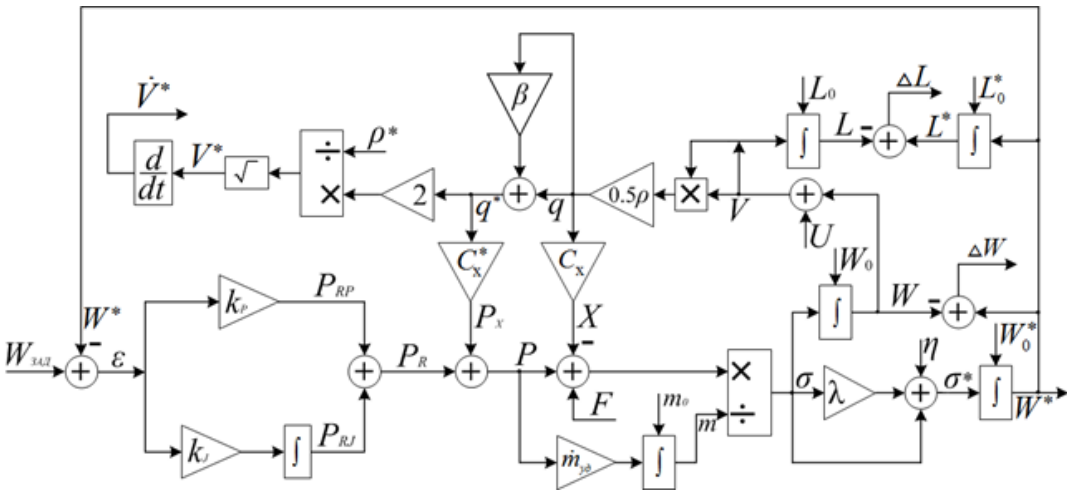


Рис. 1. Структурная схема имитационной математической модели полета самолета в режиме инерциального управления путевой скоростью

На схеме отображены основные связи исследуемой системы и, во избежание громоздкости, не раскрыты функциональные зависимости, определяющие значения $\rho, \rho^*, c_X^*,$ и M^*. Эти величины вычисляются в модели по формулам, представленным в постановке задачи.

На рис. 1а представлена схема варианта ИМРР без связи, компенсирующей силу лобового сопротивления. Она была использована с целью подтверждения идентичности характеристик режима МАО для двух вариантов регуляторов: со связью, компенсирующей силу лобового сопротивления, и без указанной связи.

ИМРР в рассматриваемой задаче имитирует горизонтальный полет самолета по линии заданного пути в режиме разгона до заданной ПС с последующим ее поддержанием автоматом тяги. Для формирования обратной связи по ПС используется выходной сигнал первого интегратора модели продольного инерциального канала счисления пути W^*. Имитируется также процесс измерения истинной воздушной скорости в СВС и процесс вычисления ее производной, которая принята в качестве информационного параметра о продольном ускорении самолета $\dot{V}^*$.

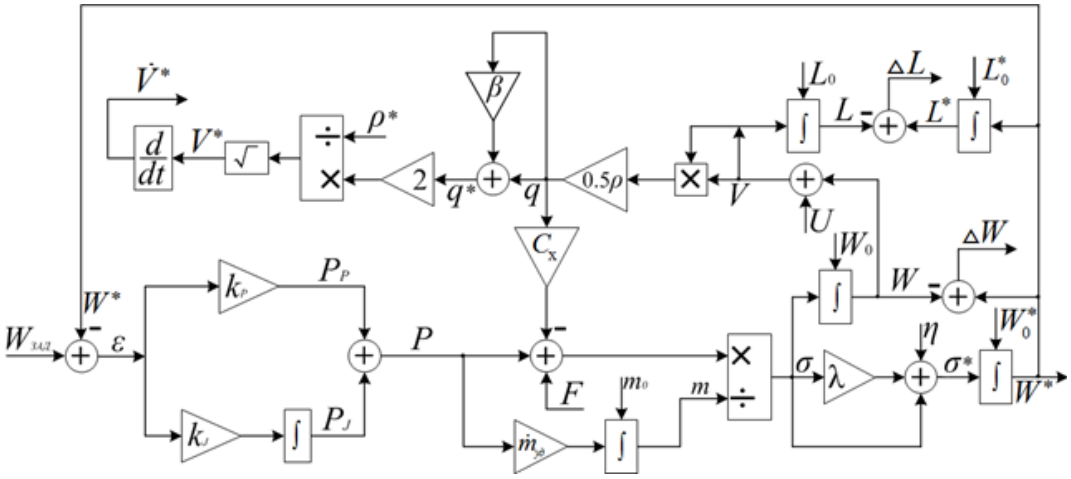


Рис. 1а. Структура варианта ИМРР без связи, компенсирующей силу лобового сопротивления

Модель учитывает влияние на процесс регулирования ПС и счисления ПД самолета априорно неопределенных условий его реализации: возмущений и ошибок измерения параметров полета.

На рис. 2 представлена схема, определяющая структуру входной и выходной информации ИМРР.

Рис. 2. Массивы входных данных и информационные потоки, формируемые ИМРР

На рис. 2 приняты следующие обозначения:

$X(t_0) = \{W_0, W_0^*, L_0, L_0^*, P_{RJ}(t_0)\}$ — массив начальных условий;

$W_{ЗАД}$ — заданная путевая скорость самолета;

$\xi = \{\Delta p_{МСА}, \Delta T_{МСА}, \Delta p, \Delta T, U_{ЭКВ}, \beta, \Delta c_X, F, \lambda, \eta\}$ — массив случайных параметров имитируемого процесса;

$Q^* = \{\sigma^*, W^*, L^*, \varepsilon^*, V^*, \dot{V}^*, q^*\}$ – кортеж наблюдаемых переменных;

$Q^*_{\text{con}} = \{P, P_R, P_X, P_{RP}, P_{RJ}, m\}$ — кортеж условно наблюдаемых переменных;

$Q = \{\sigma, W, L, V, q, \Delta W, \Delta L\}$ — кортеж ненаблюдаемых переменных.

Условно наблюдаемые переменные функционально зависят от других переменных, которые не формируются данной моделью. Ненаблюдаемые переменные — дополнительная информация для анализа процесса управления, аналогичная недоступной в реальных условиях информации о фактическом состоянии ОУ.

Структура модели измерительного процесса для апостериорного оценивания счисляемых переменных

Как отмечалось ранее, на завершающем этапе МАО имитируется либо процесс управления, либо процесс измерения при полной априорной информации об условиях реализации процесса. В проводимых ранее исследованиях, результаты которых представлены в [1—7], этап оценивания завершается моделированием эволюции ОУ, на вход которого подается сумма управляющего воздействия и эквивалентного возмущения, приведенного к управляющему входу ОУ. Управляющее воздействие — результат регистрации реального процесса управления. Эквивалентное возмущение — апостериорная оценка неконтролируемого воздействия на ОУ, реализованного на интервале наблюдения.

В настоящей работе представлены результаты исследования точности оценивания ПС и ПД самолета в режиме МАО с использованием модели измерительного процесса. Корректирующая поправка к измеряемой продольной составляющей ускорения формируется в результате пассивного накопления информации о воздушной скорости в режиме наблюдения. Указанная поправка определяется по установившемуся значению производной измеряемой воздушной скорости на основании приближенного равенства:

$$\dot{V}^*_\infty \simeq \dot{V}_\infty \simeq -\Delta\sigma_\infty, \tag{5}$$

где $\dot{V}^*_\infty, \dot{V}_\infty$ — производные по времени измеренной и фактической истинной воздушной скорости в установившемся режиме, $\Delta\sigma_\infty$ — погрешность измерения продольного ускорения в установившемся режиме.

$$\Delta\sigma = \sigma^* - \sigma.$$

Нетрудно показать, что $\sigma^*_\infty \simeq 0$. Тогда $\Delta\sigma_\infty \simeq -\sigma_\infty$.

Из выражения для измеренного ускорения $\sigma^* = \sigma(1+\lambda)+\eta$ следует:

$$\Delta\sigma = \sigma\lambda + \eta, \tag{6}$$

$$\Delta\sigma_\infty = \frac{\eta}{1+\lambda}. \tag{7}$$

При наличии только аддитивной погрешности измерений $\Delta\sigma = \eta$, $\dot{V}_\infty^* \simeq -\Delta\sigma_\infty = -\eta$ и реализуема практически идеальная коррекция счисляемых переменных.

Схема оценивания счисляемых переменных в режиме МАО с целью коррекции продольного канала ИСУ представлена на рис. 3, где $\Delta\sigma^\circ = \dot{V}_\infty^*$ — поправка измеренного ускорения, определяемая на интервале наблюдения, $\sigma^\circ, W^\circ, L^\circ$ — апостериорные оценки продольного ускорения, ПС и ПД, соответственно.

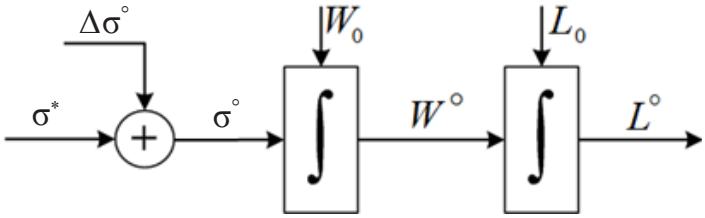


Рис. 3. Структура модели измерительного процесса для апостериорного оценивания счисляемых переменных

В рамках рассматриваемой упрощенной структуры МАО ПС и ПД в силу неразделимости η и λ компенсируема только аддитивная погрешность измерения продольного ускорения, которая оказывает определяющее влияние на точность инерциального счисления ПС и ПД самолета. Мультипликативная погрешность, как следует из формулы (7), незначительно изменяет информационный параметр $\dot{V}_\infty^*$ и практически не сказывается на точности компенсации аддитивной погрешности измерения. Накопление мультипликативной погрешности измерения происходит только в переходных режимах контура регулирования ПС, связанного с запланированным разгоном или торможением самолета.

Анализ точности мгновенного апостериорного оценивания путевой скорости и путевой дальности самолета

Процессы счисления пути с применением МАО исследовались при полете самолета на эшелоне 8000 м. Длительности интервала наблюдения $t_f - t_0 = 500$ с, где t_0, t_f — моменты начала и конца интервала наблюдения соответственно.

Начальное и заданное значение путевой скорости самолета:

$$W_0 = 200 \text{ м/с}, \; W_{\text{зад}} = 240 \text{ м/с}.$$

Установившийся скоростной режим достигается приблизительно на 200-й секунде интервала наблюдения.

Максимальные некомпенсированные погрешности ПС и ПД, обусловленные аддитивной ошибкой измерения, накопленные на интервале наблюдения:

$$\left|W_{\max}(\eta)\right| = \eta_{\max}\left(t_f - t_0\right) = 10 \text{ м/с}; \; \left|L_{\max}(\eta)\right| = 0{,}5\eta_{\max}\left(t_f - t_0\right)^2 = 2500 \text{ м},$$

где $\eta_{\max}$ — максимальная по абсолютной величине аддитивная погрешность измерения.

Текущая погрешность счисления ПС и ПД, обусловленная мультипликативной ошибкой измерения, определяются формулами:

$$\begin{cases} \Delta W(t,\lambda) = \lambda \int\limits_{t_0}^{t} \sigma(\tau) d\tau = \lambda\left(W(t) - W_0\right); \\ \Delta L(t,\lambda) = \lambda \int\limits_{t_0}^{t} W(\tau) d\tau = \lambda\left[\left(L(t) - L_0\right) - W_0\left(t - t_0\right)\right]. \end{cases} \tag{8}$$

Максимальные некомпенсированные погрешности ПС и ПД, обусловленные мультипликативной ошибкой измерения, на момент окончания интервале наблюдения:

$$\left|\Delta W_{\max}\left(t_f,\lambda\right)\right| = \lambda_{\max}\left|\left(W_{\text{ЗАД}} - W_0\right)\right|; \tag{9}$$

$$\left|\Delta L_{\max}\left(t_f,\lambda\right)\right| = \lambda_{\max}\left[\left(L\left(t_f\right) - L_0\right) - W_0\left(t_f - t_0\right)\right]. \tag{10}$$

Для принятых параметров полета $\left|\Delta W_{\max}\left(t_f,\lambda\right)\right| = 0{,}4$ м/с.

Представим формулу (10) в виде:

$$\left|\Delta L_{\max}\left(t_f,\lambda\right)\right| = \lambda_{\max}\left|\overline{W} - W_0\right|\left(t_f - t_0\right),$$

где $\overline{W}$ — средняя скорость самолета на интервале наблюдения.

Для оценки средней путевой скорости построены верхняя и нижняя границы переходных функций процесса регулирования ПС, которые соответствуют максимальным положительному и отрицательному значениям продольной возмущающей силы.

Указанные границы изображены на рис. 4.

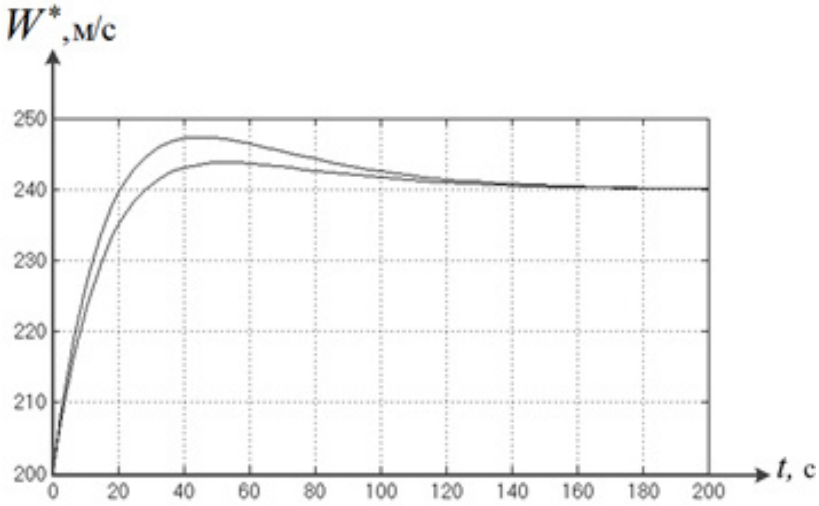


Рис. 4. Границы переходных функций процесса регулирования ПС

Средняя ПС в переходном режиме близка к заданной ПС и находится в пределах 237–239 м/с. Этот факт позволяет ограничиться приближенной оценкой максимальной погрешности счисления ПД, обусловленной мультипликативной ошибкой измерения:

$$\left|\Delta L_{\max}\left(t_f,\lambda\right)\right| \simeq \lambda_{\max}\left(\left|W_{\text{ЗАД}}-W_0\right|\right)\left(t_f-t_0\right)=200\ \text{м}.$$

На последующих этапах анализа точности МАО ПС и ПД самолета:

· проведено моделирование, показавшее независимость информационного параметра $\dot{V}_\infty^*$ от уровня имитируемых возмущающих воздействий и соответствие величины параметра формуле (7);

· получены оценки чувствительности информационного параметра к ошибкам измерений СВС.

Результаты указанной оценки чувствительности представлены в табл. 1, где показаны значения $\Delta\dot{V}_\infty^*=\left|\dot{V}_\infty^*-\eta\left(1+\lambda\right)^{-1}\right|$ при максимальных ошибках СВС.

Таблица 1. Зависимость $\Delta\dot{V}_\infty^*$ от ошибок СВС

Ошибки СВС / Ошибки измерения σ	$\lvert\Delta p\rvert=200$, Па	$\lvert\Delta T\rvert=5$, °К	$\lvert\beta\rvert=0{,}01$
$\lambda=\pm0{,}01,\ \eta=\pm0{,}02$ в любых сочетаниях	$5{,}6^{-5}$	0,0002	0,0001

Представленные в табл. 1 данные показывают, что определяющее влияние на точность оценивания оказывает ошибка измерения абсолютной температуры атмосферного воздуха.

При оценке точности МАО будем использовать погрешность измерения температуры, которая по степени влияния на информационный параметр эквивалентна всей рассматриваемой совокупности ошибок измерений СВС:

$\Delta T_{\text{экв}} = \Delta T\left(1+\sum_k \alpha_k^2\right)^{0,5}$, где α_k — параметр приведения уровня k-й ошибки измерения к уровню базовой.

С учетом данных табл. 1: $\left|\Delta T_{\text{экв}}\right| \simeq 5,8$, К.

На рис. 5 представлены оцененные в режиме МАО графики погрешностей ПС и ПД для различных вариантов сочетаний максимальных погрешностей измерений продольного ускорения и при максимальной эквивалентной погрешности измерения температуры атмосферного воздуха.

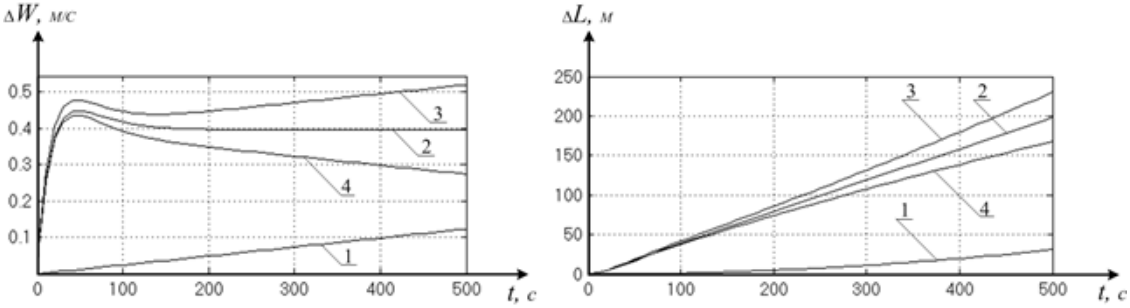


Рис. 5. Графики погрешностей ПС (ΔW) и ПД (ΔL)

1: $\eta = 0,02, \lambda = 0$. 2: $\eta = 0, \lambda = 0,01$. 3: $\eta = 0.02, \lambda = 0,01$.

4: $\eta = 0.02, \lambda = 0,01$.

Результаты моделирования показали, что, если в режиме инерциального счисления ПС и ПД определяющее влияние на точность счисления оказывает аддитивная погрешность измерения продольного ускорения, то в режиме МАО — мультипликативная погрешность. Очевидно, что при статистическом суммировании погрешностей режима МАО, суммарная максимальная погрешность будет соответствовать кривым с номером 2 на рис. 5. Таким образом, оценки ПС и ПД, полученные в режиме мгновенной апостериорной обработки информации инерциальной системы управления скоростью и СВС, практически не зависят от аддитивной погрешности измерения продольного ускорения.

Заключение

Метод мгновенного апостериорного оценивания открывает новые возможности для комплексной обработки информации о параметрах полета самолета. Получена оценка точности мгновенного апостериорного оценивания путевой скорости и путевой дальности самолета, реализуемого алгоритмом комплексной обработки информации инерциальной системы управления (ИСУ) путевой скоростью и системы воздушных сигналов. Указанная оценка продемонстрировала возможность коррекции ошибок инерциальных измерений в условиях отсутствия информации от внешних систем позиционирования.

Целесообразно продолжить исследования по созданию автономных информационно-управляющих систем летательных аппаратов, обеспечивающих коррекцию ошибок счисления координат объекта в условиях отсутствия информации о навигационных полях, используемых для позиционирования.

Литература

1. Кикин И. С. Метод повышения точности оценивания параметров состояния подвижного объекта управления // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 5. С. 10 – 20.

2. Кикин И. С. Концепция конструирования системы автоматического управления подвижным объектом с оцениванием ошибок измерения вектора выхода объекта. // Навигация и управление летательными аппаратами. 2019. № 25(2). С. 50 – 69.

3. Кикин И. С. Оценивание ошибок измерений в одноканальной системе управления угловым положением платформы на базе датчика угловой скорости. // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. №10. С. 32 – 43.

4. Кикин И. С. Применение принципа мгновенного апостериорного оценивания для одноканальной системы угловой ориентации платформы на базе датчика угловой скорости. // Навигация и управление летательными аппаратами. 2019. № 26(3). С. 46 – 66.

5. Кикин И. С. Идентификация факторов неопределенности условий функционирования одноканальной системы угловой ориентации. // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2020. № 1. С. 3 – 10.

6. Кикин И. С. Применение метода мгновенного апостериорного оценивания для повышения точности счисления пути самолета. // Навигация и управление летательными аппаратами. 2019. № 27(4). С. 16 – 30.

7. Кикин И. С. Оптимизация точности счисления длины пути самолета в режиме мгновенного апостериорного оценивания. // Навигация и управление летательными аппаратами. 2020. № 29(2). С. 28 – 42.

УДК 629.7.015

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПОНИЖЕНИЯ ТЯГИ ДВИГАТЕЛЕЙ НА РЕЖИМЕ «УХОД НА ВТОРОЙ КРУГ»

Александр Витальевич ГРЕБЁНКИН, *д.т.н.,*
Людмила Андреевна ВОЛОДИНА
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru,
Александр Александрович ЛУШНИКОВ
Группа компаний «Волга-Днепр»

Рассматривается возможность формирования комплексных управляющих воздействий системы автоматического управления в решении задачи оптимизации режима работы двигателей и траектории набора высоты при выполнении маневра «Уход на второй круг». Анализируются различные варианты управления тягой двигателей.

Ключевые слова: *стабилизация тяги, стабилизация заданной скорости полета, адаптивный автомат тяги.*

FEASIBILITY ASSESSMENT OF ENGINE THRUST REDUCTION DURING ‘GO AROUND’

Alexander V. GREBYONKIN, *D. Sc. in Engineering,*
Liudmila A. VOLODINA
‘Moscow Institute of Electromechanics and Automatics’ PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru
Alexander A. LUSHNICOV
‘Volga-Dnepr Group’

The article considers the feasibility to generate automatic flight control system integrated commands for engine performance and climb path optimization during ‘GO AROUND’. Different engine thrust control options are analyzed.

Keywords: *thrust hold, target flight speed hold, adaptive auto-throttle.*

Введение

Актуальной задачей летной эксплуатации воздушных судов (ВС) является повышение экономической эффективности, регулярности полетов магистральных самолетов и на этой основе расширение области ожидаемых условий эксплуатации при сохранении или повышении уровня безопасности полетов. Для решения этих задач проведены исследования, направленные на поиск оптимальных решений в области задач автоматического управления траекторным движением и тягой двигателей самолета в фактических условиях эксплуатации на режиме «Уход на второй круг».

Постановка задачи

Повышение уровня безопасности полетов и эффективности эксплуатации при выполнении режима «Уход на второй круг» возможно за счет минимизации влияния «человеческого фактора» и использовании преимуществ адаптивного управления. Это может быть достигнуто путем решения задачи по формированию комплексных управляющих воздействий, направленных на адаптивную коррекцию траектории и скорости полета с учетом запаса полной энергии самолета.

В общем случае при неустановившемся по скорости криволинейном наборе высоты или снижении изменяется полная энергия самолета. Выражение для полной энергии самолета можно записать в следующем виде

$$E = m \cdot g \cdot H + \frac{m \cdot V_k^2}{2}. \qquad (1)$$

Из выражения (1) видно, что запас энергии самолета определяется балансом высоты и скорости полета. Из условия сохранения полной энергии при неизменной массе самолета при наборе высоты создаются условия, способствующие уменьшению скорости полета пропорционально увеличению положительного градиента набора высоты (кинетическая энергия преобразуется в потенциальную), а при снижении – увеличение отрицательного градиента снижения способствует разгону самолета и, как следствие, увеличению кинетической энергии при соответствующем уменьшении потенциальной энергии.

На рис. 1 показана схема сил, действующих на самолет в режиме горизонтального полета (поз. 1) и режиме неустановившегося по скорости набора высоты (поз. 2).

Продольное движение самолета определяется балансом сил:

— в вертикальной плоскости — это подъемная сила самолета Y_a и сила тяжести mg;

— в горизонтальной плоскости — это суммарная сила тяги двигателей P и сила лобового сопротивления самолета X_a.

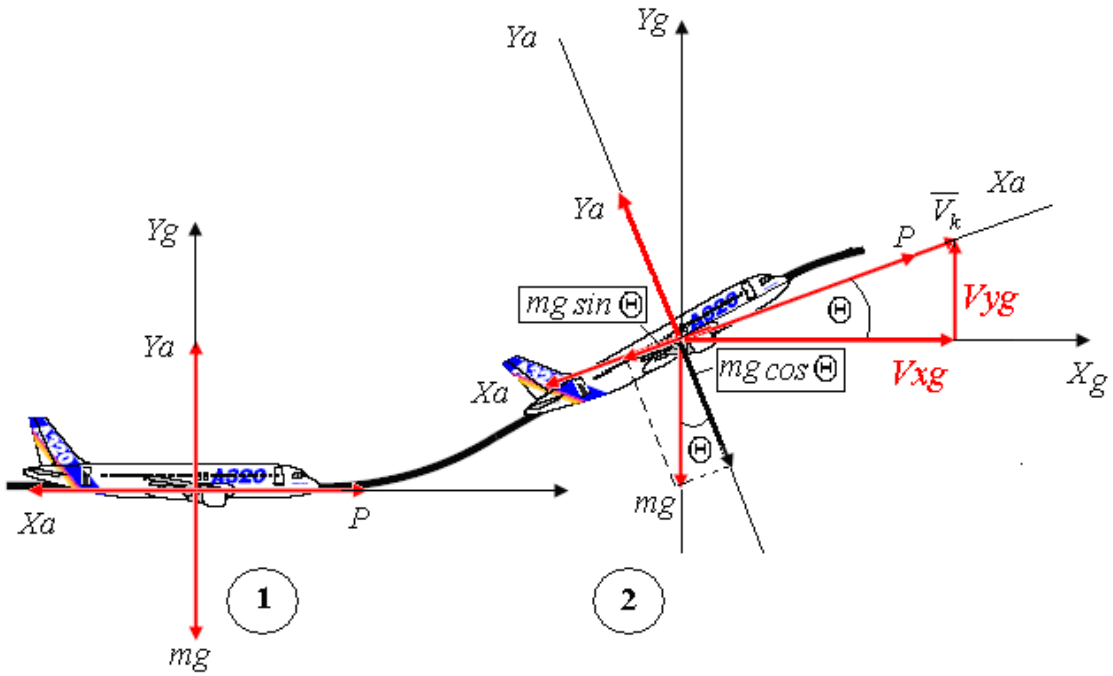


Рис. 1. Схема сил в режимах горизонтального полета и набора высоты

Очевидно, что для горизонтального прямолинейного полета с постоянной скоростью (см. рис. 1, поз. 1) режим полета будет определяться следующими равенствами:

$$\begin{cases} Y_a = mg; \\ X_a = P. \end{cases} \tag{2}$$

В этом случае суммарная энергия самолета не изменяется. Для искривления траектории (изменения потенциальной энергии) необходимо нарушить равенство подъемной силы и силы тяжести, а для разгона или торможения (изменения кинетической энергии) необходимо нарушить равенство силы тяги двигателей и силы лобового сопротивления самолета. В общем случае, уравнения криволинейного, неустановившегося по скорости движения самолета в вертикальной плоскости описываются

известными соотношениями (для простоты представления будем полагать, что ветер отсутствует):

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = P - X_a - mg \cdot \sin\Theta; \\ m \cdot V\dfrac{d\Theta}{dt} = Y_a - mg \cdot \cos\Theta. \end{cases} \tag{3}$$

Из выражений (3) видно, что для изменения скорости полета (см. рис. 1, поз. 2) требуется изменение тяги двигателей P и/или изменение угла наклона траектории Θ при неизменной массе m и силе лобового сопротивления самолета X_a. Дополнительную возможность управлять скоростью полета дает изменение силы лобового сопротивления самолета или управление этой силой. Очевидно, что скорость изменения полной энергии самолета будет определяться избытком мощности $V \cdot \left(P - X_a\right)$.

$$\frac{dE}{dt} = V \cdot \left(P - X_a\right). \tag{4}$$

Избыток тяги $P - X_a$ определяет величину угла наклона траектории и величину вертикальной скорости самолета. Из выражений (3) имеем

$$\frac{P - X_a}{mg} = n_{xa} = \frac{\dot{V}}{g} + \sin\Theta. \tag{5}$$

Учитывая, что $\dfrac{dH}{dt} = V_{yg} = V \cdot \sin\Theta,$ из выражения (5) имеем

$$\frac{P - X_a}{mg} = n_{xa} = \frac{\dot{V}}{g} + \frac{V_{yg}}{V}. \tag{6}$$

Из выражений (5) и (6) получим выражения для **потенциального угла наклона траектории и потенциальной вертикальной скорости**

$$\sin\Theta = \frac{P - X_a}{mg} - \frac{\dot{V}}{g}; \tag{7}$$

$$V_{yg} = V \cdot \left(\frac{P - X_a}{mg} - \frac{\dot{V}}{g}\right) = V \cdot \sin\Theta. \tag{8}$$

Очевидно, что при наборе высоты существует ограничение по максимальной величине потенциального угла наклона траектории $\Theta_{\max}$ и потенциальной вертикальной скорости $V_{y_{\max}}$

$$\Theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{P_{\text{изб.}}}{mg}\right)_{\max}, \tag{9}$$

$$V_{y_{\max}} = \left(\frac{N_{\text{изб.}}}{mg}\right)_{\max}. \tag{10}$$

В выражениях (9) и (10) избыточная тяга $P_{\text{изб.}} = P - X_a$, избыточная мощность $N_{\text{изб.}} = V \cdot P_{\text{изб.}}$.

Наиболее крутой набор высоты возможен при максимальном избытке тяги при полете без ускорения на практически минимальной скорости полета.

Набор высоты с максимальной вертикальной скоростью возможен на режиме максимальной избыточной мощности.

Энергетический подход в решении задачи ухода на второй круг можно реализовать путем траекторного управления в канале руля высоты, направленного на стабилизацию заданной величины потенциальной вертикальной скорости с различными способами управления тягой двигателей.

В статье рассматриваются два способа реализации энергетического подхода в управлении траекторией и тягой двигателей на режиме САУ «Уход на второй круг» применительно к самолетам МС-21-300 (см. рис. 2).

Рис. 2. Самолет МС-21-300

Способы отличаются манерой автоматического управления тягой двигателей. На режиме САУ «Уход на второй круг» заданная приборная скорость формируется с учетом максимально допустимой скорости полета (V_{FE}) для текущего положения закрылков и предкрылков (с линейной интерполяцией между узловыми точками) с учетом отступа (запаса на понижение скорости), определяемого функцией защиты диапазона (ФЗД) скоростных параметров:

$$V_{\text{пр. зад.}} = V_{FE}(\delta з/\delta пр) - 15 \text{ км/ч}, \tag{11}$$

где: 15 км/ч — запас для ФЗД.

В первом способе управления при включении автоматического режима «Уход на второй круг» (нажатием кнопки «TO/GA»), при включенном автомате тяги (нажата кнопка «A/T») автомат тяги переводит рычаги управления двигателями (РУД) во взлетное положение (МТО) и удерживает их в этом положении (режим «СТАБ. ТЯГА»). При приближении с заданной приборной скорости на величину $\Delta V_{\text{пр.зад.}} = 20$ км/ч автомат тяги переходит в режим управления и стабилизации заданной приборной скорости $V_{\text{пр.зад.}}$ (режим «SPEED») .

В режиме «SPEED» автомат тяги выполняет задачу управления и стабилизации заданных в алгоритме режима «Уход на второй круг» значений приборной скорости в зависимости от текущего положения закрылков и предкрылков. Управление положением взлетно-посадочной механизации крыла и шасси выполняется летчиком вручную в соответствии с величиной достигнутой скорости полета.

В процессе набора высоты круга на руль высоты формируется сигнал для выдерживания заданного значения потенциальной вертикальной скорости, скорректированной реакцией на темп изменения приборной скорости $\left(\dot{V}_{\text{пр}}\right)$:

$$\begin{aligned} &V_{y\text{зад.}} = \frac{1}{Tp+1}\cdot\left(K_{\text{П}}\left(V_y^{\text{ПОТ.}}\right)\cdot V_y^{\text{ПОТ.}} + K_{\dot{V}_{\text{пр}}}\cdot\dot{V}_{\text{пр}}\right), \\ &V_{y\min} \le V_{y\text{зад.}} \le V_{y\max}. \end{aligned} \tag{12}$$

В формуле (12) коэффициент $K_{\text{П}}\left(V_y^{ПОТ.}\right)$ определяет соотношение между заданной вертикальной скоростью и заданным темпом увеличения приборной скорости.

При приближении к заданной на пульте управления САУ высоте круга в канале руля высоты выполняется переход к фазе «выполаживание» (плавный выход на заданную высоту) с последующей стабилизацией заданной высоты круга.

Во втором способе управления рассматривается возможность использования «адаптивного» способа управления автоматом тяги на режиме «Уход на 2-ой круг», позволяющего в определенных условиях реализовать принцип ухода на второй круг с пониженной тягой. «Адаптивный» способ управления автоматом тяги на режиме «Уход на 2-ой круг» в отличие от «традиционного» способа, рассмотренного выше, предполагает, что при включении режима «Уход на второй круг» (нажатием кнопки «TO/GA») при нажатой кнопке «A/T» в канале тяги сразу подключать режим «SPEED» (стабилизация заданной на пульте управления САУ приборной скорости, соответствующей полету с убранной механизацией крыла), который в зависимости от условий полета управляет РУД-ами так, чтобы совместно с траекторным управлением в продольном канале обеспечить желаемый набор высоты с нормированными градиентами набора высоты и разгоном до скоростей уборки механизации, согласно руководству по летной эксплуатации самолета (РЛЭ). При этом РУД-ы не обязательно переводятся во взлетное положение, что приводит к некоторому замедлению темпа разгона и формируются более комфортные условия для пилота по управлению механизацией крыла.

Результаты математического моделирования

Некоторые результаты математического моделирования приведены на рис. 3...8. На рисунках приняты следующие обозначения, приведенные в таблице 1:

Таблица 1. Принятые обозначения

Идентификатор	Наименование параметра	Идентификатор	Наименование параметра, единицы измерения
RUD	Положение рычагов управления двигателем (РУД), град	Vy	Вертикальная скорость, м/с
Px1	Тяга двигателя, кг	Yg	Высота полета, м
Vpz	Заданная приборная скорость, км/ч	dlpr	Предкрылки, град.
Vpr	Приборная скорость, км/ч	Dlzar	Закрылки, град.

На рис. 3...5 приведены результаты математического моделирования ухода на второй круг для вариантов легкого самолета (вес самолета 46000 кг), а на рис. 6...8 приведены результаты для вариантов тяжелого самолета (вес самолета 70000 кг).

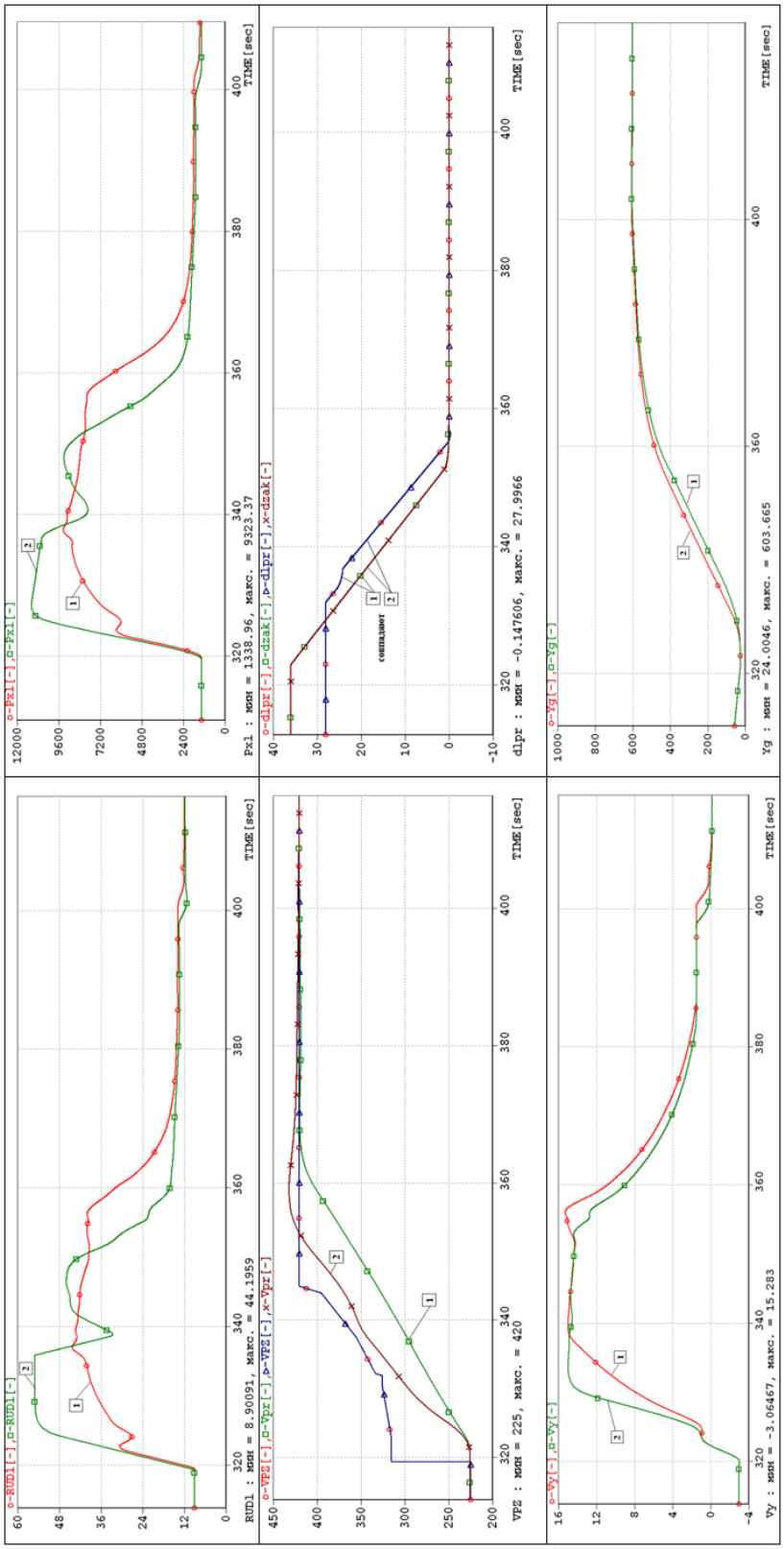


Рис 3. Уход на 2-й круг самолета МС-21-300 в стандартных атмосферных условиях без ветра.
Масса самолета 46000 кг.
1 - автомат тяги в режиме «SPEED»; 2 - автомат тяги в режиме «СТАБ. ТЯГА»

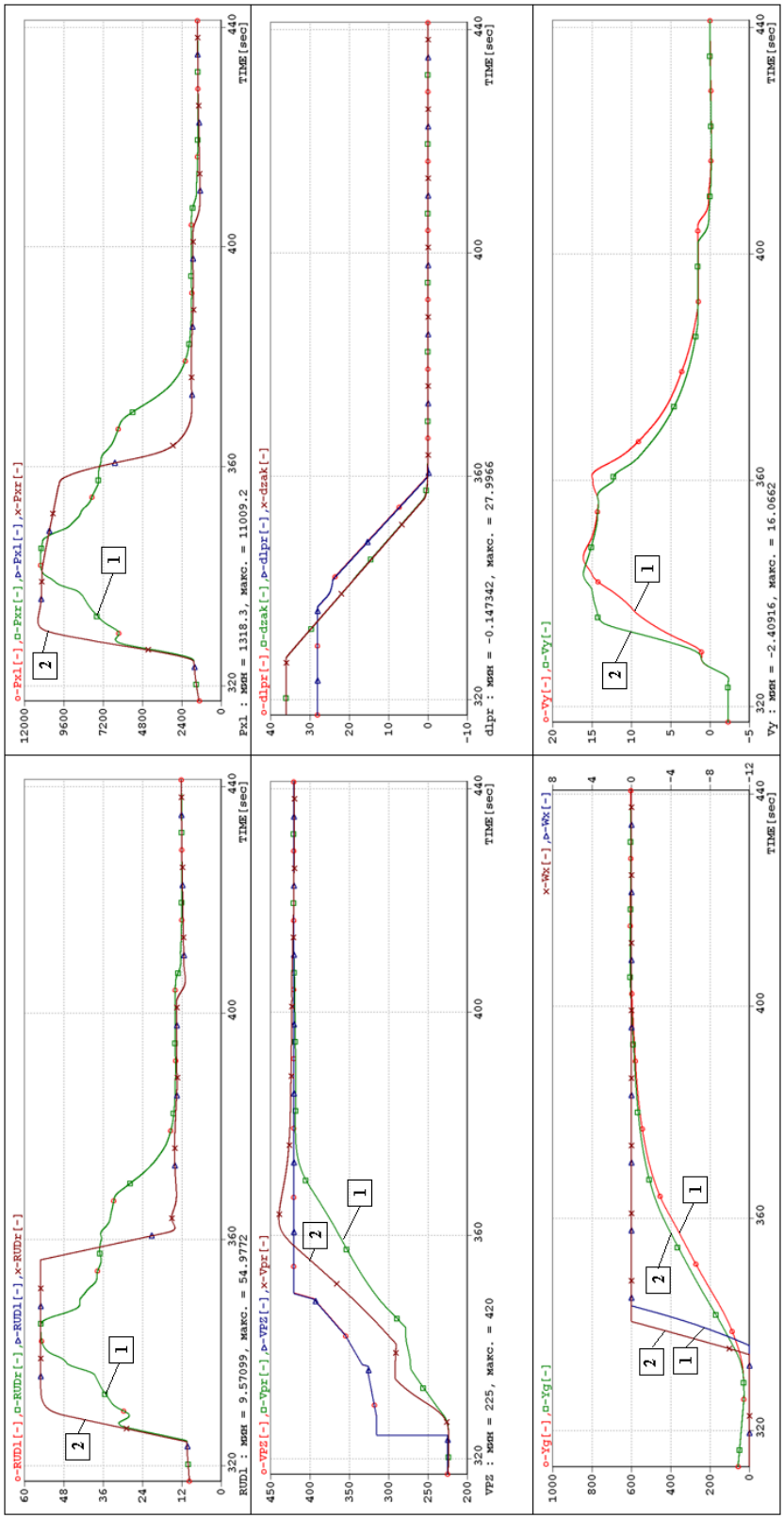


Рис 4. Уход на 2-й круг самолета МС-21-300 в условиях сдвига ветра с градиентом 4 м/с на 30 м высоты.
Масса самолета 46000 кг.
1 - автомат тяги в режиме «SPEED»; 2 - автомат тяги в режиме «СТАБ. ТЯГА»

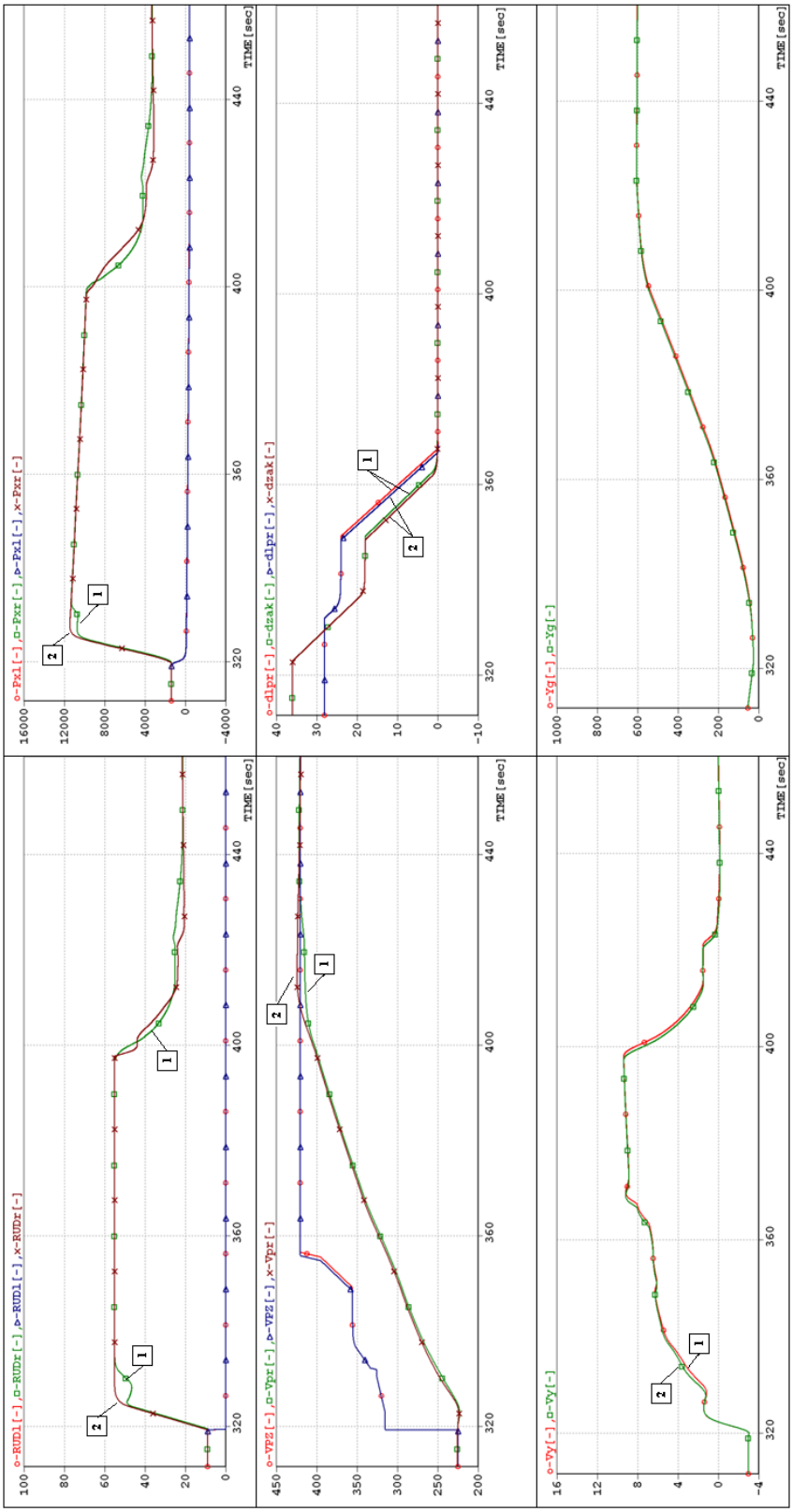


Рис 5. Уход на 2-й круг самолета МС-21-300 с отказом двигателя в момент начала ухода на второй круг.
Атмосферные условия стандартные без ветра. Масса самолета 46000 кг.
1 - автомат тяги в режиме «SPEED»; 2 - автомат тяги в режиме «СТАБ. ТЯГА»

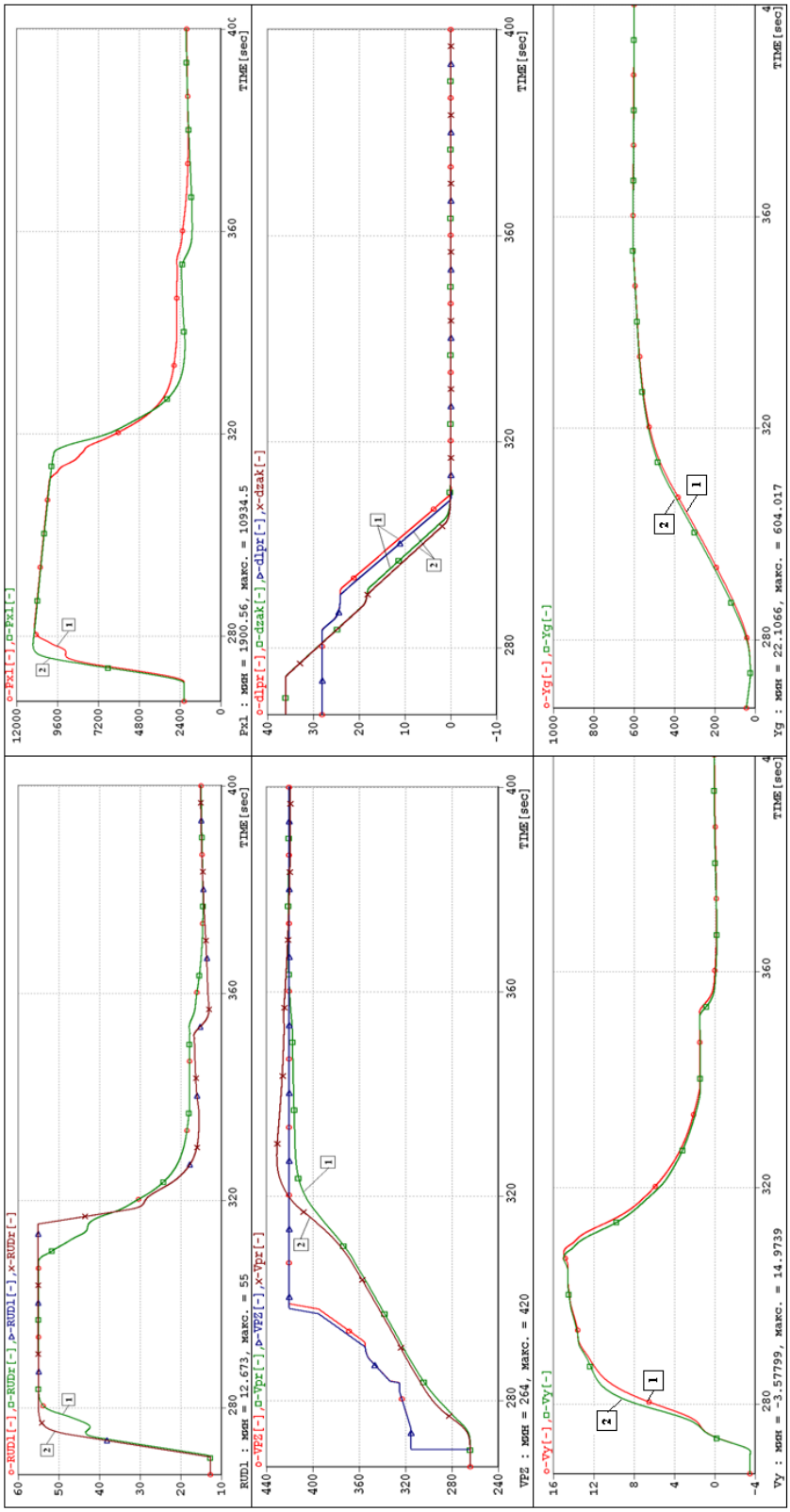


Рис 6. Уход на 2-й круг самолета МС-21-300 в стандартных атмосферных условиях без ветра.
Масса самолета 70000 кг.
1 - автомат тяги в режиме «SPEED»; 2 - автомат тяги в режиме «СТАБ. ТЯГА»

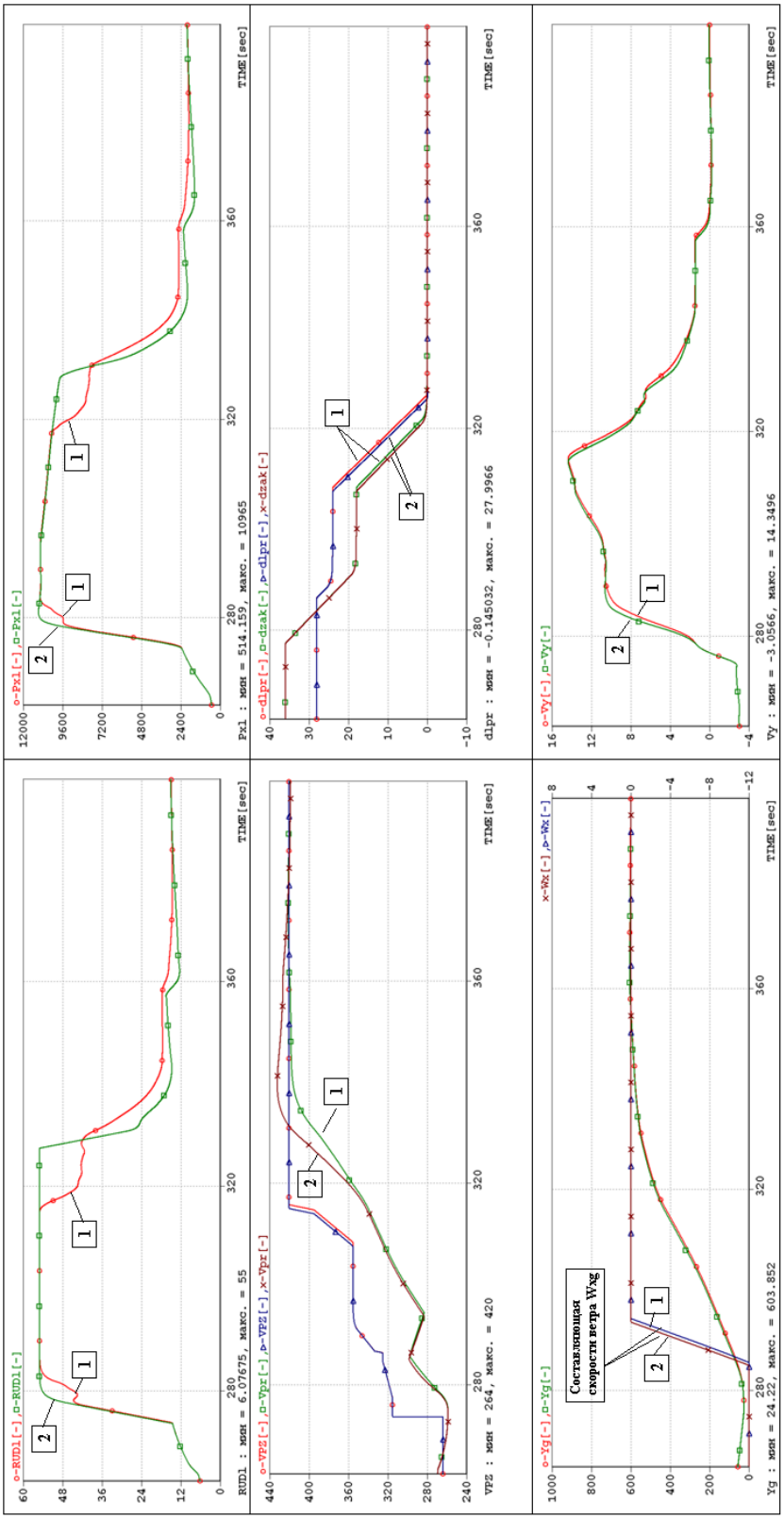


Рис 7. Уход на 2-й круг самолета МС-21-300 в условиях сдвига ветра с градиентом 4 м/с на 30 м высоты.
Масса самолета 70000 кг.
1 - автомат тяги в режиме «SPEED»; 2 - автомат тяги в режиме «СТАБ. ТЯГА»

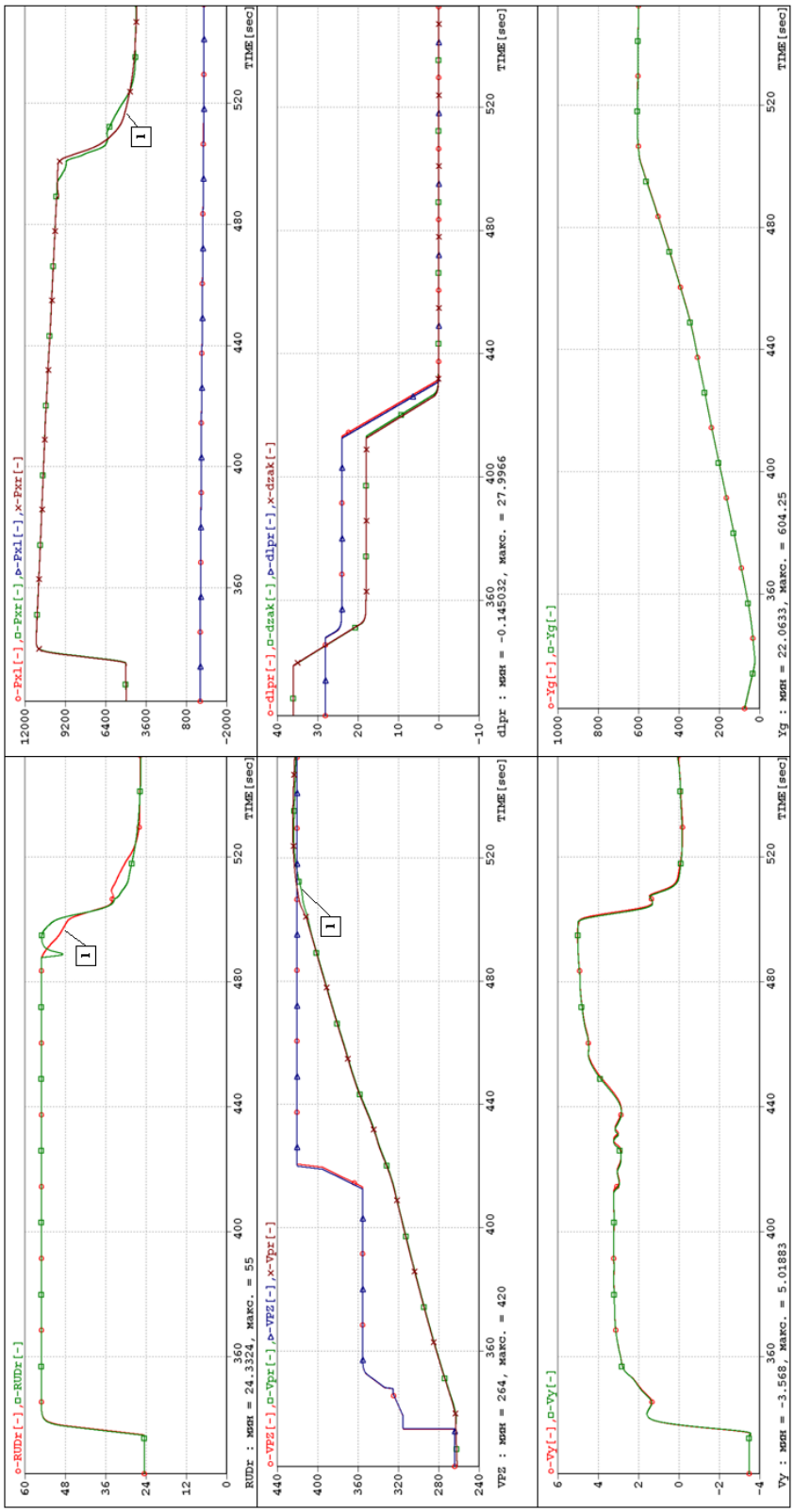


Рис 8. Уход на 2-й круг самолета MC-21-300 с отказавшим на глиссаде двигателем.
Атмосферные условия стандартные без ветра. Масса самолета70000 кг.
1 - автомат тяги в режиме «SPEED»; 2 - автомат тяги в режиме «СТАБ. ТЯГА»

Все параметры движения на рисунках приведены в сравнении двух способов управления тягой двигателей:

- способ 1 — автомат тяги работает в режиме «SPEED» (стабилизация заданной скорости полета),
- способ 2 — автомат тяги работает в режиме «СТАБ. ТЯГА» (стабилизация заданного режима работы двигателя).

Из приведенных результатов сравнения видно, что «адаптивный» способ управления тягой двигателей (способ 1) имеет преимущества при выполнении ухода на второй круг при увеличении располагаемого запаса энергии самолета (запас энергии увеличивается при уменьшении массы самолета и увеличении располагаемой тяги двигателей).

Из рис. 3 видно, что для ухода на второй круг в определенных условиях не требуется увеличения режима работы двигателей до взлетного. По мере набора высоты круга РУД-ы перемещаются в положение, близкое к номинальному режиму работы двигателей с равномерным увеличением приборной скорости. Градиент увеличения приборной скорости определяется заложенной в алгоритмах автомата тяги величиной реакции на изменение приборной скорости $\dot{V}_{\text{пр}}$ и качеством стабилизации $V_{y\,\text{зад.}}$ рулем высоты. По сравнению со способом 2, менее энергичное увеличение приборной скорости в способе 1 предоставляет экипажу более комфортные условия для своевременной уборки закрылков и принятия решений. Вертикальная скорость при реализации способа 1 увеличивается менее интенсивно, чем в способе 2, что обусловлено реализацией адаптивного управления тягой двигателей с оптимальным расходом запаса полной энергии самолета в процессе набора высоты круга. При срабатывании условия «выполаживания», в способе управления 2 режим «СТАБ. ТЯГА» отключается и подключается режим «SPEED». В этом случае в управлении рулем высоты выполняется переключение на управление, обеспечивающее плавный выход на заданную высоту круга с полной уборкой закрылков и предкрылков.

На рис. 4 приведены результаты ухода на второй круг в условиях сдвига ветра. Результаты показывают преимущества способа 1 по сравнению со способом 2 с позиций оптимизации использования полной энергии самолета в условиях изменения ветрового режима в канале тяги и руля высоты. При использовании способа 2 практически на протяжении всего участка набора высоты круга РУД-ы находились в положении взлетного режима работы двигателей. При использовании способа 1 РУД-ы «подстраивались» под условия изменения ветрового режима.

При усложнении условий полета разница между способом управления 1 и способом управления 2 сводится к минимуму, что видно на примере ухода на второй круг с отказом двигателя (см. рис. 5). При этом оба способа управления дают в основном одинаковые результаты.

На рисунках 6...8 приведены результаты аналогичных вариантов ухода на второй круг при условии увеличения массы самолета до 70000 кг. Снижение запаса полной энергии самолета привело к уменьшению разницы между двумя рассматриваемыми способами управления. Следует отметить, что даже в тяжелых условиях пониженной энергетики способ 1 находит возможность сократить протяженность работы двигателей на взлетном режиме.

Выводы

1. Полученные результаты показывают возможность и целесообразность использование режима «SPEED» в автоматическом управлении тягой двигателей на режиме «Уход на второй круг».

2. Характеристики ухода на второй круг с выдерживанием потенциальной вертикальной скорости и управлением двигателями в режиме «SPEED» показывают возможность оптимизации траектории набора высоты круга и работы двигателей по критериям топливной эффективности, ресурса двигателей и безопасности полетов.

Литература

1. Гуськов Ю. П., Загайнов Г. И. Управление полетом самолетов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1991. — 272 с.

2. Шевченко А. М., Борисов В. Г., Начинкина Г. Н. Технология проектирования высокоэффективных систем управления полетом. Научное издание. — М.: ИПУ РАН, 2010. — 83 с.

3. Борисенко Ю. Г., Володина Л. А., Кербер О. Б. Основные принципы унифицированного закона автоматического управления в канале руля высоты и канале тяги на режиме «Уход на 2-й круг». // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. 2010. №1. С. 80.

УДК 629.7.013.1:753.751.3

КОСВЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕСА САМОЛЕТА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЗАЩИТЫ ДИАПАЗОНА ПО МИНИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПОЛЕТА

Ольга Валентиновна КРУГЛЯКОВА, *к. т. н.,*
Алексей Алексеевич МАКАРЫЧЕВ
ПАО «Ил»
E-mail: info@ilyushin.org,
Владимир Евгеньевич КУЛИКОВ, *д. т. н., профессор,*
Алексей Алексеевич КУЗИН
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru

Рассмотрен метод определения веса самолета в полете с учетом изменяющихся и динамических параметров самолета. Метод оценивания веса основывается на применении эталонной зависимости изменения угла атаки от приборной скорости при постоянном среднем весе на установившемся режиме полета с известным креном. Мгновенная оценка веса получается из формулы для нормальной перегрузки. Переходные процессы вычисления веса, вызванные изменениями скорости и угла атаки, сглаживаются фильтром с большой постоянной времени. Сглаженная оценка веса используется для расчета минимальной допустимой скорости полета, при которой самолет не выходит на предельные углы атаки. Полученные результаты иллюстрируются графиками проведения оценки веса тяжелого самолета в полете с выполнением маневров в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Ключевые слова: *вес, перегрузка, расчет, минимальная приборная скорость, угол атаки.*

INDIRECT METHOD FOR AIRCRAFT WEIGHT ESTIMATION IN SOLVING THE PROBLEM OF MINIMUM FLIGHT SPEED RANGE PROTECTION

Olga V. KRUGLYAKOVA, *PhD in Engineering,*
Alexey A. MAKARYCHEV
'ILYUSHIN' PJSC
E-mail: info@ilyushin,
Vladimir E. KULIKOV*, D. Sc. in Engineering, professor,*
Alexey A. KUZIN
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru

The article considers a method of inflight aircraft weight estimation taking into account variable and dynamic aircraft parameters. The weight estimation method is based on the use of the reference dependency of angle-of-attack variation from indicated speed with constant mean weight in steady flight condition with a known roll. The instant weight estimation is derived from the normal acceleration formula. The weight calculation transients caused by speed and angle-of-attack changes are smoothed by the filter with long-time constant. The smoothed weight estimation is used to calculate the minimum allowable flight speed at which the aircraft does not exceeds angle-of-attack limits. The obtained results are illustrated by graphs of heavy aircraft weight estimation during the flight with vertical and horizontal maneuvering.

Keywords: *weight, acceleration, calculation, minimum indicated speed, angle-of-attack.*

В системах автоматического управления (САУ) полетом тяжелых самолетов одной из основных задач обеспечения безопасности является ограничение допустимого диапазона минимальных скоростей полета. На режимах подхода к аэродрому необходимо ограничивать нижнюю границу скоростного диапазона, учитывая рекомендованные для выпуска закрылков скорости полета, которые в свою очередь зависят от веса самолета. При этом выход самолета на расчетную минимальную скорость, задаваемую летчиком с пульта САУ, не должен приводить к выходу самолета на критические углы атаки. Задача получения прямого определения ограничений по минимальной приборной скорости при автоматическом полете самолета связана с определением текущего веса самолета. Покажем, как она может быть решена при косвенной оценке веса с использованием информации только о параметрах движения летательного аппарата.

Полет самолета на малых скоростях, с учетом наступления события выхода на близкие к допустимым углы атаки, обеспечивается так же, как и полет на разрешенных эксплуатационных скоростях, состоянием равновесия между весом и проекцией подъемной силы на вертикаль к земной поверхности.

Равновесие сил означает, по крайней мере, отсутствие углового поворота вектора скорости, при котором происходит установившийся набор (снижение), включая горизонтальный полет. Уравнение углового вращения вектора скорости в вертикальной плоскости в траекторной системе координат в перегрузках [1, стр. 352] в полете без скольжения имеет вид:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{g}{V(t)}\left[n_{y_a}(t)\cos\gamma_a(t) - \cos\theta(t)\right],\ \sin\gamma_a(t) = \frac{\cos\vartheta(t)\sin\gamma(t)}{\cos\theta(t)}, \qquad (1)$$

где $\theta(t)$ — угол наклона траектории, $n_{y_a}(t)$ — нормальная перегрузка в скоростной системе координат, $\cos\gamma_a(t)$ — скоростной угол крена.

Тогда для случая установившегося движения в вертикальной плоскости без вращения вектора скорости

$$\dot{\theta}(t) = 0 \qquad (2)$$

на малых углах атаки, при которых можно считать $\cos\vartheta(t) \simeq \cos\theta(t)$, $n_{y_a} \simeq n_y$ и $\gamma_a(t) \simeq \gamma(t)$, уравнение (1) приводится к виду:

$$n_y = \frac{\cos\theta}{\cos\gamma}, \qquad (3)$$

где n_y — нормальная перегрузка в связанной системе координат,

γ — угол крена.

В дальнейшем переменную t будем опускать, полагая: сравнение параметров движения проводится одномоментно в каждый текущий момент времени, что соответствует методам измерений параметров движения бортовым регистратором.

По определению нормальной перегрузки [2], имеет место выражение:

$$n_y = \frac{R_y}{mg} \quad \text{или} \quad n_y = \frac{R_y}{G},\ G = mg, \tag{4}$$

где R_y — нормальная сила, m — масса летательного аппарата, g — ускорение свободного падения, G — сила тяжести летательного аппарата, которая равна весу ЛА в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

При малых углах установки двигателей и малых углах атаки допускается равенство

$$R_y = Y, \tag{5}$$

где Y — аэродинамическая нормальная сила (подъемная сила крыла). Выражение для подъемной силы крыла [3, стр. 34] имеет вид:

$$Y = C_y(\alpha, M)qS,$$

где $C_y(\alpha, M)$ — безразмерный коэффициент аэродинамической нормальной силы, при допущении (5) — подъемной силы, зависящий от угла атаки α и числа Маха M, q — скоростной напор, S — площадь крыла.

Из выражений (4) и (6) может быть найден расчетный вес самолета:

$$G = \frac{C_y(\alpha, M)qS}{n_y}. \tag{7}$$

Для дозвуковых самолетов функция $C_y(\alpha, M)$ в эксплуатационном диапазоне изменения угла атаки является практически линейной

$$C_y(\alpha, M) = c_y^{\alpha}(M)(\alpha - \alpha_0), \tag{8}$$

где $c_y^{\alpha}(M)$ — производная коэффициента подъемной силы по углу атаки, α_0 — угол атаки при околонулевом значении коэффициента подъемной силы $C_y(\alpha_0, M) \approx 0$.

В полете самолета с выходом на минимальные скорости полета угол атаки приближается к предельно допустимому углу атаки $\alpha \to \alpha_{доп}$, при этом $\alpha_0 \ll \alpha_{доп}$.

Для соответствующих малых чисел Маха величину производной коэффициента подъемной силы можно считать постоянной, то есть

$$c_y^{\alpha}\left(M\right)=c_y^{\alpha}=\text{const}. \tag{9}$$

Соотношение (8) при допущении (9) преобразуется к виду

$$C_y\left(\alpha,M\right)=c_y^{\alpha}\alpha. \tag{10}$$

Имеет место известное выражение [4, стр. 67] для скоростного напора:

$$q=\frac{\rho_H V^2}{2},\ V=V_i\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_H}},\quad \text{или}\quad q=\frac{\rho_0 V_i^2}{2}, \tag{11}$$

где V — истинная воздушная скорость полета, V_i — индикаторная скорость, ρ_0 — плотность воздуха у Земли, ρ_H — плотность воздуха на высоте полета. Для дозвуковых скоростей полета на числах $M<0{,}8$ и высотах $H<12$ км поправка на сжимаемость при измерении приборной скорости $V_{\text{пр}}$ оставляет менее 6% от соответствующей индикаторной скорости, что позволяет считать верным равенство

$$V_{\text{пр}}=V_i. \tag{12}$$

При подстановке (9) и (11) в формулу (7), с учетом (12), получим выражение для оценки веса самолета

$$G=\frac{\tilde{c}_y^{\alpha}\alpha\rho_0 V_{\text{пр}}^2 S}{2n_y}. \tag{13}$$

Оценка веса самолета по формуле (13) при постоянных параметрах ρ_0 и S является функцией четырех параметров $\hat{G}=f\left(\tilde{c}_y^{\alpha},\alpha,V_{\text{пр}},n_y\right)$: производной коэффициента подъемной силы, угла атаки, приборной скорости и нормальной перегрузки, учитывающей возникновение крена при разворотах с поддержанием высоты полета. Здесь знаком «тильда» в $\tilde{c}_y^{\alpha}$ почеркнуто экспериментальное происхождение этого коэффициента, который при известном весе можно получить из выражения (13), остальные параметры движения $\alpha, V_{\text{пр}}, n_y$ являются измеряемыми в воздухе. В выражении (13) коэффициент $\tilde{c}_y^{\alpha}$ рассматривается как расчетная величина, не изменяющаяся от скорости полета.

При известных величинах коэффициента $\tilde{c}_y^{\alpha}$ и некоторого веса самолета G можно из (13) найти для различных значений перегрузки n_y зависимость угла атаки от приборной скорости полета

$$\alpha\left(V_{\text{пр}},G,n_y\right)=\frac{k_\alpha\left(G,n_y\right)}{V_{\text{пр}}^2},\ k_\alpha\left(G,n_y\right)=\frac{2G}{\tilde{c}_y^\alpha\rho_0 S}n_y, \tag{14}$$

где $k_{\alpha_{\text{оп}}}$ — коэффициент равнобочной гиперболы [5, стр. 137] при аргументе в виде квадрата приборной скорости $\alpha\left(V_{\text{пр}}^2\right)$; G — известный вес, для которого находится зависимость угла атаки $\alpha(V_{\text{пр}})$ от приборной скорости полета. Тогда для одной и той же перегрузки n_y, согласно (14), может быть построено на координатной плоскости $V_{\text{пр}}O\alpha$ однопараметрическое семейство кривых $\alpha(V_{\text{пр}},G)$, представляющих собой семейство квадратичных гипербол $\alpha V_{\text{пр}}^2=k_\alpha\left(G\right)$ с параметром G при некоторой фиксированной перегрузке n_y.

На рис. 1 представлены графики функций (14) для тяжелого самолета при горизонтальном полете при $n_y=1$ с различным весом: минимальным, средним и максимальным, соответствующие графики выделены синим, зеленым и красным цветами. Указанные графики построены при условии постоянства производной коэффициента подъемной силы $\tilde{c}_y^\alpha=\text{const}$, что практически выполняется на малых числах Маха вблизи минимальных скоростей полета.

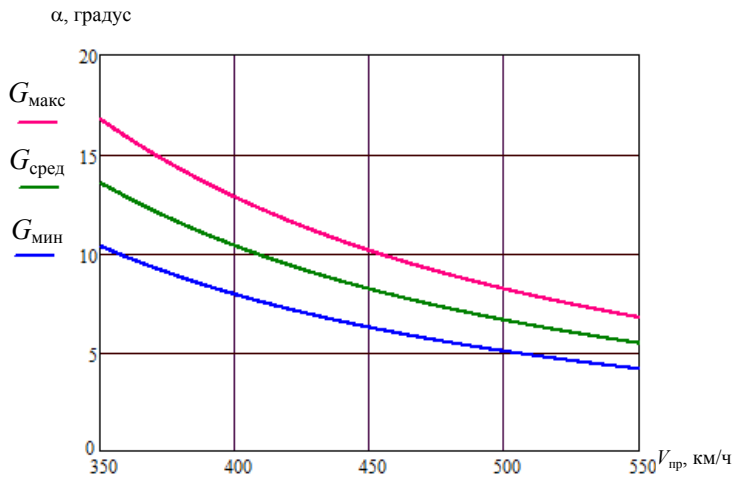


Рис. 1. Зависимость угла атаки от приборной скорости при различном весе самолета

Вернемся к классическому определению перегрузки, используя формулу (12), а именно

$$n_y=\frac{\tilde{c}_y^\alpha\alpha\rho_0 V_{\text{пр}}^2 S}{2G}. \tag{15}$$

Тогда, используя выражение (15), для двух случаев полета самолета с одной и той же перегрузкой, выбирая для первого из них некоторые опорные значения веса $G_{оп}$ и приборной скорости $V_{пр}^{оп}$ с соответствующим ей опорным углом атаки $\alpha_{оп}$, а для второго — реально измеренные параметры текущего угла атаки α и скорости $V_{пр}$ при неизвестном весе $\hat{G}$, получим уравнение

$$\frac{\tilde{c}_y^{\alpha}\alpha_{оп}\rho_0(V_{пр}^{оп})^2 S}{G_{оп}} = \frac{\tilde{c}_y^{\alpha}\alpha\rho_0 V_{пр}^2 S}{\hat{G}}. \tag{16}$$

Уравнение (16) имеет единственное решение относительно искомого веса $\hat{G}$ при равенстве опорного угла атаки текущему углу атаки:

$$\alpha_{оп} = \alpha. \tag{17}$$

При выполнении условия (17) из уравнения (16) следует выражение для определения оценки веса самолета

$$\hat{G} = \frac{V_{пр}^2}{\left(V_{пр}^{оп}\right)^2} G_{оп}. \tag{18}$$

Формула (18) справедлива для любого эксплуатационного значения перегрузки (3) при движении самолета в вертикальной и горизонтальной плоскостях с включенным автопилотом, при этом следует пользоваться зависимостью (14) для текущего значения перегрузки. Тогда для опорного веса $G_{оп}$ при условии (17) может быть найдена опорная скорость $V_{пр}^{оп}$ для текущей перегрузки самолета, а именно

$$V_{пр}^{оп} = \sqrt{\frac{k_{\alpha}\left(G_{оп}, n_y\right)}{\alpha}}, \ \alpha > 0. \tag{19}$$

За опорный вес самолета примем его средний вес $G_{оп} = G_{средн}$, который фиксируется для последующих расчетов. Понятно, что для обеспечения при автоматическом управлении разворота на малых скоростях полета необходим в (19) учет соответствующей перегрузки для располагаемого крена $\gamma_{расп}^{САУ} = 30^{\circ}$.

Схема расчетов с использованием оценки веса самолета для решения задачи определения минимальной скорости полета представляет собой последовательность выполнения следующих шагов.

1. Для текущих значений угла атаки α и нормальной перегрузки $n_y = 1{,}15$ по формуле (19) определяется опорная приборная скорость для опорного веса $G_{оп}$.

2. По формуле (18) для найденной опорной приборной скорости определяется оценка текущего веса самолета $\hat{G}$.
3. На основании формулы (19) при подстановке в нее найденного веса $\hat{G}$ и предельно допустимого для использования САУ угла атаки $\alpha_{\text{доп}}^{\text{САУ}}$, с учетом (14), вычисляется минимальная скорость полета при перегрузке $n_y = 1{,}15$, достаточной для выполнения разворота с креном 30°, а именно

$$V_{\text{пр}}^{\text{мин}} = \sqrt{\frac{2{,}3\hat{G}n_y}{\tilde{c}_y^{\alpha}\alpha_{\text{доп}}^{\text{САУ}}\rho_0 S}}. \qquad (20)$$

На рис. 2 показана номограмма определения минимальной приборной скорости, соответствующей максимально разрешенному углу атаки в полете тяжелого самолета с применением САУ. Здесь приведены два опорных графика для перегрузок, соответствующих горизонтальному полету $n_{y_1} = 1$ и развороту с креном 30°, $n_{y_2} = 1{,}15$ при $G_{\text{оп}}$ = 170 т.

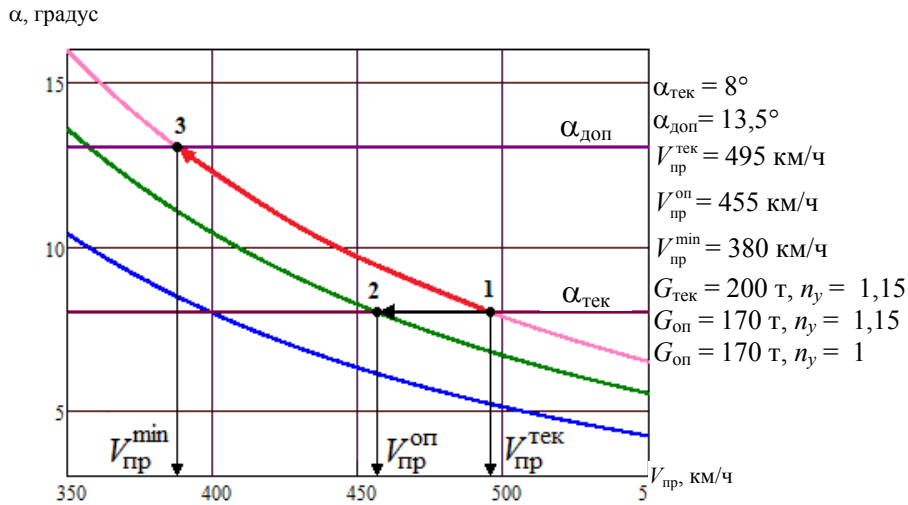


Рис. 2. Номограмма определения минимальной приборной скорости полета самолета

Рассмотрим для примера случай полета самолета с неизвестным весом и креном 30° на текущей приборной скорости $V_{\text{пр}}^{\text{тек}}$ = 495 км/ч с измеренным углом атаки $\alpha_{\text{тек}}$ = 8° (точка 1). Для этого угла атаки опорная приборная скорость при перегрузке 1,15 равна $V_{\text{пр}}^{\text{оп}}$ = 455 км/ч (точка 2). Согласно п. 2 схемы расчетов, определяем текущий вес самолета $G_{\text{тек}}$ = 200 т. Построим (14) зависимость $\alpha\left(V_{\text{пр}}, \hat{G}_{\text{тек}}, n_y\right)$ и из точки ее пересечения с линией допустимого угла атаки $\alpha_{\text{доп}}$ = 13,5° (точка 3) опустим перпендикуляр на ось О$V_{\text{пр}}$, получим величину минимальной

приборной скорости $V_{\text{пр}}^{\text{мин}}$ = 380 км/ч для веса 200 т и перегрузки 1,15, что эквивалентно применению формулы (20) по п. 3 схемы расчета.

Задача определения минимальной скорости полета с использованием оценки веса самолета, получаемой при установившемся (2) движении самолета в вертикальной плоскости и при допущении (9) линейности характеристики $C_y(\alpha)$, решена. Выполнение маневров, которые совершает самолет в полете, нарушает введенные для получения аналитического результата оценки веса условия, что будет вызывать значительные ошибки мгновенного определении веса. Однако в связи с тем, что расход топлива тяжелого самолета составляет 2...3 кг/с, можно считать динамические изменения веса самолета несоизмеримо более «медленными» по сравнению с темпом изменения угловых и траекторных параметров движения. Отсюда возникает возможность сглаживать расчетный вес (18) низкочастотным фильтром в виде апериодического звена с постоянной времени $T_{\text{ф}}$ = 30...40 секунд, а именно

$$G_{\text{ф}} = \frac{1}{T_{\text{ф}} p + 1} \hat{G}, \tag{21}$$

где p переменная преобразования Лапласа.

На рис. 3, 4, 5 показаны результаты формирования в текущем времени минимальной приборной скорости полета по полученной с учетом (21) оценке веса самолета при различных маневрах тяжелого самолета: набор — снижение, торможение — разгон, развороты с креном 30°. Материалы получены при полунатурном моделировании процессов движения при включенной системе автоматического управления.

По результатам проведенных экспериментов максимальная ошибка определения веса самолета составляет не более 3,5 тонн, что в процентном отношении составляет менее 2,5% от веса самолета. При этом полученная минимальная скорость отклоняется от установившегося значения не более чем на 3 км/ч, что приемлемо для практического применения.

Таким образом, получен алгоритм определения минимальной приборной скорости полета с помощью косвенного метода оценки в воздухе веса самолета по параметрам движения тяжелого самолета, который может быть рекомендован для применения в системе автоматического управления при решении задачи защиты диапазона по минимальной приборной скорости полета.

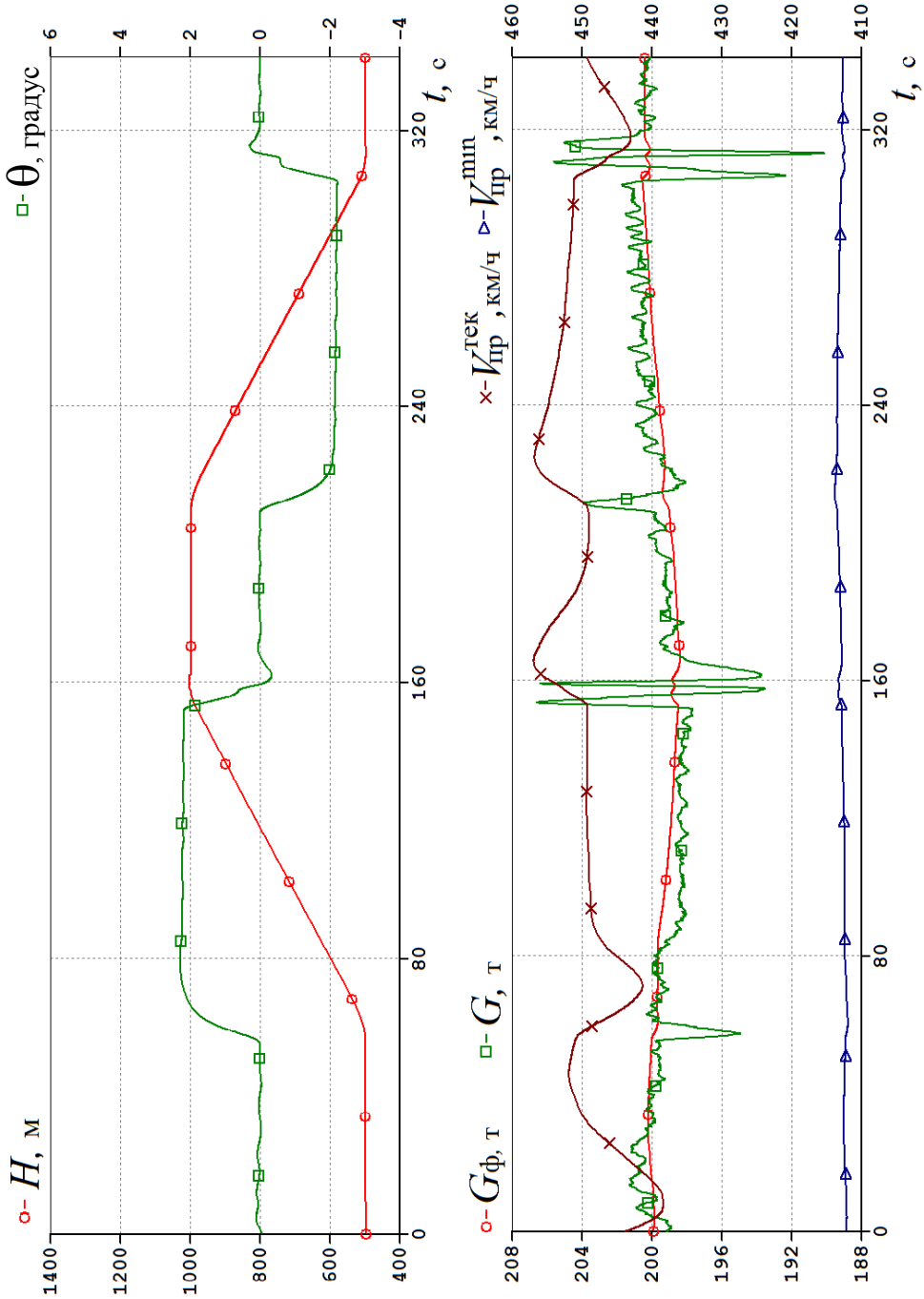


Рис. 3. Оценка веса самолета при наборе — снижении самолета на $V_{пр}$ = 450 км/ч, G = 200 т

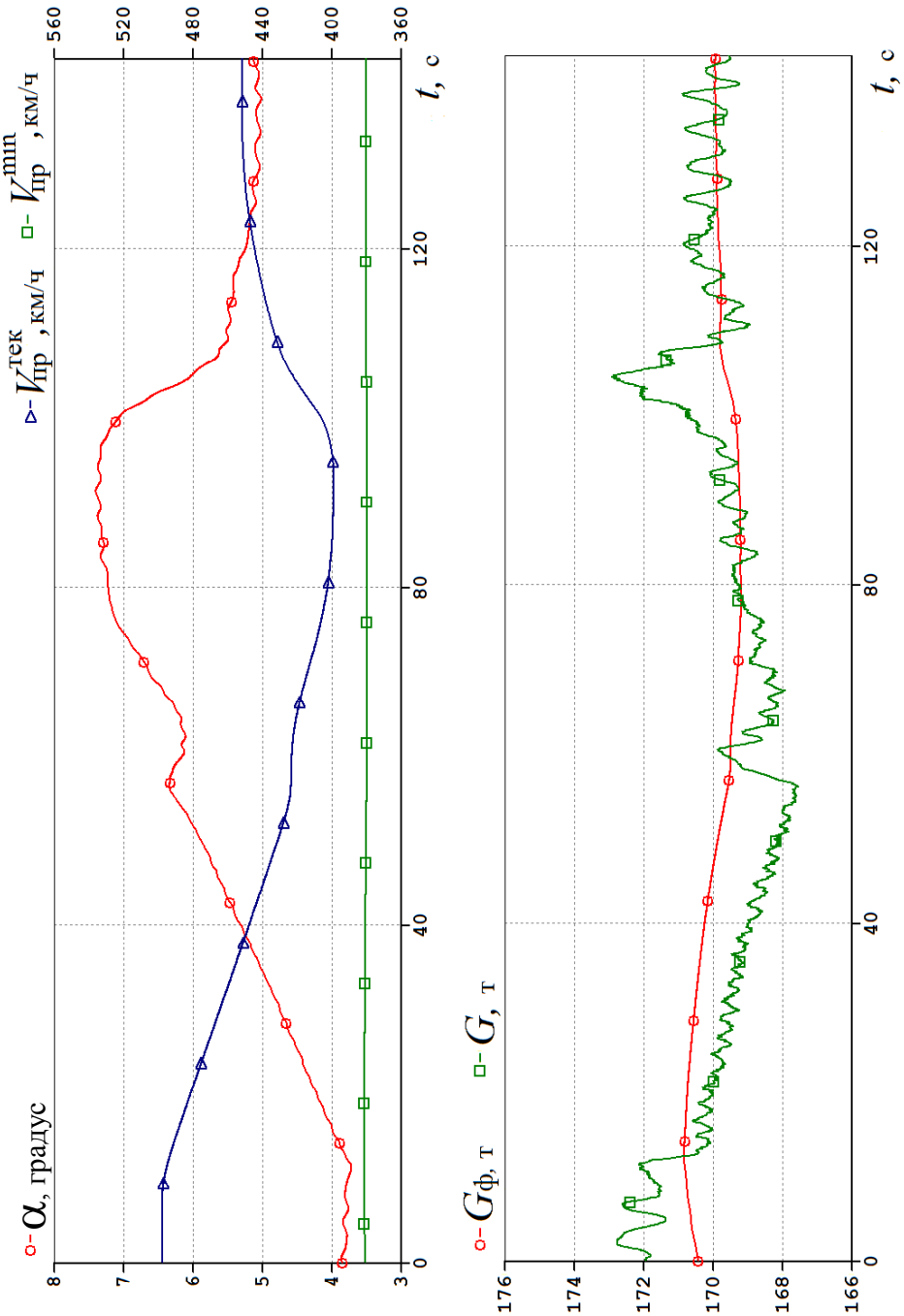


Рис. 4. Оценка веса самолета при торможении — разгоне самолета на H = 500 м, G = 170 т

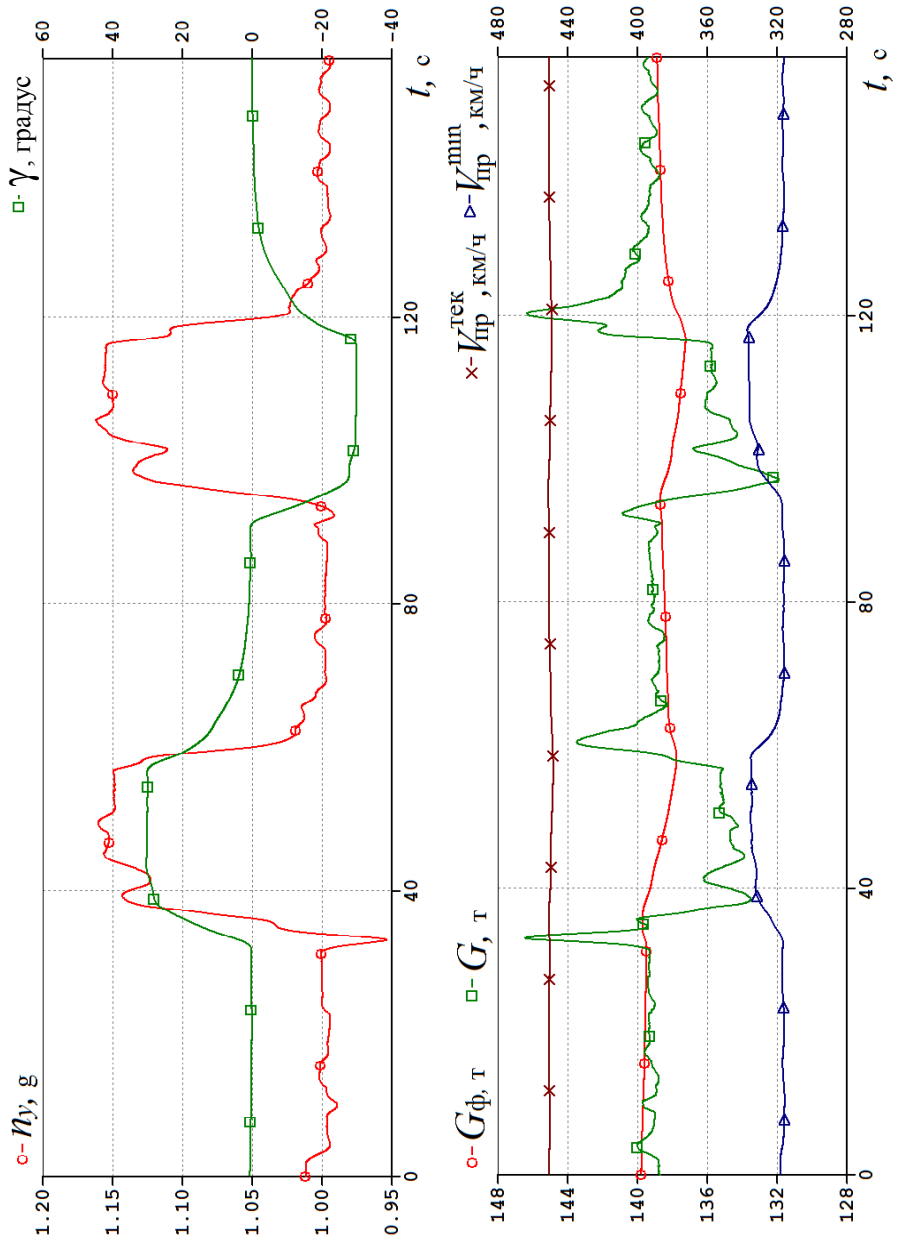


Рис. 5. Оценка веса самолета при разворотах самолета с $\gamma = \pm 30°$ на $H = 500$ м, $G = 140$ т

Литература

1. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-у, переработанное и доп. — М.: Машиностроение. 1973. — 619 с.

2. ГОСТ 20058-80. Динамика полета летательных аппаратов в атмосфере. — Введ. 1981-07-01. — М.: Издательство стандартов, 1980.

3. Овчаренко В. Н. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: идентификация по полетным данным. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 236 с.

4. Ведров В. С., Тайц М. А. Летные испытания самолетов. — М.: Оборонгиз, 1951. — 483 с.

5. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968. — 912 с.

УДК 629.7.05

ОБЛАСТИ СЕКТОРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Юрий Павлович Николаев, *д-р физ.-мат. наук, с. н. с.*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»
E-mail: inbox@aomiea.ru

Разрабатывается метод построения областей секторной устойчивости (допустимой колебательности) в пространстве (на плоскости) коэффициентов характеристического полинома систем. Метод основан на использовании ортогональных полиномов. Анализируется геометрия областей. Приводятся примеры.

Ключевые слова: *функция Хэвисайда, коэффициент затухания, левый сектор, секторная устойчивость, ортогональные полиномы Чебышева, область устойчивости, область секторной устойчивости.*

SECTORAL STABILITY AREAS OF DYNAMIC SYSTEMS WITH FEEDBACK

Yury P. NIKOLAEV*, D. Sc. in Phys and Math*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC
E-mail: inbox@aomiea.ru

The article considers the method for construction areas of sectorial stability (acceptable oscillability) in space (on a plane) of the coefficients of the systems characteristic polynomial. The method is based on the use of orthogonal polynomials. The article analyzes geometry of the areas. The article provides examples.

Keywords: *Heaviside function, attenuation coefficient (rate), left sector, sectorial stability, orthogonal Chebyshev polynomials, stability area, area of sectorial stability.*

1. Введение

Рассматриваются линейные системы с обратной связью, заданные своим характеристическим полиномом

$$P_n(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n. \tag{1.1}$$

Если считать действительные коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ декартовыми координатами некоторой *изображающей* точки в евклидовом пространстве R^{n+1}, то условия Рауса — Гурвица будут определять в этом пространстве многомерную область асимптотической устойчивости. Пространство коэффициентов характеристического полинома называется каноническим, так как определение не связано с какой-либо конкретной системой.

Исследование *канонической* области устойчивости (определение общих характеристик, разработка эффективных методов построения и т. д.) продолжает оставаться одной из важных проблем современной теории линейных динамических систем. Трудность ее решения связана со сложностью геометрии и структуры многомерной области устойчивости.

Перспективность прикладного использования многомерной области устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического полинома отмечали многие видные ученые (см. [1—3]).

Исследованию области устойчивости на *плоскости параметров* был посвящен ряд работ Ю. И. Неймарка. В законченном виде *D*-разбиение было представлено Неймарком в 1948–49 гг., он ввел и само название метода (см. [4, 5]).

В западной литературе это направление представлено Шильяком [6, 7] , Джури [8] и другими авторами (подробнее — см. обзор [9]).

Дальнейшим развитием этого важного направления в теории управления можно считать исследование *секторной устойчивости* (колебательность переходного процесса системы не должна превышать заданную величину).

Понятие секторной устойчивости было введено Митровичем [10]: он предложил отображать на пространство параметров не только мнимую ось плоскости корней, как в *D*-разбиении, но и левый сектор на этой плоскости. В результате такого отображения получается множество многомерных областей *секторной устойчивости* $A^{(\varphi)}$, где $\varphi \in (0, \pi/2)$ — угол, характеризующий «левый» сектор на комплексной плоскости корней. Для указанных дополнительных областей выполняется условие $A^{(\varphi)} \subset A$, т. е. все области $A(\varphi)$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, являются подмножествами *канонической* области устойчивости $A^{(STAB)}$.

Актуальность проблемы в настоящее время связана, в частности, с необходимостью учета неопределенностей при создании высокоточных систем управления. Трудность решения проблемы обусловлена сложностью геометрии области устойчивости даже при малых значениях порядка n системы. Так, область устойчивости в *трехмерном* пространстве коэффициентов a_0, a_1, a_2 (при $a_3>0$) характеристического полинома системы *третьего* порядка ($n = 3$) — гиперболический параболоид [4, с. 8].

Целью настоящей работы является анализ геометрии областей секторной устойчивости систем.

2. Коэффициент колебательности, левый сектор, коэффициент затухания, перерегулирование

Коротко остановимся на некоторых известных определениях и терминах [11]. Представим полином (2.1) в виде произведения полиномов первого и второго порядка (с отрицательными дискриминантами):

$$P(s) = a_n P^*(s) P^{**}(s), \tag{2.1}$$

где

$$P^*(s) = (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \ldots (s - s_t)^{k_g}, \tag{2.2}$$

$$P^{**}(s) = (s^2 + b_{11}s + b_{10})^{m_1} (s^2 + b_{21}s + b_{20})^{m_2} \ldots (s^2 + b_{r1}s + b_{r0})^{m_r}. \tag{2.3}$$

В (2.2), (2.3) обозначено: S_1, S_2, ..., S_t — действительные корни кратности $k_1, k_2, \ldots, k_g$, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_g + 2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_r = n$.

Произвольному полиному второго порядка из (2.3) можно поставить в соответствие колебательное звено с передаточной функцией:

$$G(s) = \frac{\omega_q^2}{s^2 + 2\xi\omega_q s + \omega_q^2}, \quad q = 1, 2, \ldots, r, \tag{2.4}$$

где ξ — безразмерный *коэффициент затухания*, ω_q — собственная частота колебаний (т. е. частота при отсутствии затухания).

Отметим, что все характеристики системы второго порядка полностью определяются значениями ξ и ω_q, т. к. только эти параметры входят в передаточную функцию 2.1.

Реакция колебательного звена на единичное ступенчатое воздействие определяется формулой:

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi\omega_q t} \sin(\beta\omega_q t + \vartheta), \tag{2.5}$$

где обозначено:

$$\beta = \sqrt{1 - \xi^2}, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\xi}. \tag{2.6}$$

Примечание. В математике единичное ступенчатое воздействие известно как *функция Хэвисайда.*

При $0 < \xi < 1$ переходная функция имеет форму затухающей синусоиды (рис. 1).

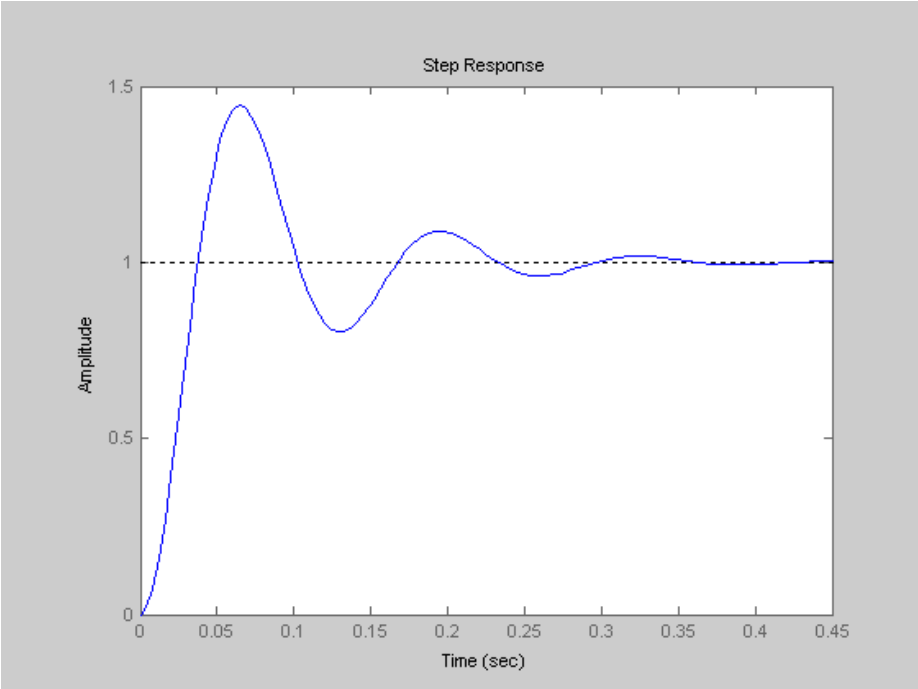


Рис. 1. Переходная функция при $0 < \xi < 1$

При $\xi = 0$ получаем незатухающие колебания (система находится на границе устойчивости), а при $\xi \geq 1$ колебания не возникают (апериодический переходный процесс).

Перерегулирование (максимальное относительное перерегулирование) для колебательной переходной функции, выраженное в процентах, определяется соотношением:

$$\delta = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\,100\%. \tag{2.7}$$

Коротко о расположении корней на *s*-плоскости, точнее — об условии нахождения корней внутри левого сектора.

Левый сектор на плоскости корней (см. рис. 2.1, стр. 51) образуется двумя прямыми, проходящими через начало координат под углами $(\pi - \varphi)$ и φ к оси абсцисс, $\varphi \in [0, \pi/2)$.

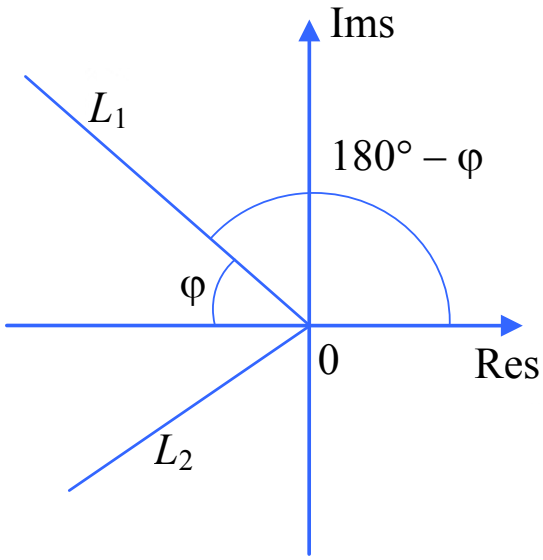


Рис. 2.1. Левый сектор (left sector) на комплексной плоскости корней

Обычно при проектировании систем управления используется ограничение:

$$0 \le \varphi \le \varphi^{(\text{доп})}, \quad \varphi^{(\text{доп})} \cong \pi / 3. \tag{2.8}$$

Указанному значению угла $\varphi^{(\text{доп})} = \pi / 3$ соответствует коэффициент затухания $\xi^{(\text{доп})} = 1/2$ и перерегулирование

$$\delta^{(\text{доп})} = e^{-\xi\pi\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 16{,}30\%.$$

3. *LS*-разбиение плоскости коэффициентов a_0, a_1 характеристического полинома

Предлагается *LS*-разбиение плоскости коэффициентов a_0, a_1 характеристического полинома, предназначенное для построения и исследования геометрии области секторной устойчивости (здесь *LS* – сокращение *Left Sector*).

Теорема 3.1. Граничная кривая *LS*-разбиения плоскости коэффициентов a_0, a_1 характеристического полинома описывается параметрическими уравнениями:

$$a_1 = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k U_{k-1}(\cos\varphi) a_k w^{k-1}, \tag{3.1}$$

$$a_0 = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k U_{k-2}(\cos\varphi) a_k w^k, \tag{3.2}$$

где $U_k(\cos\varphi)$, $k = 0, ..., n$ — полином Чебышева второго рода [11, 12], $\cos\varphi \in (0, \pi/2)$, переменная $w \in [0, \infty)$.

Остановимся коротко на доказательстве теоремы. Характеристическое уравнение системы:

$$P(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k = 0, \quad a_0 \geq 0, \ a_1, ..., a_n > 0. \tag{3.3}$$

Если комплексную переменную s заменить новой переменной w:

$$s = we^{j\Theta} = we^{j(\pi-\varphi)}, \text{ где } \varphi \in (0, \pi/2), \tag{3.4}$$

то левая часть плоскости s, точнее — та часть, которая лежит слева от наклонной прямой L_1 (рис. 3.1), будет отображаться на левую половину плоскости переменной w.

Подставив (3.4) в характеристическое уравнение (3.3), получим:

$$P(jw) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{jk\varphi} w^k = 0, \quad a_0 \geq 0, a_1, ..., a_n > 0. \tag{3.5}$$

Коэффициенты $a_k e^{jk\varphi}$ на основании формулы Эйлера можно записать в виде:

$$a_k e^{jk\varphi} = b_k + jc_k, \tag{3.6}$$

где обозначено:

$$b_k = a_k \cos(k\varphi), \quad c_k = a_k \sin(k\varphi), \quad k = 0, ..., n. \tag{3.7}$$

Тригонометрическая форма коэффициентов Чебышева [12], [13] для рассматриваемого случая $(x = \cos\varphi)$:

$$T_k(\cos\varphi) = \cos(k\varphi), \qquad U_k(\cos\varphi) = (\sin\varphi)^{-1} \sin((k+1)\varphi)$$

или

$$T_k(\cos\varphi) = \cos(k\varphi), \quad U_{k-1}(\cos\varphi) = (\sin\varphi)^{-1} \sin(k\varphi). \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует:

$$\cos(k\varphi) = T_k(\cos\varphi), \quad \sin(k\varphi) = \sin\varphi\, U_{k-1}(\cos\varphi). \tag{3.9}$$

Формулы (3.7) с учетом соотношений (3.9) примут вид:

$$b_0 = a_0 T_0(\cos\varphi), \quad c_0 = 0, \text{ при } k = 0; \tag{3.10}$$

$$b_k = a_k T_k(\cos\varphi), \quad c_k = a_k \sin\varphi U_{k-1}(\cos\varphi), \text{ при } k = 1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

где $T_k(\cos\varphi)$ — функция Чебышева первого рода,
$U_{k-1}(\cos\varphi)$ — функция Чебышева второго рода, $\cos\varphi \in (0,1)$.

Тогда характеристическое уравнение (3.3) можно записать в виде двух уравнений (для действительной и мнимой части уравнения $P(jw) = 0$):

$$a_0 - a_1 T_1(\cos\varphi) w + a_2 T_2(\cos\varphi) w^2 - a_3 T_3(\cos\varphi) w^3 + \ldots + (-1)^n a_n T_n(\cos\varphi) w^n = 0,$$

$$-a_1 \sin\varphi U_0(\cos\varphi) w + a_2 \sin\varphi U_1(\cos\varphi) w^2 - a_3 \sin\varphi U_2(\cos\varphi) w^3 + \ldots$$
$$+ (-1)^n a_n \sin\varphi U_{n-1}(\cos\varphi) w^n = 0.$$

Будем считать неизвестными коэффициенты a_0, a_1. Решим указанную систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$a_1 = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k U_{k-1}(\cos\varphi) a_k w^{k-1};$$

$$a_0 = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left[T_1(\cos\varphi) U_{k-1}(\cos\varphi) - T_k(\cos\varphi) \right] a_k w^k.$$

После некоторых преобразований получим в итоге уравнения (3.1), (3.2).

Граничная кривая, описываемая уравнениями (3.1), (3.2), может рассматриваться как непрерывное отображение параметризованной мнимой оси комплексной плоскости переменной w на плоскость коэффициентов a_0, a_1 исходного характеристического уравнения.

Примечание. Изложенный выше *аналитический* подход к анализу секторной устойчивости базируется на применении тригонометрической формы полиномов Чебышева [12], [13].

В отмеченных выше материалах Шильяка ([6], [7]) и более поздних работах (см. [14–16]) использованы *рекуррентные* соотношения $T_{k+1}(\xi) = 2\xi T_k(\xi) - T_{k-1}(\xi)$, $U_{k+1}(\xi) = 2\xi U_k(\xi) - U_{k-1}(\xi)$, которые предназначены для нахождения *численных* значений коэффициентов указанных полиномов.

4. Область секторной устойчивости

Утверждение 4.1. Пусть выполняются неравенства

$$a_k \le f_k\left(a_{k+1}, a_{k+2}\right),\ k = 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Тогда областью секторной устойчивости (областью допустимой колебательности) является односвязное, невыпуклое множество точек первого квадранта плоскости коэффициентов a_0, a_1, ограниченное сверху непрерывной гладкой граничной кривой $OM_1M_2M_3$, описываемой параметрическими уравнениями (4.1), (4.2), а снизу — отрезком OM_3 оси абсцисс (см. рис. 4.1).

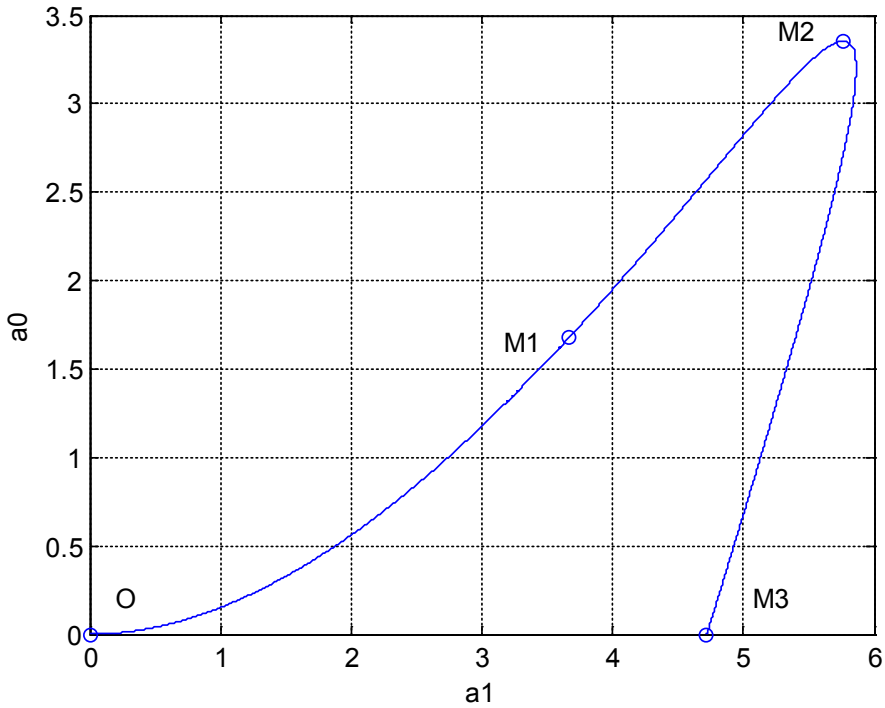


Рис. 4.1. Область секторной устойчивости (область допустимой колебательности) на плоскости коэффициентов a_1, a_2

Характерные точки граничной кривой (см. рис. 4.1): точка начала координат O (точка локального экстремума типа *min*), M_1 (точка *перегиба*), M_2 (точка локального экстремума типа *max*), M_3 (точка пересечения граничной кривой с положительной полуосью оси абсцисс).

Доказательство *Утверждения 4.1* и анализ указанных характерных точек граничной кривой рассматривается в *Приложении*.

5. Анализ геометрии граничной кривой ($n = 4$, $\omega = \pi/3$)

Пусть $n = 4$.

Уравнения (3.1), (3.2), описывающие граничную кривую области секторной устойчивости, примут вид:

$$a_1 = U_1(\cos\varphi)a_2 w - U_2(\cos\varphi)a_3 w^2 + U_3(\cos\varphi)a_4 w^3, \tag{5.1}$$

$$a_0 = U_0(\cos\varphi)a_2 w^2 - U_1(\cos\varphi)a_3 w^3 - U_2(\cos\varphi)a_4 w^4, \tag{5.2}$$

где вспомогательные полиномы U_0, U_1, U_2, U_3 являются полиномами Чебышева второго рода:

$$\begin{aligned} &U_0(\cos\varphi) = 1,\\ &U_1(\cos\varphi) = 2\cos\varphi,\\ &U_2(\cos\varphi) = 4\cos 2\varphi - 1,\\ &U_3(\cos\varphi) = 8\cos 2\varphi - 4\cos\varphi. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Пусть значение угла φ, характеризующего левый сектор на комплексной плоскости корней, равно $\omega = \pi/3$. Тогда $\cos\varphi = 1/2$, полиномы Чебышева:

$$\begin{aligned} &U_0(\cos\varphi) = 1,\\ &U_1(\cos\varphi) = 1\\ &U_2(\cos\varphi) = 0,\\ &U_3(\cos\varphi) = -1. \end{aligned}$$

Исходные уравнения для данного примера:

$$a_1 = a_2 w - a_4 w^3, \tag{5.4}$$

$$a_0 = a_2 w^2 - a_3 w^3, \tag{5.5}$$

где параметр $w \in [0,\infty)$.

Утверждение 5.1. Необходимое и достаточное условие отсутствия точек самопересечения граничной кривой модальной области на координатной плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n = 4$, $\omega = \pi/3$:

$$a_2 < \frac{3}{4}\frac{a_3^2}{a_4}. \tag{5.6}$$

Если (и только если) условие (5.6) выполняется, то область секторной устойчивости имеет сравнительно простую форму, описанную выше (см. рис. 4.1). Т. е. она представляет собой область, расположенную в первом квадранте плоскости коэффициентов a_0, a_1 и ограниченную сверху гладкой кривой (без самопересечений), а снизу – отрезком OM_3 оси абсцисс.

Коротко о четырех характерных точках O, M_1, M_2, M_3 граничной кривой, а также об угле наклона граничной кривой к оси абсцисс в точке M_3. Отметим, что для частот, соответствующих характерным точкам, выполняется неравенство: $0 = w(O) < w(M_1) < w(M_2) < w(M_3)$.

Координаты характерных точек M_1, M_2, M_3 граничной кривой для рассматриваемого примера и соответствующие им значения параметра w будут равны:

$$a_0(M_1) = \frac{2a_2^3}{27a_3^2}, \quad a_1(M_1) = \frac{1}{3}\frac{a_2^2}{a_3}\left(1 - \frac{a_2 a_4}{9a_3^2}\right), \quad w(M_1) = \frac{1}{3}\frac{a_2}{a_3}; \tag{5.7}$$

$$a_0(M_2) = \frac{4}{27}\frac{a_2^3}{a_3^2}, \quad a_1(M_2) = \frac{2}{3}\frac{a_2^2}{a_3}\left(1 - \frac{4}{9}\frac{a_2 a_4}{a_3^2}\right), \quad w(M_2) = \frac{2}{3}\frac{a_2}{a_3}; \tag{5.8}$$

$$a_0(M_3) = 0, \quad a_1(M_3) = \frac{a_2^2}{a_3}\left(1 - \frac{a_2 a_4}{a_3^2}\right), \quad w(M_3) = a_2 / a_3. \tag{5.9}$$

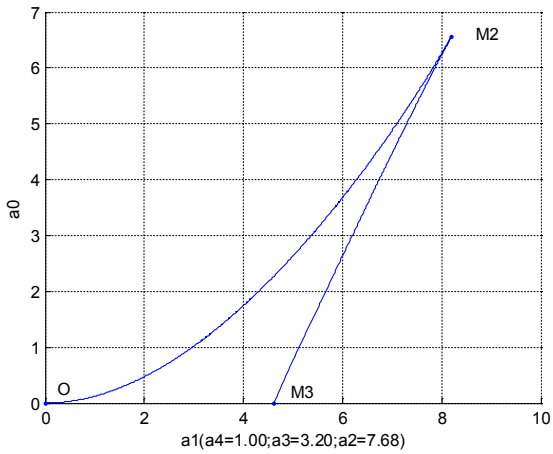
Тангенс угла наклона β граничной кривой к оси абсцисс в точке M_3:

$$\operatorname{tg}\beta(M_3) = -\frac{a_3}{a_4}\frac{a_2 a_4}{\left(a_3^2 - 3a_2 a_4\right)}. \tag{5.10}$$

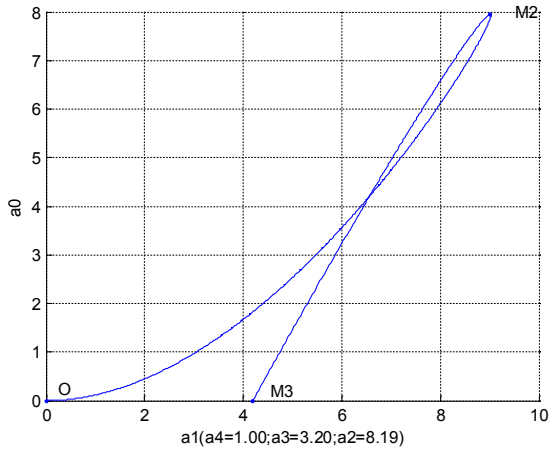
Особенности геометрии области секторной устойчивости при нарушении неравенства (5.6) иллюстрируются рис. 5.1 (стр. 57).

На рис. 5.1а граничная кривая перестает быть гладкой (особая точка M_2 типа *касп*, англ. *cusp* — заострение; это точка, в которой граничная кривая разделяется на две ветви, имеющие в данной точке одинаковый направляющий вектор).

На рис. 5.1б мы имеем самопересекающуюся граничную кривую.



а) $a_2 = \dfrac{3}{4}\dfrac{a_3^2}{a_4}$



б) $a_2 = \dfrac{4}{5}\dfrac{a_3^2}{a_4}$

Рис. 5.1. Область секторной устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n = 4$, $\omega = \pi/3$

6. Область устойчивости и область секторной устойчивости

Расположение области секторной устойчивости и соответствующей ей области устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 проиллюстрируем рис. 6.1, где принято:

$$n = 4, \quad a_2 = \frac{3}{5}\frac{a_3^2}{a_4}, \quad \omega = \pi/3 \tag{6.1}$$

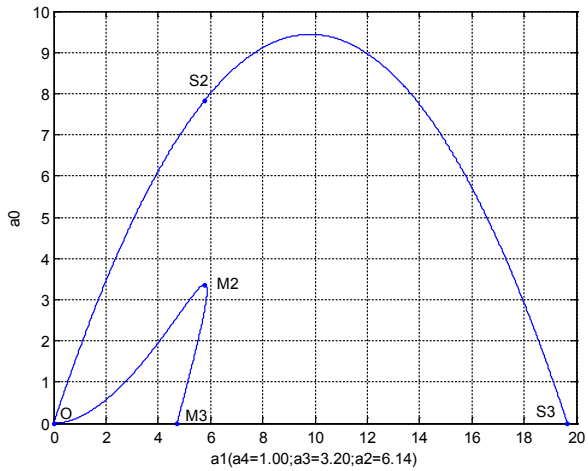


Рис. 6.1. Область устойчивости и область секторной устойчивости

Граничная кривая *области секторной устойчивости* на указанном рисунке описывается системой уравнений (4.4, 4.5), а для граничной кривой *области устойчивости* мы имеем [17]:

$$a_1 = a_3 x, \tag{6.2}$$

$$a_0 = a_2 x - a_4 x^2, \tag{6.3}$$

где $x = \omega^2, \omega \in [0, \infty)$.

Для рис. 6.1 подразумевается условие $a_1(M_3) = \frac{a_2^2}{a_3}\left(1 - \frac{a_2 a_4}{a_3^2}\right) > 0.$

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Точка начала координат (точка O на рис. 4.1).

Утверждение П1. В точке начала координат функция $a_0(a_1)$ имеет локальный экстремум типа min.

Действительно, из уравнений (3.1), (3.2) имеем:

$$\left.\frac{da_0}{da_1}\right|_{a_1=0} = \left.\frac{da_0/dw}{da_1/dw}\right|_{w=0} = \left.\frac{2U_0(\cos\varphi)a_2 w - 3U_1(\cos\varphi)a_3 w^2 + \ldots}{U_1(\cos\varphi)a_2 - 2U_2(\cos\varphi)a_3 w + \ldots}\right|_{w=0} = 0. \tag{П.1}$$

Вторая производная:

$$\left.\frac{d^2 a_0}{da_1^2}\right|_{a_1=0} = \left.\frac{a_1'(w)a_0''(w) - a_1''(w)a_0'(w)}{\left(a_1'(w)\right)^3}\right|_{w=0}. \tag{П.2}$$

Учтем:

$$a_1'(w)\big|_{w=0} = a_2 U_1(\cos\varphi) = 2a_2\cos\varphi;$$

$$a_1''(w)\big|_{w=0} = -2a_3 U_2(\cos\varphi) = -2a_3\left(4\cos^2\varphi - 1\right); \tag{П.3}$$

$$a_0'(w)\big|_{w=0} = 0; \quad a_0''(w)\big|_{w=0} = 2a_2 U_0(\cos\varphi) = 2a_2. \tag{П.4}$$

Подставим (П.3), (П.4) в (П.2):

$$\left.\frac{d^2a_0}{da_1^2}\right|_{a_1=0}=\left.\frac{a_1'(w)a_0''(w)-a_1''(w)a_0'(w)}{\left(a_1'(w)\right)^3}\right|_{w=0}=\frac{2a_2\cos\varphi 2a_2+2a_3\left(4\cos^2\varphi-1\right)*0}{8a_2^3\cos^3\varphi}.$$

После преобразования:

$$\left.\frac{d^2a_0}{da_1^2}\right|_{a_1=0}=\frac{1}{2a_2^3\cos^2\varphi}>0. \qquad (П.5)$$

Для всех $0\le\varphi<\pi/2$ выполняется условие:

$$\left.\frac{d^2a_0}{da_1^2}\right|_{a_1=0}>0. \qquad (П.6)$$

Т. е. для точки начала координат первая производная равна нулю: $da_0/da_1=0$, вторая производная положительна: $d^2a_0/da_1^2>0$, а следовательно, утверждение П.1 доказано.

2. Точка экстремума граничной кривой (точка M_2 на рис. 4.1).

Утверждение П.2. Так как функция $a_0(a_1)$, определяемая параметрическими уравнениями (3.1), (2.2), дифференцируема на отрезке $\left[0,a_1\left(M_3\right)\right]$ и на концах отрезка принимает равные значения $a_0\left(0\right)=a_0\left(a_1\left(M_3\right)\right)=0$, то существует точка экстремума граничной кривой: $a_1\left(M_2\right)\in\left(0,a_1\left(M_3\right)\right)$, в которой производная $a_0'\left(a_1\left(M_2\right)\right)=0$.

Это утверждение следует непосредственно из теоремы Ролля.

3. Точка пересечения граничной кривой с осью абсцисс (точка M_3 на рис. 4.1).

Для точки M_3 имеем $a_0(M_3)=0$. Тогда на основании формул (3.1), (3.2):

$$a_1\left(M_3\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(-1\right)^k U_{k-1}\left(\cos\varphi\right)a_k w^{k-1}>0, \qquad (П.7)$$

где переменная w определяется из уравнения

$$\sum_{k=2}^{n}\left(-1\right)^k U_{k-2}\left(\cos\varphi\right)a_k w^k=0. \qquad (П.8)$$

3. Точка перегиба (точка М1 на рис. 4.1).

Утверждение П. 3. Так как первая производная $a_0'(a_1)$ функции $a_0(a_1)$, определяемой параметрическими уравнениями (5.1), (5.2), дифференцируема на отрезке $\left[0, a_1\left(M_2\right)\right]$ и на концах отрезка принимает равные значения $a_0'\left(a_1\right)\Big|_{a_1=0} = a_0'\left(a_1\right)\Big|_{a_1=a_1(M_2)} = 0,$ то существует точка $a_1\left(M_1\right) \in \left(0, a_1\left(M_2\right)\right)$, точка «перегиба», в которой вторая производная равна нулю: $a_0''\left(a_1\left(M_1\right)\right) = 0.$

Утверждение П.3 следует непосредственно из модификации теоремы Ролля.

Литература

1. Айзерман М. А. Краткий очерк становления и развития классической теории регулирования в управлении // АиТ, 1993. С. 6–18.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 5-е изд. М.: Физматлит, 2004.

3. Солодовников В. В. Основы автоматического регулирования. Теория. М.: Машгиз, 1954.

4. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.

5. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.

6. Siljak D. Analysis and synthesis of feedback control systems in the parameter plane. I – Linear continuous systems, II – Sampled-data systems // AIEE Trans. (Appl. andIndustry), 83(1964). С. 449–466.

7. Siljak D. Generalization of the parameter plane method // IEEE Trans. Automat. Control, 11:1 (1966). С. 63–70.

8. Джури Э. И. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979.
   Jury E. I. Inners and the Stability of Dynamic Systems. Wiley. New York, 1974.

9. Грязина Е. Н., Поляк Б. Т., Тремба А. А. Современное состояние метода *D*-разбиения. Обзор. // АиТ. 2008. №12. С. 3–40.

10. Mitrovic D. Graphical analysis and synthesis of feedback control systems. I – Theory and analysis, II – Synthesis, III – Sampled-data feedback control systems // AIEE Trans. (Appl. and Industry), 77 (1959). С. 476–496.

11. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. Пер. с англ. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
    Phillips C., Harbor R. Feedback Control Systems, 4th Edition. 2000. Prentice Hall, Inc., 2000.

12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. Пер. изд.: Bateman Harry, Erdelyi Arthur. Higher transcendental functions. Vol. 2 — 1953.

13. Николаев Ю. П. Анализ устойчивости специальных полиномов, построенных из классических ортогональных полиномов, с учетом параметрической неопределенности // АиТ. 2011. № 5. С. 3–16.
Yu. P. Nikolaev. Stability analysis of special polynomials constructed from the classical orthogonal polynomials with provision for parametric uncertainty // Autom. Remote Control. 2011.Vol. 72. No 5. P. 901–913.

14. Anderson B. D. O., Bose N. K., Jury E. I. A simple test for zeros of a complex polynomials in a sector // IEEE Trans. On Automatic Control. 1974. V.19. № 4. P. 437–438.

15. Katbab A., Jury E. I. A note on two methods related to stability robustness of polynomials in a sector (relative stability) // IEEE Trans Automat. Control. 1993. V. 38. № 2. P. 380–383.

16. Soh У. С, Xie L., Foo У. К. Maximal perturbation bound for perturbed polynomials with roots in the left sector / / IEEE Trans. Circ. Syst. I: Fundamental Theory and Applications. 1994. V. 41. № 4. P. 281–285.

17. Николаев Ю. П. Канонические области устойчивости линейных непрерывных и дискретных систем: элементы теории. // М.: МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. Вып. 13, 2016. С. 17–26.

Правила оформления материалов, направляемых для опубликования в журнале «Навигация и управление летательными аппаратами»

– Для опубликования в журнале принимаются статьи объемом до 30 с., а также краткие сообщения объемом до 5 стр.

– Статья должна иметь аннотацию не более 600 знаков, ключевые слова.

– На первой странице должны быть указаны: фамилии и инициалы авторов, полное название текста статьи без сокращений, проставлен индекс УДК.

– Материалы должны быть подготовлены в формате *.doc, лист А4, ориентация книжная (вертикальное расположение), шрифт Times New Roman, размер шрифта 12, интервал между строками одинарный, поля (мм): верхнее 22, нижнее 50, левое 30, правое 28, расположение страниц зеркальное. Установить «Автоматическую расстановку переносов». Переносы вручную не ставить.

– Формат формул в MathType или Microsoft Equation: Define Sizes, Full 12 pt, Subscript/Superscript 7 pt, Sub-Subscript/Superscript 5 pt, Symbol 18 pt, Sub-Symbol 12 pt.

– Иллюстрированный материал представляется в формате *.jpg, *.bmp, *.png (разрешение не менее 300 точек на дюйм) или в виде рисунка Word, фрагменты которого объединены в единый объект. Цветные иллюстрации приветствуются.

– В конце текста указывается информация о каждом авторе: Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, полное название и почтовый адрес организации, должность, контактные телефоны (служебный, мобильный или домашний), адрес электронной почты.

– В редакцию предоставляется электронный носитель с текстом статьи и ее распечатка в двух экземплярах, подписанная всеми авторами.

– К статье прилагается экспертное заключение о возможности ее открытой публикации, рецензия, лицензионный договор.

– Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Содержание

И. С. Кикин
Комплексирование инерциальной системы управления путевой скоростью самолета и системы воздушных сигалов.....2

А. В. Гребёнкин, Л. А. Володина, А. А. Лушников
Оценка возможности понижения тяги двигателей на режиме «уход на второй круг».....19

О. В. Круглякова, А. А. Макарычев, В. Е. Куликов, А. А. Кузин
Косвенный метод определения веса самолета при решении задачи защиты диапазона по минимальной скорости полета.....34

Ю. П. Николаев
Области секторной устойчивости динамических систем с обратной связью.....47