ТРУДЫ
МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И АВТОМАТИКИ (МИЭА)

Основаны в 2010 году

Выпуск 19

НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

Под общей редакцией доктора технических наук А. Г. Кузнецова

Москва
2017

УДК 621.391.14

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ МЕЖДУ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ ТРАКТАМИ ДАТЧИКОВ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НА ТОЧНОСТЬ НАВИГАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ БЕСКАРДАННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

О. Н. БОГДАНОВ, *к. ф.-м. н.*
МГУ им. М. В. Ломоносова,
А. В. ФОМИЧЕВ, *к. ф.-м. н.*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Для корректного функционирования бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС) необходима внутренняя синхронизация потоков измерительной информации от инерциальных датчиков. Данному вопросу в литературе уделяется определенное внимание, но вычисление навигационных погрешностей, как правило, проводится исходя из достаточно грубых оценок сверху. В предлагаемой статье вопрос влияния взаимной несинхронности измерений в трактах датчиков угловой скорости исследуется для двух типов движений БИНС, для которых рассинхронизация приводит к существенным погрешностям. Исследование проведено на основе точных кинематических соотношений и математических моделей. Проведенное моделирование подтверждает аналитические результаты, а также позволяет оценить чувствительность навигационных ошибок к изменениям параметров движения.

Ключевые слова: *бесплатформенная инерциальная система, задержки в трактах датчиков угловых скоростей, навигационные погрешности.*

THE STUDY OF RATE SENSOR MEASURING CHANNELS DELAY EFFECT ON THE STRAPDOWN INS NAVIGATION DECISION ACCURACY

O. N. BOGDANOV, *PhD in Phys. and Math.*
Lomonosov Moscow State University,
A.V. Fomitchyov, *PhD in Phys. and Math.*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

Strapdown INS (SINS) correct operation requires internal synchronization of measurement data flows from inertial sensors. A certain attention is paid to that problem in literature, however navigation errors computation is usually carried out on the basis of fairly rough upper estimates. The article examines the problem of mutual non-synchronization of measurements in rate sensors measuring channels for two types of SINS motion, for which the lack of synchronization leads to significant errors. The study was based on accurate kinematic ratios and mathematical models. The simulation confirms the results of analysis and enables the estimation of navigation errors response to motion parameters changes.

Keywords: *Strapdown INS, rate sensor channels delay, navigation errors.*

Введение

Погрешности навигационного решения БИНС вызваны преимущественно инструментальными погрешностями инерциальных датчиков — акселерометров и датчиков угловой скорости (ДУС). К основным инструментальным погрешностям относятся смещения нулевых сигналов, погрешности масштабов, взаимные перекосы осей чувствительности, динамический дрейф гироскопов, вариативность указанных погрешностей в зависимости от температуры, а также случайные немоделируемые погрешности [1]. Кроме этого, одним из факторов, влияющим на точность БИНС, является синхронизация потоков данных в различных информационных трактах [2, 3]. В данной статье рассмотрен вопрос о влиянии взаимной рассинхронизации в трактах ДУС.

Известно, что все погрешности трактов инерциальных датчиков могут быть пересчитаны в некоторые приведенные инструментальные погрешности трактов акселерометров и ДУС. Для этих приведенных погрешностей, в свою очередь, могут быть вычислены соответствующие им навигационные ошибки для любой конкретной траектории. Таким образом, для оценки парциального влияния взаимной несинхронности измерений датчиков угловой скорости следует вычислить приведенный дрейф, обусловленный этой несинхронностью, считая, что другие погрешности отсутствуют.

Для оценки вклада несинхронности в навигационную ошибку в дальнейшем будем считать, что перечисленные выше инструментальные погрешности БИНС отсутствуют. Введем приборную систему координат — трехгранник $Mz\left(Mz_1z_2z_3\right)$, где точка M — приведенный центр БИНС z_1, z_2, z_3 — ортогональные оси, жестко связанные с блоком чувствительных элементов БИНС. В силу предположения об отсутствии инструментальных погрешностей можно считать, что оси чувствительности ДУС ориентированы в точности по осям приборного трехгранника. Обозначим через $\omega_z(t)=\left(\omega_{z_1}(t),\omega_{z_2}(t),\omega_{z_3}(t)\right)^T$ вектор угловой скорости объекта, измеряемый ДУС в момент времени *t*. Если в измерительных трактах присутствуют задержки, то в момент *t* блок ДУС будет измерять вектор $\omega'_z(t)=\left(\omega_{z_1}\left(t-\tau_1\right),\omega_{z_2}\left(t-\tau_2\right),\omega_{z_3}\left(t-\tau_3\right)\right)^T$.

Таким образом, для приведенного дрейфа триады ДУС можно записать приближенную формулу:

$$\nu_z=\omega'_z-\omega_z=\begin{pmatrix}\nu_{z_1}\\ \nu_{z_2}\\ \nu_{z_3}\end{pmatrix}\approx-\begin{pmatrix}\tau_1\dot{\omega}_{z_1}\\ \tau_2\dot{\omega}_{z_2}\\ \tau_3\dot{\omega}_{z_3}\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Иными словами, приведенный дрейф датчиков угловой скорости возникает при наличии углового ускорения, которое в свою очередь обусловлено либо изменением модуля вектора угловой скорости, либо изменением его направления.

В работе приведены движения объекта, при которых наличие углового ускорения приводит к достаточно большим значениям приведенного дрейфа. Все рассматриваемые движения описываются простыми аналитическими функциями времени. Для каждого движения проводится численное моделирование, подтверждающее результаты теоретических рассуждений и позволяющее исследовать влияние отклонений от этих движений. Кроме того, моделирование позволяет определить диапазоны выявленных значений параметров, задающих то или иное движение, для которых приведенный дрейф остается неприемлемо большим для навигации.

Вращение объекта вокруг неподвижной относительно Земли оси с переменной угловой скоростью. Введем географическую систему координат – трехгранник $Mx(Mx_1x_2x_3)$ следующим образом: начало географической системы совпадает с приведенным центром БИНС, ось x_1 направлена вдоль географической параллели на Восток, ось x_2 — вдоль меридиана на Север, ось x_3 — вдоль географической вертикали.

Для определенности будем считать, что БИНС расположена на объекте таким образом, что ось z_1 направлена вдоль боковой оси в сторону правого борта, ось z_2 направлена по продольной оси объекта вперед, ось z_3 — по вертикальной оси объекта. Тогда переход из географической системы координат к приборной может быть описан следующей цепочкой поворотов:

$$Mx \xrightarrow[3]{-\psi} Mx' \xrightarrow[1]{\vartheta} Mx'' \xrightarrow[2]{\gamma} Mz\,. \qquad (2)$$

Здесь ψ — угол курса, ϑ — угол тангажа, γ — угол крена, Mx', Mx'' — промежуточные системы координат. Под каждой стрелкой указан номер оси системы координат, вокруг которой совершается текущий поворот.

Предположим, что в начальный момент времени БИНС повернута на некоторый угол курса ψ, углы крена и тангажа нулевые. Далее система вращается вокруг оси x_2 и соответствующее положение системы описывается углом поворота κ.

Тогда вектор измерений идеальных ДУС имеет вид:

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} \\ \omega_{z_3} \end{pmatrix} = \dot{\kappa}(t) \begin{pmatrix} \sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Отсюда следует выражение для вектора приведенного дрейфа:

$$\nu_z = \omega'_z - \omega_z = -\ddot{\kappa}(t) \begin{pmatrix} \tau_1 \sin\psi \\ \tau_2 \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Замечание. Здесь и далее при вычислении вектора измерений идеальных ДУС (3) и вектора приведенного дрейфа (4) не учитывается угловая скорость вращения Земли, малая по сравнению с характерными угловыми скоростями маневрирования объектов, на которые устанавливаются БИНС, или угловыми скоростями при стендовых испытаниях БИНС. Нетрудно показать, что учет угловой скорости Земли в показаниях ДУС приведет к пренебрежимо малым поправкам.

Для исследования влияния этого дрейфа на погрешности БИНС удобно перепроектировать его в географический трехгранник, что связано со структурой уравнений ошибок БИНС [1] и удобством интерпретации результатов. Если же рассматривать только погрешность ориентации, обусловленную приведенным дрейфом, то можно ограничиться интегрированием уравнения для кинематической ошибки [1] в любых осях, например, в приборных, не делая перепроектирования.

Из геометрических соображений следует, что в осях географической системы Mx вектор приведенного дрейфа записывается следующим образом:

$$\nu_x = \begin{pmatrix} \nu_{z_1}\cos\psi\cos\kappa - \nu_{z_2}\sin\psi\cos\kappa \\ \nu_{z_1}\sin\psi + \nu_{z_2}\cos\psi \\ -\nu_{z_1}\cos\psi\sin\kappa + \nu_{z_2}\sin\psi\sin\kappa \end{pmatrix} \approx$$
$$\approx \ddot{\kappa}(t) \begin{pmatrix} -(\tau_1 - \tau_2)\cos\psi\sin\psi\cos\kappa \\ -\tau_1\sin^2\psi - \tau_2\cos^2\psi \\ (\tau_1 - \tau_2)\cos\psi\sin\psi\sin\kappa \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Из полученной формулы следует, что при вращении относительно одной из осей чувствительности, когда $\psi = 0$ или $\psi = \frac{\pi}{2}$, остается ненулевой лишь вторая компонента вектора ν_x. В условиях стендовых экспериментов с вращением относительно фиксированной оси обычно характерны следующие движения, содержащие угловые ускорения:

- поворот из одного неподвижного относительно Земли положения в другое;
- разгон до некоторой угловой скорости и дальнейшее вращение с примерно постоянной угловой скоростью;
- колебания относительно некоторой оси.

На коротких интервалах времени для определения порядка погрешностей ориентации, обусловленных приведенным дрейфом (5), можно воспользоваться грубой оценкой сверху

$$\beta = \int_o^t |\nu_x|\, dt \sim \ddot{\kappa} t \tau, \tag{6}$$

следующей из выражения для модуля вектора (5). В выражении (6) β — модуль вектора малого поворота, описывающего погрешность вычисленной ориентации географического трехгранника, обусловленную приведенным дрейфом, $\ddot{\kappa}$ — характерная величина углового ускорения при рассматриваемом движении, $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$.

Ясно, что при всех движениях, кроме колебаний, практически осуществимое угловое ускорение не может действовать продолжительное время и для оценки можно ограничиться коротким временным интервалом порядка секунды. Пусть, например, $\ddot{\kappa} = 1\ \text{с}^{-2}$, $\tau = 10^{-6}$ с, t = 1 с. Тогда $|\nu_x| \sim 10^{-6}\,\text{с} \approx 0{,}2^\circ/\text{ч}$ и $\beta \sim 0{,}2''$, что является достаточно малой величиной для навигационных систем мильного класса точности, для которых погрешность построения вертикали имеет порядок десяти угловых секунд.

При использовании формулы (6) необходимо иметь в виду, что она представляет собой грубую оценку сверху и непригодна для использования на длительных интервалах времени в виду того, что компоненты вектора (5) могут быть знакопеременными функциями, имеющими среднее, близкое к нулю. Именно поэтому представляет интерес выявить движения, при которых приведенные дрейфы в географических осях будут иметь ненулевые средние значения. Этому вопросу посвящено дальнейшее исследование.

Рассмотрим гармонические колебания объекта вокруг оси x_2. Тогда

$$\kappa = \kappa_0 \sin \omega t, \tag{7}$$

где κ_0 — амплитуда колебаний, ω — частота колебаний, а для малых значений амплитуды κ_0 колебаний справедливо приближение:

$$\ddot{\kappa} \sin \kappa \approx -\kappa_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \tag{8}$$

Отсюда средние значения компонент приведенного дрейфа ДУС в осях географической системы координат вычисляются так:

$$\begin{aligned} &\langle \nu_{x_1} \rangle = \langle \nu_{x_2} \rangle = 0, \\ &\langle \nu_{x_3} \rangle \approx \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1)\kappa_0^2 \omega^2 \sin\psi \cos\psi = \frac{1}{4}(\tau_2 - \tau_1)\kappa_0^2 \omega^2 \sin 2\psi. \end{aligned} \tag{9}$$

Видно, что максимальное среднее значение приведенного дрейфа $\langle \nu_{x_3} \rangle$ достигается, когда угол курса $\psi = \frac{\pi}{4}$. Для определенности рассмотрим колебания с секундным периодом $(\omega = 2\pi)$, амплитудой $\kappa_0 = 5^\circ$ и разностью задержек в измерительных трактах ДУС: $\tau_2 - \tau_1 = 10^{-6}$ с. Тогда из (9) следует, что среднее значение приведенного дрейфа $\langle \nu_{x_3} \rangle = 0{,}015^\circ/\text{ч}$, что критично для навигационных систем мильной точности.

Отметим, что рассмотренное движение легко реализовать при испытаниях на поворотных стендах. В условиях эксплуатации движение, близкое к рассмотренному, может быть реализовано, например, при качке корабля на волнах.

Пространственное движение БИНС. Из теоретической механики [4] известно, что движение типа регулярной прецессии, возникающие при движении динамически симметричных твердых тел при определенных условиях, допускает простое кинематическое описание. Его легко реализовать на трехосных поворотных стендах. По этим причинам именно такое пространственное движение БИНС рассматривается далее. Если считать, что ось прецессии вертикальна, то справедливы следующие соотношения для углов ориентации:

$$\vartheta = \text{const}, \qquad \dot{\psi} = \text{const}, \qquad \dot{\gamma} = \text{const}. \tag{10}$$

При произвольном движении приборного трехгранника относительно географического угловая скорость в приборных осях ω_z выражается через углы ориентации и их производные по формуле

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos\gamma - \dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta \\ \dot{\vartheta}\sin\gamma + \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Здесь также считается, что угловой скоростью Земли можно пренебречь в виду малого влияния на приводимые далее оценки. Для случая регулярной прецессии вектор угловой скорости имеет вид:

$$\omega_z = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\cos\vartheta\sin\left(\gamma_0+\dot{\gamma}t\right) \\ \dot{\gamma}+\dot{\psi}\sin\vartheta \\ \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\left(\gamma_0+\dot{\gamma}t\right) \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Здесь γ_0 — значение угла крена в начальный момент. Вектор измерений блока ДУС при наличии задержек τ_1, τ_2, τ_3 в измерительных трактах запишется так:

$$\omega'_z = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\cos\vartheta\sin\left(\gamma_0+\dot{\gamma}t-\dot{\gamma}\tau_1\right) \\ \dot{\gamma}+\dot{\psi}\sin\vartheta \\ \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\left(\gamma_0+\dot{\gamma}t-\dot{\gamma}\tau_3\right) \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Тогда приближенная формула для приведенного дрейфа триады ДУС в осях приборной системы координат запишется в следующем виде:

$$\nu_z = \omega'_z - \omega_z \approx \begin{pmatrix} \dot{\psi}\dot{\gamma}\tau_1\cos\vartheta\cos\left(\gamma_0+\dot{\gamma}t\right) \\ 0 \\ \dot{\psi}\dot{\gamma}\tau_3\cos\vartheta\sin\left(\gamma_0+\dot{\gamma}t\right) \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Спроектируем приведенный дрейф ДУС на оси географической системы координат. Компоненты матрицы перехода из приборной системы в географическую A_{xz} выражаются через углы курса ψ, тангажа ϑ и крена γ:

$$A_{xz} = \begin{pmatrix} c_\psi c_\gamma - s_\psi s_\vartheta s_\gamma & -s_\psi c_\vartheta & c_\psi s_\gamma - s_\psi s_\vartheta c_\gamma \\ s_\psi c_\gamma + c_\psi s_\vartheta s_\gamma & c_\psi c_\vartheta & s_\psi s_\gamma - c_\psi s_\vartheta c_\gamma \\ -c_\vartheta s_\gamma & s_\vartheta & c_\vartheta c_\gamma \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Здесь для краткости символами «*c*» и «*s*» обозначены соответственно функции косинус и синус, а нижние индексы — аргументы этих функций.

Вектор приведенного дрейфа в осях географической системы имеет вид:

$$\nu_x = A_{xz}\nu_z = \dot{\psi}\dot{\gamma}c_\vartheta \begin{pmatrix} \tau_1 c_\gamma\left(c_\psi c_\gamma - s_\psi s_\vartheta s_\gamma\right) + \tau_3 s_\gamma\left(c_\psi s_\gamma + s_\psi s_\vartheta c_\gamma\right) \\ \tau_1 c_\gamma\left(s_\psi c_\gamma + c_\psi s_\vartheta s_\gamma\right) + \tau_3 s_\gamma\left(s_\psi s_\gamma - c_\psi s_\vartheta c_\gamma\right) \\ \left(\tau_3-\tau_1\right)c_\vartheta s_\gamma c_\gamma \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Среднее значение приведенного дрейфа в географических осях отлично от нуля в случае, когда угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ вдвое больше угловой скорости собственного вращения $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\psi} = 2\dot{\gamma}. \qquad (17)$$

Тогда

$$\gamma = \gamma_0 + \dot{\gamma}t, \qquad \psi = \psi_0 + 2\dot{\gamma}t, \qquad (18)$$

где ψ_0 — значение угла курса в начальный момент. Несложные тригонометрические преобразования позволяют получить выражение для средних значений компонент вектора приведенного дрейфа:

$$\left\langle \nu_x \right\rangle = \frac{1}{8}\dot{\psi}^2\left(\tau_1-\tau_3\right)\cos\vartheta\left(1-\sin\vartheta\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\psi_0-2\gamma_0\right) \\ \sin\left(\psi_0-2\gamma_0\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Из (19) следует, что модуль вектора приведенного дрейфа $\left|\left\langle \nu_x \right\rangle\right|$ постоянен. Его максимальное значение достигается при значении угла тангажа $\vartheta = -30°$:

$$\left|\left\langle \nu_x \right\rangle\right| = \frac{3\sqrt{3}}{32}\dot{\psi}^2\left(\tau_1-\tau_3\right). \qquad (20)$$

Для определенности возьмем характерное для маневренных летательных аппаратов значение угловой скорости $\dot{\psi} = 1$ рад/с и разность задержек в измерительных трактах ДУС: $\tau_1 - \tau_3 = 10^{-6}$ с. Тогда модуль усредненного приведенного дрейфа $\left|\left\langle \nu_x \right\rangle\right| \approx 1{,}62\cdot 10^{-7}\,\text{с}^{-1} \approx 0{,}03°/\text{ч}$.

Отсюда следует вывод, что при специально подобранных параметрах прецессионного движения приведенный дрейф может достигать достаточно существенных значений. Движение, близкое к рассмотренному, можно реализовать при стендовых испытаниях. Аналогичный эффект появления дрейфа с ненулевым средним в географических осях можно ожидать при выполнении летательным аппаратом однотипных циклических маневров.

Численное моделирование. Рассмотрены два класса движений и установлено, что при определенных условиях на параметры, задающие движение, приведенный дрейф, вызванный задержками в измерительных трактах ДУС, может оказаться существенным и по порядку равным дрейфу, порожденному инструментальными погрешностями ДУС, даже при задержках в 1-2 мкс. Представляет интерес исследовать чувствительность приведенного дрейфа к параметрам движения. Приведенная ниже схема моделирования позволяет исследовать произвольные траектории, а не только рассмотренные в статье вращения относительно неподвижной точки.

Например, интересен вопрос, что произойдет, если условие (17) будет выполняться неточно. Иными словами, если

$$\dot{\psi} = 2\dot{\gamma} + \delta, \tag{21}$$

то при каких характерных значениях δ возникающий дрейф будет вносить заметный вклад в навигационную ошибку? Для получения ответов на поставленные вопросы было проведено математическое моделирование.

Математическое моделирование навигационной задачи БИНС включает в себя два этапа:

- на первом этапе формируются показания ДУС: (идеальные показания или показания, содержащие задержки [5]) и показания идеальных акселерометров для заданного движения;
- на втором этапе по вычисленным измерениям ДУС решаются навигационные уравнения.

Пусть рассматриваемый интервал времени $[t_0, t_n]$ имеет длину $n \cdot \Delta t$, где n — целое число, а Δt — интервал времени, на котором формируется каждое измерение ДУС.

На **первом этапе** для моделирования измерений ДУС на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, ..., n)$ используется кинематическое уравнение Пуассона:

$$A_z(t_j) = \left(E + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\hat{\alpha}_z + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\hat{\alpha}_z^2 \right) A_z(t_{j-1}). \tag{22}$$

Здесь $A_z(t_{j-1}), A_z(t_j)$ — матрица ориентации приборной системы относительно инерциального пространства в моменты времени, соответственно, t_{j-1}, t_j, α_z — вектор поворота приборной системы за интервал времени $[t_{j-1}, t_j]$, α — его модуль, $\hat{\alpha}_z$ — кососимметрическая матрица, элементы которой вычисляются через компоненты вектора $\alpha_z = (\alpha_{z_1}, \alpha_{z_2}, \alpha_{z_3})^T$ таким образом:

$$\hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Замечание. Поскольку в рассматриваемых в работе движениях основание БИНС неподвижно, а угловой скоростью вращения Земли мы пренебрегаем, можно считать, что инерциальным пространством является географическая система координат и $A_z = A_{xz}$.

Исходными данными для моделирования являются углы ориентации: углы курса $\psi(t)$, тангажа $\vartheta(t)$ и крена $\gamma(t)$, заданные при $t \in [t_0, t_n]$. Через углы ориентации вычисляются матрицы ориентации $A_z(t_j)$, $j = 0, ..., n$. На каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, ..., n)$ по известным значениям матриц $A_z(t_{j-1})$ и $A_z(t_j)$ можно из (22) с помощью несложных вычислений определить вектор поворота α_z. Тогда вектор угловой скорости получается из вектора поворота делением каждой компоненты на длину интервала Δt:

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} \\ \omega_{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{z_1} / \Delta t \\ \alpha_{z_2} / \Delta t \\ \alpha_{z_3} / \Delta t \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Приведенная последовательность действий позволяет вычислить вектор измерений идеальных ДУС. Отметим, что показания ДУС представляют собой среднюю угловую скорость на каждом отрезке времени $[t_{j-1}, t_j]$. При наличии задержек в измерительных трактах первый ДУС измеряет вектор средней скорости на отрезке времени $[t_{j-1} - \tau_1, t_j - \tau_1]$, второй ДУС — на отрезке $[t_{j-1} - \tau_2, t_j - \tau_2]$ и третий ДУС — на отрезке $[t_{j-1} - \tau_3, t_j - \tau_3]$.

Таким образом, для определения вектора $\omega'_z = (\omega'_{z_1}, \omega'_{z_2}, \omega'_{z_3})^T$ следует поступить следующим образом. Для вычисления каждой компоненты ω'_{z_i} $(i = 1, 2, 3)$ на отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ отдельно вычисляются матрицы $A_z(t_{j-1} - \tau_i)$ и $A_z(t_j - \tau_i)$ и из соотношения (21) находится вектор поворота объекта α_z за отрезок времени $[t_{j-1} - \tau_i, t_j - \tau_i]$.

Из него по формуле (24) определяется величина ω'_{z_i} — i-ая компонента вектора ω'_z. Корректность такого подхода подтверждена совпадением выводов, полученных аналитически и при моделировании.

Моделирование измерений акселерометров выполняется на основе векторного динамического уравнения движения:

$$\dot{v}_x = \hat{\omega}_x v_x + g_x^0 + A_{xz} f_z. \qquad (25)$$

Здесь v_x — вектор абсолютной скорости объекта в проекциях на оси географической системы координат Mx, $\hat{\omega}_x$ — кососимметрический оператор, соответствующий вектору абсолютной угловой скорости географической системы координат, строящийся по правилу (23). g_x^0 — вектор силы тяготения в осях географической системы и f_z — вектор измерений акселерометров в осях приборной системы координат.

Замечание. Поскольку запаздывание в измерительных трактах акселерометров не является предметом исследования данной работы, не будем подробно останавливаться на вопросе моделирования их измерений. Вопросы взаимной рассинхронизации измерений ДУС и акселерометров были рассмотрены, например, в [3].

На **втором этапе** решаются уравнения инерциальной навигации по вычисленным измерениям инерциальных датчиков.

Углы ориентации объекта определяются по измерениям ДУС с помощью кинематического уравнения Пуассона (22). Вектор скорости объекта определяется по измерениям акселерометров с помощью динамического уравнения (25). Географические координаты объекта — долгота λ и географическая широта φ — определяются через элементы матрицы ориентации A_x географической системы относительно инерциального пространства. Поскольку в работе рассматривается объект на неподвижном основании, вращение географического трехгранника при решении уравнений навигации обусловлено навигационными ошибками и описывается уравнением

$$A_x\left(t_j\right) = \left(E + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\hat{\alpha}_x + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\hat{\alpha}_x^2\right) A_x\left(t_{j-1}\right). \qquad (26)$$

Здесь $\hat{\alpha}_x$ — кососимметрическая матрица, соответствующая вектору поворота географической системы за интервал времени $\left[t_{j-1}, t_j\right]$, α — его модуль. Вектор α_x определяется через горизонтальные компоненты найденного ранее вектора скорости v_x и радиусы кривизны земного эллипсоида в соответствии с известными навигационными уравнениями [1]. Таким образом, соотношение (26) позволяет определить матрицу $A_x(t_j)$, а через ее элементы вычисляются искомые географические координаты.

Обозначим через λ, φ — географические координаты траектории, на которой проводится моделирование (в рассматриваемых нами примерах $\lambda = \text{const}, \varphi = \text{const}$). Через λ', φ' обозначим результат решения уравнений навигации. Тогда $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi$ — ошибки навигационного решения. Их анализ и является предметом настоящего исследования.

Сравнение результатов численного моделирования с аналитическими расчетами демонстрирует практически полное совпадение и доказывает справедливость описанного подхода к численному моделированию эффекта от задержек.

Результаты моделирования. Моделирование колебательного движения вокруг горизонтальной оси (качка) проводилось для тех же значений параметров, которые обозначены выше:

$$\psi = \frac{\pi}{4}; \qquad \omega = 2\pi; \qquad \kappa_0 = 5^\circ; \qquad \tau_2 - \tau_1 = 10^{-6}\,\text{с}. \qquad (27)$$

Моделирование подтвердило, что среднее значение приведенного вертикального дрейфа вдоль вертикальной оси $\left\langle \nu_{x_3} \right\rangle \approx 0{,}015\ ^\circ/\text{ч}$. Вызванные этим дрейфом навигационные ошибки небольшие, составляют порядка 100 м за 1 час движения. Однако при аналогичной качке относительно негоризонтального направления будут возникать аналогичные значения приведенного дрейфа в горизонтальной плоскости, которые приведут к существенно большим навигационным ошибкам.

Моделирование движений типа регулярной прецессии также проводилось для рассмотренных выше параметров:

$$\dot{\psi} = 1 \quad \text{рад/с}, \qquad \dot{\gamma} = 0{,}5 \quad \text{рад/с}, \qquad \tau_1 - \tau_3 = 10^{-6}\ \text{с}. \qquad (28)$$

Моделирование также подтвердило, что среднее значение модуля приведенного дрейфа $\left|\left\langle \nu_x \right\rangle\right| \approx 0{,}03\ ^\circ/\text{ч}$. Были взяты нулевыми значения начальных фаз углов курса и крена:

$$\psi_0 = 0^\circ, \qquad \gamma_0 = 0^\circ. \qquad (29)$$

В этом случае, как следует из (19):

$$\left\langle \nu_{x_1} \right\rangle \approx 0{,}03^\circ/\text{ч}, \qquad \left\langle \nu_{x_2} \right\rangle = 0^\circ/\text{ч}, \qquad \left\langle \nu_{x_3} \right\rangle = 0^\circ/\text{ч}. \qquad (30)$$

Отдельный интерес, как уже было сказано выше, представляет вопрос чувствительности возникновения приведенного дрейфа к нарушению строгой связи между частотами колебаний углов (17). Был рассмотрен случай, когда $\dot{\psi} = 1{,}001$ рад/с и значения остальных параметров (28) остаются прежними.

На рис. 1 приведены графики ошибок широты $\Delta\varphi$ и долготы $\Delta\lambda$ навигационного решения. Сплошная линия соответствует ошибке широты, штрихпунктирная линия — ошибке долготы. Ошибка широты во втором случае заметно меньше, чем в первом, а ошибка долготы наоборот. Это говорит о том, что нарушение строгой связи между угловыми частотами (17) в данном случае несущественно, а характер поведения ошибок навигационного решения во многом обусловлен начальными значениями углов ψ_0, γ_0.

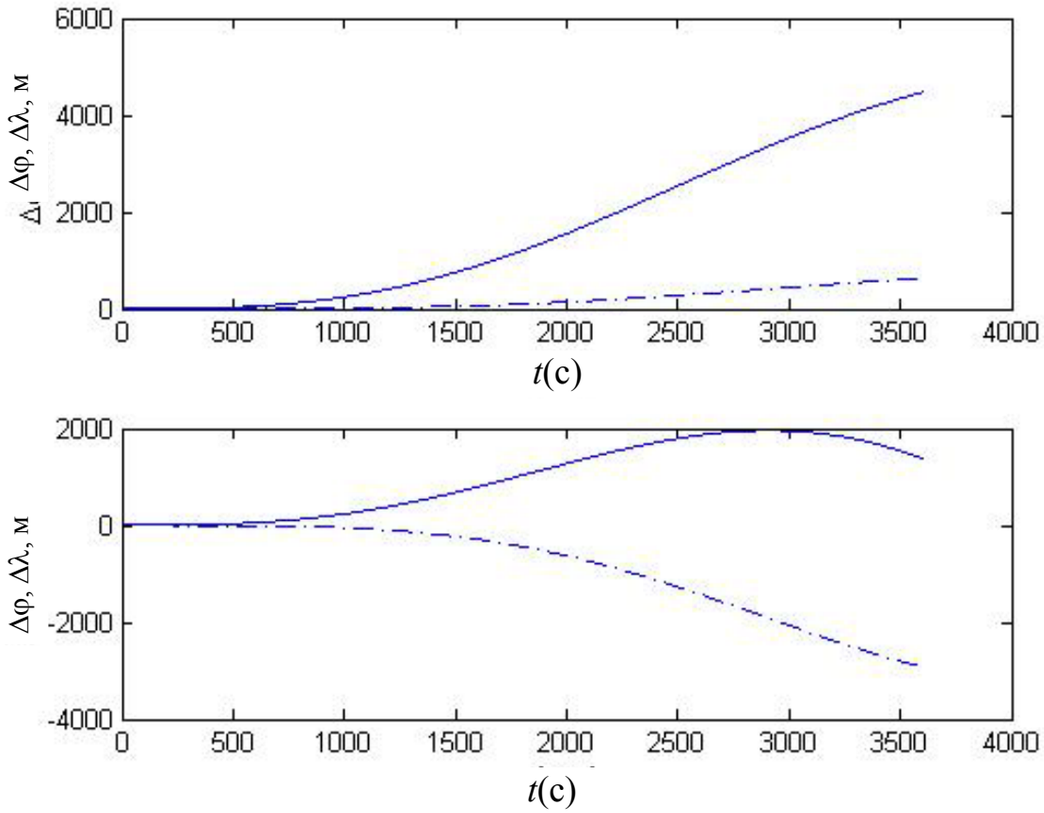

Рис. 1. Графики ошибок широты $\Delta\varphi$ и долготы $\Delta\lambda$ (верхний график соответствует случаю $\dot{\psi} = 1$ рад/с, нижний график – случаю $\dot{\psi} = 1{,}001$ рад/с)

Далее были рассмотрены случаи, когда $\dot{\psi} = 1{,}01$ рад/с и $\dot{\psi} = 1{,}1$ рад/с. На рис. 2 показаны соответствующие графики навигационных ошибок. Сплошная линия соответствует ошибке широты, пунктирная линия — ошибке долготы. Из графиков видно, что навигационные ошибки широты $\Delta\varphi$ и долготы $\Delta\lambda$ резко уменьшаются по мере того, как нарушается соотношение между угловыми частотами (17) и возрастает величина δ (21).

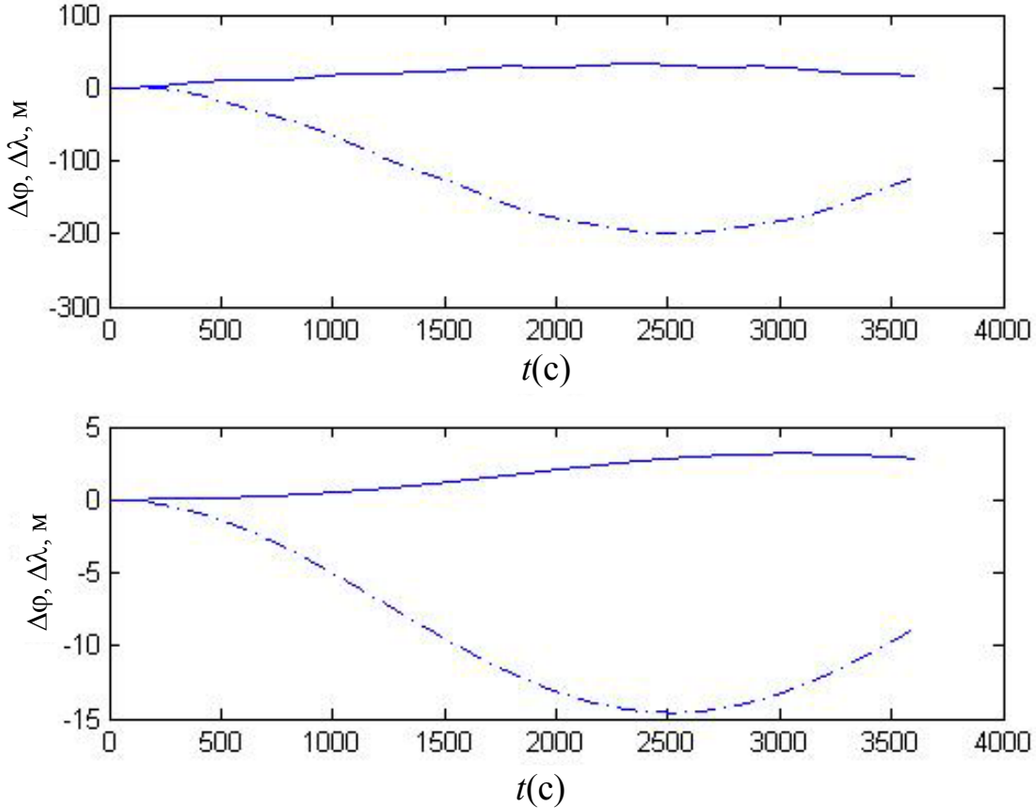

Рис. 2. Графики ошибок широты $\Delta\varphi$ и долготы $\Delta\lambda$ (верхний график соответствует случаю $\dot{\psi} = 1{,}01$ рад/с, нижний график – случаю $\dot{\psi} = 1{,}1$ рад/с)

Таким образом, моделирование регулярной прецессии показало, что значительные навигационные ошибки могут возникать только в том случае, когда соблюдается необходимая связь между угловыми частотами с достаточно большой степенью точности. Очевидно, что в условиях эксплуатации БИНС такие движения маловероятны.

Заключение

В статье установлены периодические движения БИНС, для которых рассинхронизация в измерительных трактах ДУС порядка микросекунды приводит к существенным приведенным дрейфам блока ДУС. Данный вывод подтверждается совпадением результатов аналитических расчетов и результатов математического моделирования. Установленные движения легко реализуемы на поворотных стендах. Моделирование позволяет выявить значительную чувствительность приведенного дрейфа к отклонению от установленных движений. Это дает возможность предположить, что при выполнении произвольных движений, не имеющих точных периодов, задержка порядка микросекунды не должна существенно влиять на навигационное решение. Моделирование на реальных траекторных данных может быть предметом отдельного исследования.

Литература

1. Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. – 136 с.

2. Емельянцев Г. И., Степанов А. П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации // Под общей ред. акад. РАН В. Г. Пешехонова – СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. – 394 с.

3. Кухтевич С. Е., Рафельсон В. Ф., Фомичев А. В. О погрешностях БИНС, обусловленных несинхронностью трактов измерения угловых скоростей и линейных ускорений и геометрией блока акселерометров // Труды МИЭА. 2011. Выпуск 3. С. 86-95.

4. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001, 320 с.

5. Богданов О. Н., Голован А. А. Об имитации идеальных показаний датчиков БИНС при произвольном движении объекта // Труды МИЭА. 2013. Выпуск 7. С. 30-35.

УДК 621.391.14

РАСШИРЕНИЕ АЛГОРИТМОВ БИНС ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЯРНОЙ НАВИГАЦИИ

О. А. БАБИЧ, *д. т. н., профессор*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Прямоугольные координаты в системе ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed) не имеют особых точек в околоземном пространстве и поэтому могут быть использованы как основные для навигации в полярных зонах Земли.

В статье предлагается алгоритм для вычисления прямоугольных координат в виде дополнительной части к базовому алгоритму БИНС, который рутинно работает от взлета и до посадки.

На основании вычисления текущих прямоугольных координат самолета в полярных областях строится закон управления, обеспечивающий навигацию самолета по принципу «из точки в точку».

Ключевые слова: *полярная навигация, Бесплатформенная Инерциальная Навигационная Система (БИНС), акселерометр, гироскоп, режим ГПК (Wander Azimuth), стереографическая проекция.*

THE EXTENSION OF THE SINS ALGORITHM FOR THE POLAR NAVIGATION

O. A. BABICH, *D. Sc. in Engineering, professor*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed) rectangular coordinate system doesn't have any singular points in the near-Earth space, therefore it can be used as basic one for navigation in Polar regions.

The article describes a new algorithm for ECEF-coordinates calculation. This algorithm is the supplement to the base SINS-algorithm, which operates in its normal mode from take-off to landing.

In Polar regions the aircraft control law is realized by means of continuous calculating of ECEF-coordinates. The developed control low provides flights based on the 'from point to point' navigation.

Keywords: *Polar navigation, Strapdown Inertial Navigation System (SINS), accelerometer, gyro, Wander Azimuth, stereographic projection.*

Постановка задачи

Цель данной работы состоит в расширении базового алгоритма БИНС таким образом, чтобы использовать БИНС в виде основного навигационного средства не только на средних широтах, но и в полярных районах Земли.

Предлагаемые новые дополнительные алгоритмы БИНС решают задачу навигации и управления самолетом в полярных регионах, когда внутри этих регионов необходимо реализовывать сложные траектории типа полетов «из точки в точку». Эти же алгоритмы обеспечивают и непрерывную работу БИНС при пересечении полярной области в дальнем полете. В этом случае БИНС работает до подлета к полярной области в основном режиме, далее при перелете над полярной областью работает параллельно в основном и специальном режимах и снова, по непрерывности, работает в основном режиме после ее покидания. Таким образом, непрерывная работа БИНС в ее основном режиме обеспечивается здесь от взлета и до посадки при всевозможных траекториях полета.

В работе дается вывод новых математических соотношений в виде непрерывного алгоритма для счисления (Dead Reckoning) текущих значений земных декартовых координат летательного аппарата. Эти координаты являются невырожденными и унитарными во всех точках околоземного пространства. Они позволяют решить задачу курсовой навигации «из точки в точку» в полярных регионах.

Введение

В данной статье применяются следующие обозначения и символика.

а) Координатные трехгранники (Frames) будут обозначаться буквами: B (Body), N (Navigation), N_{geo} (Geodetic), E (Earth) и I (Inert). Оси XB, YB, ZB трехгранника B совпадают с осями самолета (рис. 1.1а). Оси трехгранников N, N_{geo}, E и I изображены на рис. 1.1. Заметим, что на рис. 1.1 направления осей и буквенные обозначения выбраны традиционным для отечественной авиационной и геодезической литературы образом. Кроме того, по традиции курсовые углы и азимуты будут отсчитываться по часовой стрелке в горизонтальной плоскости от направления на Север (YN_{geo}) (рис. 1.1в), а гироскопический курс $\psi_Г$ самолета отсчитывается по часовой стрелке от оси YN, которая рассматривается как курсовая черта «аналитической платформы».

б) Произвольный вектор $\overline{r}$ в проекциях на оси трехгранника A будет записываться в виде $\overline{r}^A = \left(\overline{r}\cdot X\overline{A}, \overline{r}\cdot Y\overline{A}, \overline{r}\cdot Z\overline{A}\right)^T = \left(r_{XA}, r_{YA}, r_{ZA}\right)^T$. Вектор $\overline{R}^E$ текущего местоположения самолета в Земных декартовых координатах

будем для краткости записывать в виде $\overline{R}^E = \left(R_{XE}, R_{YE}, R_{ZE}\right)^T = \left(X_E, Y_E, Z_E\right)^T$.

в) Угловая скорость «подвижного» трехгранника *B* относительно «закрепленного» трехгранника *A*, взятая в проекциях на трехгранник *D*, будет записываться в виде $\overline{\omega}_{AB}^D$.

г) Ортогональная матрица перехода от трехгранника *A* к трехграннику *B* будет иметь обозначение C_A^B так, что $\overline{r}^B = C_A^B \overline{r}^A$. Элементы матрицы C_A^B будем обозначать $c_{ij}(AB)$.

д) Единичный вектор (орт) произвольного вектора $\overline{r}$ в проекциях на трехгранник *A* будет обозначаться $\overline{u}_{\overline{r}}^A$ так, что $u_{\overline{r}}^A = \frac{1}{|\overline{r}|} \cdot \overline{r}^A$.

е) матрица векторного умножения для вектора $\overline{r}^A$ будет иметь вид:

$$(\overline{r}^A \times) = \begin{pmatrix} 0 & -r_{ZA} & r_{YA} \\ r_{ZA} & 0 & -r_{XA} \\ -r_{YA} & r_{XA} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

В статье рассматривается наиболее распространенный тип БИНС, когда «аналитическая платформа» (или, другими словами, навигационный трехгранник XN, YN, ZN (рис. 1.1б) вращается относительно вертикальной оси $\overline{u}_{ZN}^N$ в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\overline{\omega}_{IN}^N \cdot \overline{u}_{ZN}^N = \Omega \sin B$. Известно, что вертикальная угловая скорость «платформы» относительно Земли при этом [1, 2, 3] будет тождественно равна нулю $\overline{\omega}_{EN}^N \cdot \overline{u}_{ZN}^N = 0$. Тогда говорят, что БИНС работает в режиме ГПК (гирополукомпаса, Directional Gyro) или, что тоже самое, в режиме Wander Azimuth. БИНС только такого типа будут рассматриваться в данной статье.

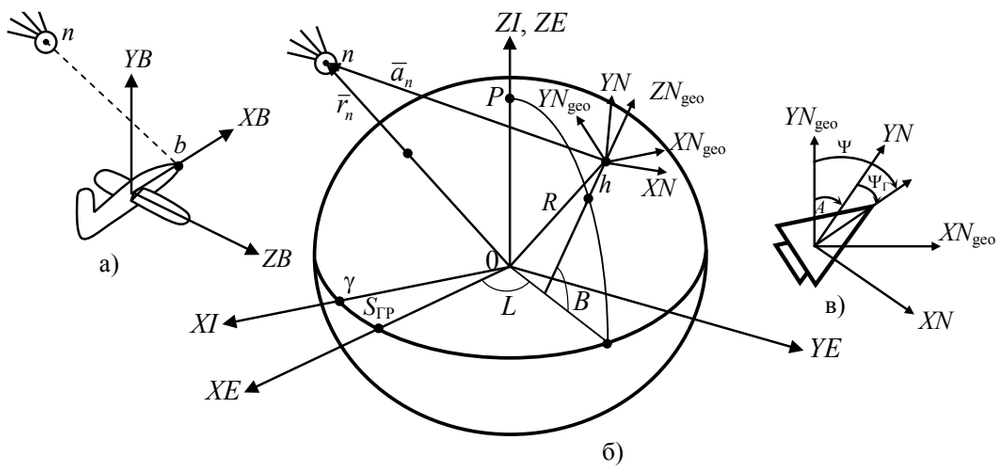

Рис. 1.1. Навигационные трехгранники и отсчеты углов

Теория БИНС с азимутальным управлением платформы по типу Wander Azimuth (Directional Gyro, ГПК) полностью разработана и подробно изложена в современной учебной литературе [1, 2. 3]. Именно такие системы получили наибольшее распространение на практике. Базовый (основной) алгоритм у БИНС этого типа имеет вид, когда на его входе имеют место сигналы гироскопов $\overline{\omega}_{IB}^B(t)$ и сигналы акселерометров $\overline{a}_{SF}^B(t)$, а на выходе имеют место: 1) матрица позиционирования $C_N^E(t)$, 2) вектор скорости $\overline{V}^N(t)$, заданный в навигационном трехграннике *N*, и 3) матрица ориентации $C_B^N(t)$.

Условно базовый алгоритм может быть представлен в виде:

$$\left\{\overline{\omega}_{IB}^B(t), \overline{a}_{SF}^B(t)\right\} \Rightarrow \left\{C_N^E(t), \overline{V}^N(t), C_B^N(t)\right\}. \qquad (1.2)$$

Известно [1, pp 5-19,5-22; 2, pp 3-3,3-4; 3, стр. 264], что базовый алгоритм Wander Azimuth БИНС представляется в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений и состоит из трех основных частей, включающих в себя:

1) Алгоритм позиционирования

$$\dot{C}_N^E = C_N^E\left(\overline{\omega}_{EN}^N \times\right), \quad C_N^E = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \quad \xi = \left(1 - e^2 u_{33}^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad M = a\left(1 - e^2\right)\xi^3 + h, \quad N = a\xi + h, \quad \delta = ae^2\xi^3 M^{-1} N^{-1}, \qquad (1.3)$$

$$\overline{\omega}_{EN}^N = \begin{pmatrix} \omega_{EN}^{XN} \\ \omega_{EN}^{YN} \\ \omega_{EN}^{ZN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{32}u_{31} \cdot \delta & \left(-u_{32}^2 \cdot \delta - \frac{1}{N}\right) & 0 \\ \left(u_{31}^2 \cdot \delta + \frac{1}{N}\right) & u_{31}u_{32} \cdot \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{XN} \\ V_{YN} \\ V_{ZN} \end{pmatrix}.$$

В соотношениях (1.3) элементы $c_{ij}(NE)$ матрицы C_N^E для краткости обозначены символами u_{ij}, т. е. $c_{ij}(NE) = u_{ij}$. Этот вид обозначения элементов матрицы C_N^E будем употреблять для краткости и далее.

2) Алгоритм вычисления скорости

$$\dot{\overline{V}}^N = C_B^N \overline{a}_{SF} + \overline{g}^N - \overline{\omega}_{IE}^N \times \left(\overline{\omega}_{IE}^N \times \overline{R}^N\right) - \left(2\overline{\omega}_{IE}^N + \overline{\omega}_{EN}^N\right) \times \overline{V}^N,$$

$$\overline{\omega}_{IE}^N = \left(C_N^E\right)^T \overline{\omega}_{IE}^E, \quad \omega_{IE}^{XN} = \omega_E u_{31}, \quad \omega_{IE}^{YN} = \omega_E u_{32}, \quad \omega_{IE}^{ZN} = \omega_E u_{33}. \qquad (1.4)$$

3) Алгоритм ориентации

$$\dot{C}_B^N = C_B^N\left(\overline{\omega}_{IB}^B \times\right) - \left(\overline{\omega}_{IN}^N \times\right) C_B^N, \quad \overline{\omega}_{IN}^N = \overline{\omega}_{IE}^N + \overline{\omega}_{EN}^N. \qquad (1.5)$$

Дифференциальные уравнения (1.3, 1.4, 1.5) объединяются в одну общую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, фазовыми координатами которой являются элементы двух матриц и одного вектора $C_N^E, \overline{V}^E, C_B^N$. Правые части этой системы, как непосредственно видно из (1.3 – 1.5), являются непрерывными функциями от фазовых координат. При этом непрерывность правых частей имеет место для всех точек околоземного пространства, включая и точки двух полюсов.

Непрерывность правых частей доказывает существование решения для основного алгоритма (1.3 – 1.5) на всевозможных траекториях полета, в том числе на траекториях, включающих в себя полярные участки, если они имеются на маршруте.

Непрерывность алгоритма, записанного в форме (1.3, 1.4, 1.5), или, иными словами, его всеширотность, специально оговаривается в работах [1, 2, 3].

Формы представления выходной навигационной информации на средних и полярных широтах

Исчерпывающая навигационная информация для всех точек околоземного пространства заключена в следующих математических величинах: матрице позиционирования C_N^E, векторе скорости $\overline{V}^N$ и матрице ориентации C_B^N. На любой траектории, в том числе и на траектории, пересекающей полярные районы, эти величины существуют как математические понятия и изменяются на траектории непрерывно.

Матрица C_N^E может быть выражена [1, 2, 3] для средних широт $\left(|B| < 78^\circ\right)$ через Эйлеровы углы навигации (B, L, A) (рис.1.1):

$$C_N^E = \begin{pmatrix} -\sin L\cos A + \sin B\cos L\sin A & -\sin L\sin A - \sin B\cos L\cos A & \cos L\cos B \\ \cos L\cos A + \sin B\sin L\sin A & \cos L\sin A - \sin B\sin L\cos A & \sin L\cos B \\ -\cos B\sin A & \cos B\cos A & \sin B \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

$$B = \operatorname{arctg}\frac{c_{33}(NE)}{\sqrt{c_{31}^2(NE) + c_{32}^2(NE)}}[-\pi/2, \pi/2],$$

$$L = \operatorname{arctg}\frac{c_{23}(NE)}{c_{13}(NE)}[-\pi, \pi], \qquad A = \operatorname{arctg}\frac{-c_{31}(NE)}{c_{32}(NE)}[0, 2\pi]. \qquad (2.2)$$

Матрица ориентации C_B^N для всех точек околоземного пространства (при условии, что угол тангажа ϑ не равен $\pm 90^\circ$ ($\vartheta \neq \pm 90^\circ$) выражается через Эйлеровы углы ориентации $\psi_\Gamma, \vartheta, \gamma$:

$$C_B^N = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\sin\psi_\Gamma & \sin\gamma\cos\psi_\Gamma - \sin\psi_\Gamma\cos\gamma\sin\vartheta & \cos\gamma\cos\psi_\Gamma + \sin\psi_\Gamma\sin\gamma\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\psi_\Gamma & -\sin\gamma\sin\psi_\Gamma - \cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi_\Gamma & -\sin\psi_\Gamma\cos\gamma + \cos\psi_\Gamma\sin\gamma\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\gamma\cos\vartheta & -\sin\gamma\cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

$$\psi_\Gamma = \operatorname{arctg}\frac{c_{11}(BN)}{c_{21}(BN)}[0, 2\pi],$$

$$\upsilon = \operatorname{arctg}\frac{c_{31}(BN)}{\sqrt{c_{32}^2(BN) + c_{33}^2(BN)}}[-\pi/2, \pi/2], \qquad (2.4)$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{-c_{33}(BN)}{c_{32}(BN)}[-\pi, \pi].$$

Вычисление текущих значений прямоугольных Земных координат самолета $\overline{R}^E = \left[X_E(t), Y_E(t), Z_E(t)\right]^T$ может быть проведено на основании текущего значения матрицы $C_N^E(t)$. Известно [3], что прямоугольные координаты имеют представления в виде:

$$X_E = (a\xi + h)\cos B\cos L,\ Y_E = (a\xi + h)\cos B\sin L,\ Z_E = \left[a\xi\left(1 - e^2\right) + h\right]\sin B.$$

В таком случае, с учетом (2.3), они могут быть вычислены по формулам:

$$\xi(u_{33}) = \left(1 - e^2 u_{33}^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad X_E = (a\xi + h)u_{13},\ Y_E = (a\xi + h)u_{23},\ Z_E = \left[a\xi\left(1 - e^2\right) + h\right]u_{33}, \qquad (2.5)$$

где $u_{ij} = c_{ij}(NE)$.

Соотношения (2.5), объединенные с базовым алгоритмом (1.3, 1.4, 1.5), представляют собой полный алгоритм счисления (Dead Reckoning) прямоугольных координат $X_E(t), Y_E(t), Z_E(t)$ самолета. Этот алгоритм не имеет вырожденных точек на всей поверхности Земли, а сами координаты X_E, Y_E, Z_E тоже не имеют вырождения в околоземном пространстве.

Объединенный алгоритм (1.3 – 1.5, 2.5) может трактоваться как переход от матрицы позиционирования C_N^E к навигационным координатам, заданным в форме (X_E, Y_E, Z_E), т. е.

$$C_N^E \Rightarrow (X_E, Y_E, Z_E). \qquad (2.6)$$

Переход (2.6) является всеширотным. Для сравнения, переход (2.2) в виде $C_N^E \Rightarrow (B, L, A)$ справедлив только для средних широт.

Информация о прямоугольных координатах X_E, Y_E, Z_E не используется для решения навигационных задач на средних широтах, а вот, как будет показано далее, знание текущих значений прямоугольных координат может быть положено в основу навигации в полярных районах.

Особенности представления матрицы ориентации C_N^E в полярных районах

Матрица ориентации C_N^E (2.1) в Северном полярном районе, когда

$$B \to \frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{\pi}{2} - \Delta B_n, \Delta B_n > 0, \ \sin B \approx 1, \quad \cos B = \sin \Delta B_n \approx \Delta B_n \qquad (3.1),$$

имеет вид:

$$C_N^E = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(A-L) & -\cos(A-L) & \Delta B_n \cos L \\ \cos(A-L) & \sin(A-L) & \Delta B_n \sin L \\ -\Delta B_n \sin A & \Delta B_n \cos A & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

$$\alpha_n = A - L, \quad 0 \le \alpha_n \le 2\pi, \quad \alpha_n = \operatorname{arctg}\frac{u_{22}}{u_{21}}[0, 2\pi] = \operatorname{arctg}\frac{u_{11}}{-u_{12}}[0, 2\pi].$$

Далее будет доказано, что несмотря на то, что величины A и L каждая по отдельности вырождаются в Северном полярном районе, величина их разности $\alpha_n = A - L \approx \text{const}$ не только не вырождается, но и остается постоянной величиной для всего времени полета внутри Северной полярной области.

Угол $\alpha_n = A - L$ изменяется по часовой стрелке, так как составляющие его углы A и $(-L)$ изменяются по часовой стрелке. В соответствии с (3.2) для всего диапазона его изменения $[0, 2\pi]$ с учетом квадрантов он может быть подсчитан по формуле:

$$u_{21} = \cos\alpha_n, u_{22} = \sin\alpha_n, s_1 = \operatorname{sign}[u_{21}], s_2 = \operatorname{sign}[u_{22}],$$
$$\alpha_n = \operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}[0, 2\pi] = s_1 s_2 \operatorname{arctg}\frac{|u_{22}|}{|u_{21}|} + \pi\left[1 - \frac{s_2(1+s_1)}{2}\right]. \qquad (3.3)$$

Далее с помощью геометрического рассмотрения движений в Северной полярной области будет доказано, что α_n – это угол между плоскостью Гринвичского меридиана и курсовой чертой YN «платформы».

Для Южного полюса соответственно имеем:

$$B \to -\frac{\pi}{2}, B = -\frac{\pi}{2} + \Delta B_s, \Delta B_s > 0, \quad \sin B \approx -1, \quad \cos B \approx \Delta B_s,$$

$$C_N^E = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(A+L) & \cos(A+L) & \Delta B_s \cos L \\ \cos(A+L) & \sin(A+L) & \Delta B_s \sin L \\ -\Delta B_s \sin A & \Delta B_s \cos A & -1 \end{pmatrix}, \qquad (3.4)$$

$$\alpha_s = A + L, \quad 0 \le \alpha_s \le 2\pi, \quad \alpha_s = \operatorname{arctg}\frac{u_{22}}{u_{21}}[0, 2\pi],$$

$$\alpha_s = s_1 s_2 \operatorname{arctg}\frac{|u_{22}|}{|u_{21}|} + \pi\left[1 - \frac{s_2(1+s_1)}{2}\right], \quad s_1 = \operatorname{sign}[u_{21}], s_2 = \operatorname{sign}[u_{22}].$$

Далее будет доказано, что несмотря на то, что в Южном полярном районе величины A и L по отдельности вырождаются, величина их суммы $\alpha_s = A + L = \text{const}$, не только не вырождается, но и остается постоянной на все время полета внутри Южной полярной области. Угол α_s изменяется по часовой стрелке, т. к. в Южной полярной зоне составляющие углы A и L изменяются по часовой стрелке.

Из сопоставления аналитических соотношений (3.2) и (3.4) видно, что они имеют принципиальные различия. По этой причине геометрическое рассмотрение решаемых задач для Северной и Южной области далее приходится вести раздельно.

Решение курсовой задачи для Северной полярной зоны

Рассмотрим решение навигационной задачи «полет из точки в точку» для Северной полярной зоны. Для этого введем в рассмотрение плоскость $P_n xy$, которая проходит через Северный полюс P_n и параллельна плоскости Земного экватора (рис. 4.1), при этом ее координатные оси x и y параллельны экваториальным осям XE, YE.

Плоскость $P_n xy$ с высокой степенью точности может рассматриваться как референцная плоскость для стереографической проекции Северного полярного региона. За центр этой стереографической проекции принимается точка O центра Земли. Предполагается, что на проекцию $P_n xy$ наблюдатель смотрит «сверху вниз», т. е. для Северной полярной зоны (рис. 4.1) по стрелке D_n.

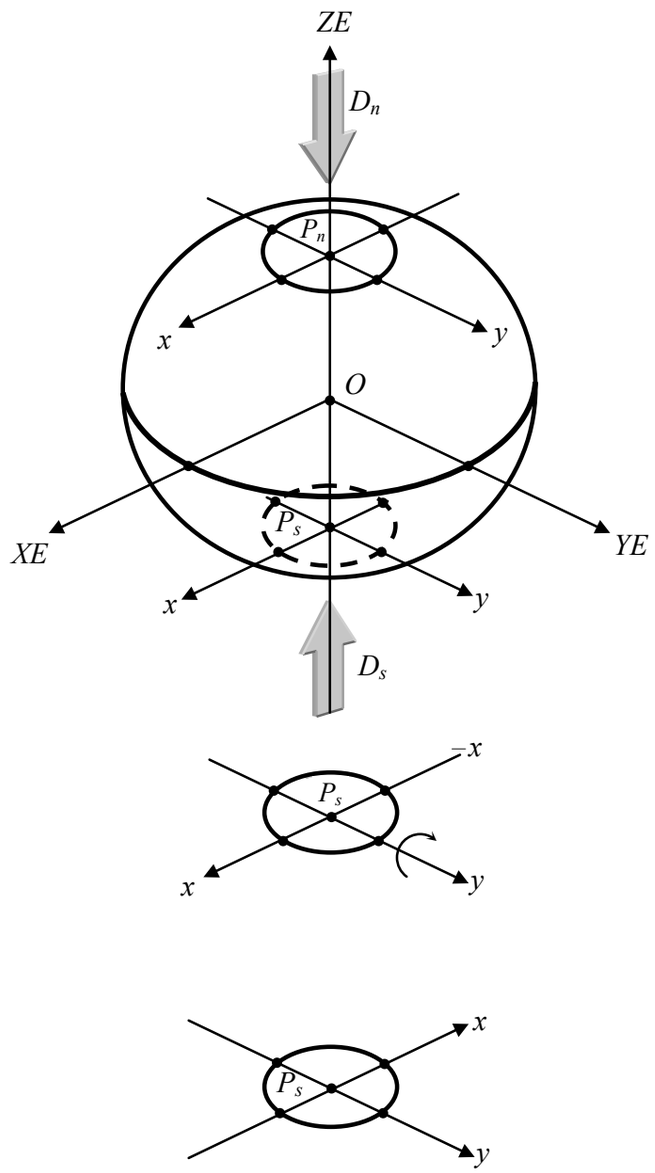

Рис. 4.1. Системы полярных координат $P_n xy$ и $P_s xy$ в полярных зонах

Каждая точка, расположенная в околоземном пространстве, может быть спроектирована на плоскость $P_n xy$ путем переноса, осуществляемого параллельно оси OZE в ее положительном направлении. При этом декартовы координаты (x, y) проекции для любой точки, естественно, будут равны:

$$x = X_E, \quad y = Y_E. \tag{4.1}$$

Проекции (x, y) (4.1) можно рассматривать как стереографические только для точек, расположенных близко к Северному полюсу, когда широта этих точек удовлетворяет условию $B > 78^\circ$. Для точек полярного региона прямая на плоскости $P_n xy$, соединяющая две точки, будет являться следом Большого круга, плоскость которого проходит через две исходные точки на Земле и центр Земли.

Дадим теперь геометрическую формулировку для поставленной задачи навигации в Северной полярной зоне.

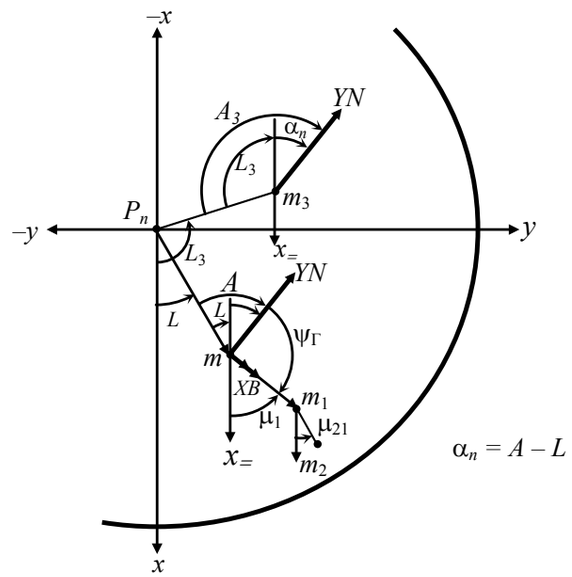

Рис. 4.2. Геометрия движения в Северной полярной зоне

Пусть самолет (рис. 4.2) находится в точке m с координатами $m(x, y)$ и ему надлежит сначала двигаться в точку $m_1(x_1, y_1)$, а далее в точку $m_2(x_2, y_2)$. Предполагается, что самолет оборудован БИНС типа Wander Azimuth, которая выдает текущие значения $C_N^E(t)$ и $\psi_\Gamma(t)$. Требуется найти математическое выражение для закона управления, обеспечивающего движение самолета по линии mm_1. (Решение задачи о дальнейшем движении по линии $m_1 m_2$ будет, конечно, носить аналогичный характер).

Рассмотрим рис. 4.2. Единичный вектор YN с его началом в точке m, изображенный на рис. 4.2, представляет собой горизонтальную курсовую черту «аналитической платформы» самолета, находящегося в точке m. Свойства движения вектора YN (рис. 1.1, рис. 4.2) на плоскости $P_n xy$, или другими словами, свойства азимутального движения «платформы» при движении самолета по траектории $m[x(t), y(t)]$ имеют важное значение для развиваемой далее теории полярной навигации.

Рассмотрим свойства этого вектора.

В силу выбранного способа азимутальной коррекции «аналитической платформы» (ГПК, Wander Azimuth) вертикальная угловая скорость платформы относительно Земли все время движения самолета и во всех точках его траектории равна нулю

$$\omega_{EN}^{ZN} = 0\,. \tag{4.2}$$

Это означает, что единичный вектор *YN* при произвольных движениях его начальной точки $m(x, y)$ внутри полярной зоны (рис. 4.2) будет двигаться плоско-параллельно, т. е. в любой точке (x, y) чертежа (рис. 4.2) он будет иметь одно и тоже направление относительно осей $P_n x$ и $P_n y$. Так, например, вектор *YN* при перемещении из точки $m_1(x_1, y_1)$ (рис.4.1) в точку $m_3(x_3, y_3)$ по произвольной траектории не изменяет своего исходного направления. Естественно, угол $\alpha_n = A - L$ (рис. 4.2), заключенный между координатной осью $-x$ и невращающимся вектором *YN*, должен быть величиной постоянной:

$$\alpha_n[x(t), y(t)] = \text{const} \quad (\text{по } x,\ y,\ t), \tag{4.3}$$

если траектория не выходит из полярной зоны.

Величина угла $\alpha_n = A - L = \text{const}$ (4.3) относится к конкретному полету. В другом полете при входе в полярную зону вектор *YN* может иметь другое направление в плоскости *Pxy* и сохранять уже другое значение α_n исходного направления до выхода из полярной зоны.

Как видим, угол α_n носит ситуативный характер. Его величина разнится от полета к полету, но в течение данного полета, заключенного внутри полярной зоны, он остается постоянным.

Из геометрических построений (рис. 4.2) следует, что угол α_n вектора *YN* измеряется от координатной оси $-x$, а за положительное направление принимается движение по часовой стрелке, при этом α_n изменяется в пределах

$$0 \le \alpha_n < 2\pi\,. \tag{4.4}$$

Текущее значение угла $\alpha_n(t)$ вычисляется по формуле (3.2).

Введем теперь угол μ_{21} (рис. 4.2), задающий направление из точки m_1 в точку m_2. По нашему определению это будет угол между осью x и направленным отрезком $m_1 m_2$, он отсчитывается от оси x (рис. 4.2) против часовой стрелки и будет вычисляться так:

$$\mu_{21} = \operatorname{arctg}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}[0, 2\pi] = s_1 s_2 \operatorname{arctg}\frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} + \pi\left[1 - \frac{s_2(1 + s_1)}{2}\right], \tag{4.5}$$

где $s_1 = \operatorname{sign}(x_2 - x_1)$, $s_2 = \operatorname{sign}(y_2 - y_1)$, $0 \le \mu_{21} \le 2\pi$.

Угол, задающий направление от текущей точки $m[x(t), y(t)]$ местоположения самолета на фиксированную *i*-ую промежуточную точку $m_i(x_i, y_i)$ маршрута, будем обозначать μ_i (см. на рис. 4.2 угол μ_1, $i = 1$). Этот угол:

$$\begin{gathered}\mu_i = \operatorname{arctg}\frac{y_i - y}{x_i - x}[0, 2\pi] = s_1 s_2 \operatorname{arctg}\frac{|y_i - y|}{|x_i - x|} + \pi\left[1 - \frac{s_2(1 + s_1)}{2}\right], \\ s_1 = \operatorname{sign}(x_i - x), \quad s_2 = \operatorname{sign}(y_i - y).\end{gathered} \tag{4.6}$$

Из геометрических построений, представленных на рис. 4.2, следует равенство

$$\alpha_n + \psi_{\Gamma_1} + \mu_1 = \pi, \quad \alpha_n = A - L$$

или

$$\psi_{\Gamma_1} = \pi - \alpha_n - \mu_1 \pm k \cdot 2\pi, \quad 0 \le \psi_{\Gamma_1} \le 2\pi.$$

Член $\pm k \cdot 2\pi$ добавлен для приведения угла ψ_{Γ_1} к виду, когда $0 \le \psi_{\Gamma_1} \le 2\pi$.

Для общего случая, на *i*-ом отрезке маршрута имеем

$$\psi_{\Gamma_i} = \pi - \alpha_n - \mu_i \pm k \cdot 2\pi. \tag{4.7}$$

Формула (4.7) является искомым законом управления, обеспечивающим движение самолета по линии mm_i в Северной полярной области.

Дадим необходимые пояснения.

В соответствии с (4.7) управление самолетом в горизонтальной плоскости должно осуществляться таким образом, чтобы текущее значение гироскопического курса самолета $\psi_\Gamma(t)$ на *i*-том отрезке маршрута стремилось к заданному значению (4.7) ψ_{Γ_i} на этом отрезке:

$$\psi_\Gamma(t) \to \psi_{\Gamma_i}\,. \tag{4.8}$$

Величина текущего гироскопического курса $\psi_\Gamma(t)$ в (4.8) является для БИНС стандартным выходным сигналом (2.4), а величина заданного значения ψ_{Γ_i} вычисляется по формулам (2.5), (3.3), (4.1), (4.6) и (4.7).

В заключение этого пункта отметим, что для полетов в Северной полярной зоне прямоугольная сетка координат с отсчетом курсовых углов от следа Гринвичского меридиана применялась на практике начиная с 1940-х годов [4].

Решение курсовой задачи для Южной полярной зоны

Геометрия навигации в Южной полярной зоне представлена на рис. 4.1 и 5.1.

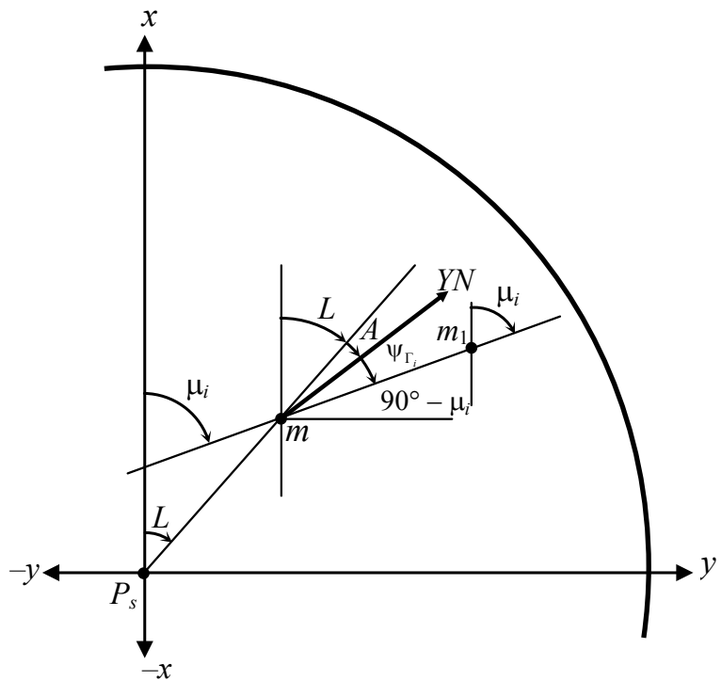

Рис. 5.1. Геометрия движения в Южной полярной зоне

Из этих геометрических построений вытекают соотношения

$$x = X_E,$$

$$y = Y_E, \quad \mu_i = s_1 s_2 \operatorname{arctg}\frac{|y_i - y|}{|x_i - x|} + \pi\left[1 - \frac{s_2(1+s_1)}{2}\right], \quad A + L + \psi_\Gamma + 90^\circ - \mu_i = 90^\circ,$$

$$\alpha_s = (L + A) = \text{const}, \quad \alpha_s + \psi_{\Gamma_i} - \mu_i = 0, \quad \psi_{\Gamma_i} = -\alpha_s + \mu_i \pm k \cdot 2\pi. \tag{5.1}$$

Из (5.1) получаем закон курсового управления в Южной полярной зоне

$$\psi_{\Gamma_i} = (-\alpha_s + \mu_i \pm k \cdot 2\pi), \quad \psi_{\Gamma_i} \in [0, 2\pi], \quad \psi_\Gamma(t) \to \psi_{\Gamma_i}, \tag{5.2}$$

где угол α_s вычисляется по формуле (3.4), а угол μ_i — по формуле (5.1).

Пересечение полярной зоны в дальнем полете

Предположим, что самолет в дальнем полете на каком-то этапе маршрута должен двигаться по ортодромии $RrsS$ (рис. 6.1), которая пересекает полярную зону на отрезке *rs*. При этом ясно, что кусок *rs* — непрерывная часть большой ортодромии $RrsS$. Предполагается также, что крайние точки *R* и *S* лежат вне полярной зоны.

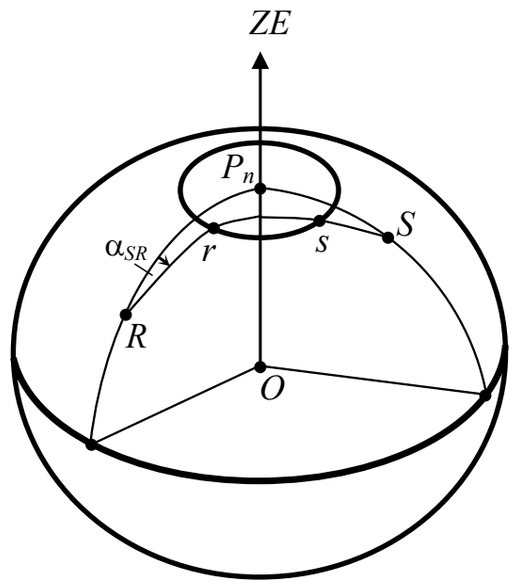

Рис. 6.1. Пересечение полярной зоны в дальнем полете

Известно [3], что полет по ортодромии курсовым методом осуществляется следующим образом.

Для начальной точки *R* ортодромии $RrsS$ рассчитывается исходный курсовой угол α_{SR}, который является функцией от географических координат конечной точки $S(B_S, L_S)$ и географических координат начальной точки $R(B_R, L_R)$ ортодромии. Пример такого расчета дается в [3, стр. 105]. Вычисление угла α_{SR} может производиться как перед полетом, так и оперативно в полете.

Если при пролете исходной точки *R* азимут «аналитической платформы» равен $A(R)$, то дальнейшее следование по ортодромии $RrsS$ осуществляется путем выдерживания гироскопического курса ψ_Γ постоянным и равным

$$\psi_{\Gamma_{SR}} = \alpha_{SR} - A(R) = \text{const}, \quad \psi_\Gamma \to \psi_{\Gamma_{SR}}. \tag{6.1}$$

Обоснование закона управления (6.1) для обеспечения движения самолета по ортодромии (геодезической линии) *RS* вытекает из следующих рассуждений. Известно [3], что азимут $\alpha_{SR}(t)$ ортодромии изменяется по закону:

$$\dot{\alpha}_{SR} = \frac{V_{East}}{N}\mathrm{tg}B, \quad \alpha_{SR}(t_0) = \alpha_{SR}(R). \tag{6.2}$$

Курс самолета $\psi(t) = A(t) + \psi_\Gamma(t)$, *при* $\psi_\Gamma = \mathrm{const}$ изменяется по тому же закону (6.2), в начальной точке *R* курс и азимут ортодромии совпадают:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{V_{East}}{N}\mathrm{tg}B, \quad \psi(R) = \alpha_{SR}(R).$$

Таким образом $\psi(t) \equiv \alpha_{SR}(t)$, т. е. угол курса самолета во всех точках ортодромии *RrsS* совпадает с азимутом ортодромии в этой точке, что и обеспечивает движение самолета по ортодромии курсовым методом.

Это и доказывает состоятельность закона управления (6.1).

Заметим, что управление по закону (6.1) проводится на основании использования только базового алгоритма (1.3, 1.4, 1.5, 2.4). Это возможно в силу невырожденности этого алгоритма во всех точках околоземного пространства.

Возможно также применение разработанных здесь специальных алгоритмов (4.7) и (5.2). Для этого точку *s* (рис. 6.1), выхода траектории *RrsS* из полярной зоны, нужно принять равной точке $m_s(x_s, y_s)$ (рис. 4.2, 5.2), координаты которой равны:

$$x_s = X_{Es}, \quad y_s = Y_{Es},$$

где X_{Es}, Y_{Es} – прямоугольные земные координаты (2.5) точки *s*.

Далее с помощью законов управления (4.7) или (5.2) обеспечить стремление самолета в эту точку.

Замечание о способе комплексирования БИНС и СРНС в полярных областях

В полярных областях невозможно сравнение позиционных и скоростных показаний БИНС и СРНС в терминах $L, B, h,\ V_{North}, V_{East}, V_{Up}$ (рис. 1.1), так как указанные величины не существуют как понятия в этих областях.

По этой причине при построении фильтра Калмана предлагается вести сравнение для позиционных сигналов в терминах X_E, Y_E, Z_E, а сравнение для скоростных сигналов в терминах $\dot{X}_E, \dot{Y}_E, Z_E$. Заметим, что сигналы

$$(X_E, Y_E, Z_E) \quad \text{и} \quad (\dot{X}_E, \dot{Y}_E, \dot{Z}_E) \tag{7.1}$$

являются внутренними операционными сигналами СРНС [3], т. е. не требуют каких-либо дополнительных вычислений. Тем не менее для вычисления перечисленных сигналов (7.1) необходимо иметь связь как минимум с четырьмя навигационными спутниками. В полярных областях возможно явление, когда число наблюдаемых спутников меньше четырех. Это требует вычисления временного окна, когда полет в навигационном отношении будет обеспечен наилучшим образом.

В целом полный алгоритм Калмана, построенный на идеях использования прямоугольных координат самолета, требует, конечно, детальной проработки.

Выводы по работе

1. Для БИНС разработан новый алгоритм позиционирования, когда ее выходными позиционными сигналами являются Земные прямоугольные координаты $X_E(t), Y_E(t), Z_E(t)$ самолета.

2. Доказано, что вычисление этих координат обладает свойством всеширотности, то есть не имеет вырождения ни в одной точке околоземного пространства. По этой причине указанные координаты могут быть использованы для определения местоположения самолета в полярных регионах Земли.

3. Предложенный новый алгоритм счисления не отменяет классического базового алгоритма БИНС, а работает параллельно с ним в полярных зонах, т. е. является дополнением к базовому алгоритму, который при этом непрерывно работает от взлета и до посадки.

4. Разработаны курсовые законы управления самолетом для обеспечения сложной навигации «из точки в точку» для маршрутов, лежащих внутри полярных областей Земли.

5. Разработан курсовой закон управления для случаев пересечения полярных областей в дальнем полете.

Литература

1. Savage P. G. Strapdown Analytics – Second Edition, Strapdown Associates, Inc., Maple Plane, Minnesota, 2007.

2. Savage P. G. Computational Elements for Strapdown Systems, Low Cost Navigation Sensors and Integration Technology, NATO RTO-EN-SET-116, October 2008.

3. Бабич О. А. Обработка информации в навигационных комплексах, – М. Машиностроение. 1991, – 512 с.

4. Maclure K. C. (1949) Polar Navigation , Arctic 2(3) 183-194.

5. Yi-qing Yao, Xiao-su Xu, Yao Li, Yi-ting Liu. Transverse Navigation under Ellipsoidal Earth Model and its Performance in both Polar and Nonpolar areas, The Journal of Navigation, Volume-69, Issue 2, March 2016, pp. 335-352.

УДК 629.7.05

АПЕРИОДИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. П. НИКОЛАЕВ, *д. ф.-м. н., профессор*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Рассматривается метод построения областей апериодической устойчивости (А-областей) линейных динамических систем. Анализируется геометрия А-областей на плоскости (в пространстве) коэффициентов характеристического полинома. Дается современная трактовка задачи Вышнеградского.

Ключевые слова: *апериодическая устойчивость, А-разбиение, граничная кривая, точка перегиба, касп.*

THE APERIODIC STABILITY OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Y. P. NIKOLAEV, *D. Sc. in Phys. and Math., professor*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The article considers a method for construction of linear dynamic systems aperiodic stability areas (A-areas). The A-areas geometry on the plane (in space) of characteristic polynomial coefficients is analyzed. The modern interpretation of the Vyshnegradsky problem is given.

Keywords: *aperiodic stability, A-partition, boundary curve, flex point, cusp.*

Введение

Построение областей устойчивости и анализ их геометрии — важная тема в теории автоматического управления. Граница области устойчивости в принципе может быть найдена путем многократного применения одного из критериев устойчивости (или по результатам моделирования) при различных значениях варьируемых параметров. Однако такой путь связан с большим объемом вычислений. Эффективным методом отыскания границ области устойчивости считается *D*-разбиение.

Рассмотрим линейную систему с характеристическим полиномом $a(s, k)$, зависящим от вектора параметров k. Граница области устойчивости в пространстве k находится среди решений уравнения

$$a\left(j\omega,k\right)=0, \quad \omega\in\left(-\infty,+\infty\right), \tag{1}$$

которое представляет собой отображение параметризованной мнимой оси (границы области устойчивости на плоскости корней) в пространство параметров.

В случае $k\in\mathrm{R}^2$ (или $k\in\mathrm{C}$), получаем два уравнения (для вещественной и мнимой части (1)) от двух переменных, которые в общем случае задают параметрическую кривую $k(\omega)$, $\omega\in(-\infty,+\infty)$, определяющую границу области устойчивости. Более того, кривая $k(\omega)$ делит плоскость на области с постоянным количеством устойчивых корней полинома $a(s, k)$. В этом и заключается основная идея *D*-разбиения.

В законченном виде *D*-разбиение было представлено Неймарком в 1948-49 гг. [1], который и ввел само название метода. В западной литературе эта техника впервые была описана Митровичем [2], он также предложил отображать на пространство параметров другие контуры на комплексной плоскости корней, а не только мнимую ось. Шильяк стал развивать этот метод, в его работах — parameter plane method [3].

Возможность применения метода *D*-разбиения для построения областей апериодической устойчивости (апериодичности) линейных систем рассмотрены, например, в [4].

Однако здесь имеются определенные сложности. В настоящей работе делается попытка решить эту задачу. Предполагается, что область апериодичности линейной системы рассматривается совместно с соответствующей областью устойчивости. Необходимость такого наглядного комплексного подхода диктуется сложившейся практикой проектирования систем управления. Впервые подобное решение для систем третьего порядка предложил Вышнеградский, который рассматривал кубический полином $a(s,k)=s^3+k_1s^2+k_2s+1$ с двумя коэффициентами k_1, k_2 в виде параметров.

Постановка задачи

Пусть задано характеристическое уравнение линейной непрерывной системы произвольного порядка

$$P(s)=a_0+a_1s+\ldots+a_ns^n=\sum_{i=0}^{n}a_is^n=0, \quad a_i\in\mathrm{R}\,\forall\, i=0,\ldots,n, \quad n\geq 1. \tag{2.1}$$

В дальнейшем, без снижения общности получаемых результатов, предполагается, что старший коэффициент характеристического полинома положителен: $a_n>0$.

Рассматривается многомерное пространство R_{n+1} коэффициентов характеристического уравнения. Пусть в нем построены: многомерная область асимптотической устойчивости $A^{(\mathrm{STAB})}$ (см. [6], [7]) и многомерная область апериодической устойчивости A. Выполним сечение указанных областей линейным многообразием $a_i>1$, $i=2, \ldots, n$ и спроектируем полученное сечение на координатную плоскость a_0, a_1 (может быть выбрана пара других коэффициентов). Получим область устойчивости и область апериодической устойчивости на плоскости a_0, a_1.

Ставится задача разработки численного метода построения области апериодической устойчивости $A^{(\varphi=0)}$.

Условия апериодической устойчивости

Аналитические условия апериодической устойчивости определяются следующим положением.

Теорема 3.1. Пусть $P(s)$ имеет только вещественные корни и $a_n\in R$. Тогда все a_k вещественны и

$$a_k^2\geq\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{n-k}\right)a_{k-1}a_{k+1}>a_{k-1}a_{k+1}, \quad k=1,\ldots,n-1. \tag{3.1}$$

При этом неравенство строгое, если все корни различны.

Этот результат, как отмечается в [8], впервые был получен Ньютоном (см. [9, теорема 51]) и многократно переоткрывался, в том числе Маклореном и Эйлером. Неравенство $a_k^2\geq a_{k-1}\,a_{k+1}$ иногда называется условием Де Гюа [10, раздел 508].

A-разбиение плоскости коэффициентов характеристического полинома

Полином называется *апериодическим*, если все корни вещественны и отрицательны [11]. Область в пространстве (на плоскости) коэффициентов полинома называется областью апериодической устойчивости (областью *апериодичности*), если каждой ее точке соответствует апериодический полином.

Рассмотрим *A*-разбиение плоскости коэффициентов a_0, a_1 характеристического полинома, предназначенное для построения и исследования области апериодической устойчивости.

Теорема 4.1. Кривая *A*-разбиения плоскости коэффициентов характеристического полинома описывается параметрическими уравнениями:

$$a_1 = 2a_2x - 3a_3x^2 + 4a_4x^3 - \ldots + (-1)^k k a_k x^{k-1}, \ k = 2,\ldots,n-1, \tag{4.1}$$

$$a_0 = a_2x^2 - 2a_3x^3 + 3a_4x^4 - \ldots + (-1)^k (k-1) a_k x^k, \ k = 2,\ldots,n. \tag{4.2}$$

Аналогичные уравнения можно получить для *A*-разбиения плоскости других коэффициентов характеристического полинома.

Для доказательства теоремы 4.1 воспользуемся алгебраическим критерием апериодичности, предложенного Фуллером [11, 12]. Предварительно сформируем из исходного полинома (2.1) следующий вспомогательный полином:

$$F(s) = P(s)\big|_{s=s^2} + s\,|_{s=s} \left.\frac{dP(s)}{ds}\right|_{s=s^2}. \tag{4.3}$$

Как показал Фуллер [11], необходимые и достаточные условия устойчивости такого полинома тождественны необходимым и достаточным условиям апериодической устойчивости исходного полинома. Преимущества такого подхода очевидны: для исследования апериодической устойчивости можно использовать хорошо отработанные методы анализа устойчивости. Конечно, это открывает разнообразные возможности для решения задачи. Недостаток — порядок полинома (4.3) примерно вдвое выше порядка исходного полинома (2.1).

Преобразуем полином (4.3):

$$F(s) = b_0 + b_1 s + \ldots + b_q s^q + \ldots, \tag{4.4}$$

где $b_{2q} = a_q, \quad b_{2q+1} = (q+1)a_q, \quad q = 0,1,2,\ldots$.

Выполним стандартную для теории управления процедуру. Подставим $s = j\omega$, $\omega \in [0,\infty)$ в характеристическое уравнение $F(s) = 0$.

Получим два следующих параметрических уравнения:

$$b_1 - b_3x + b_5s^5 + \ldots = 0, \tag{4.5}$$

$$b_0 - b_2x + b_4x^2 - \ldots = 0, \tag{4.6}$$

где $x = \omega^2$, $\omega \in [0,\infty)$.

После преобразования с учетом обозначения $x = \omega^2$ придем к искомым уравнениям (4.1), (4.2).

Отметим следующие свойства кривой, описываемой указанными параметрическими уравнениями.

Утверждение 4.1. Кривая $a_0 = a_0(a_1)$ имеет $(k-1)$ особых точек, для каждой из которых выполняется пара тождественных друг другу уравнений:

$$da_1 / d\omega = 2a_2x - 6a_3x^2 + 12a_4x^3 - \ldots + (-1)^k k(k-1)a_k x^{k-1} = 0, \tag{4.7}$$

$$da_0 / d\omega = 2a_2x - 6a_3x^2 + 12a_4x^3 - \ldots + (-1)^k k(k-1)a_k x^{k-1} = 0, \tag{4.8}$$

где $x = \omega^2$, $\omega \in [0,\infty)$.

Подчеркнем, что все корни уравнения $da_1 / d\omega = 0$ равны соответствующим корням уравнения $da_0 / d\omega = 0$.

Утверждение 4.2. Кривая $a_0 = a_0(a_1)$, описываемая уравнениями (5.1),(5.2), является гладкой (кусочно-гладкой) кривой.

Примечание. Граничная кривая является регулярной, т. к. для любой ее точки на плоскости a_0, a_1 она задается в окрестности этой точки уравнениями вида: $a_0 = a_0(\omega)$, $a_1 = a_1(\omega)$, где $a_0(\omega)$, $a_1(\omega)$ — дифференцируемые функции.

Это положение непосредственно следует из предыдущего утверждения.

Анализ геометрии области апериодической устойчивости на плоскости коэффициентов характеристического полинома

В данной работе для анализа геометрии области апериодической устойчивости ограничимся случаем $n \le 4$. Уравнения (4.1), (4.2) при этом имеют вид:

$$a_1 = 2a_2x - 3a_3x^2 + 4a_4x^3, \tag{5.1}$$

$$a_0 = a_2x^2 - 2a_3x^3 + 3a_4x^4. \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. Необходимое и достаточное условие отсутствия точек самопересечения граничной кривой области апериодической устойчивости на плоскости коэффициентов a_0, a_1 при $n=4$:

$$a_2 = \mu_2 \frac{a_3^2}{a_4} < \mu_2^{(dop)} \frac{a_3^2}{a_4}, \qquad \mu_2^{(dop)} \approx 1/4. \tag{5.3}$$

При выполнении условия (5.3) область апериодической устойчивости представляет собой криволинейный треугольник O, M_2, M_3 (рис. 5.1), расположенный в первом квадранте плоскости коэффициентов a_0, a_1. Одна сторона треугольника — прямая (отрезок OM_3 оси абсцисс), две другие стороны — криволинейные. Граничная кривая области задается параметрическими уравнениями (5.1), (5.2), где $\omega \in [0,\infty)$ — параметр.

Коротко о характерных точках граничной кривой. Таких характерных точек — четыре.

Точка начала координат O одновременно является точкой локального минимума граничной кривой: $da_0(x)/dx\big|_{x=0,a_1=0} = 0$, ей соответствуют значения $x=0, a_1(0)=0$.

Точка M_1 — точка перегиба. Для точки M_1 имеем: $d^2a_0(x)/dx^2 = 0$.

Точка M_2 — точка локального максимума граничной кривой: $da_0(\omega)/d\omega\big| = 0$.

Точка M_3 — точка пересечения граничной кривой с положительной полуосью оси абсцисс. Эта точка определяется условием $a_0(x)=0$, т. е. уравнением $a_0(M_3) = a_2 - 2a_3x + 3a_4x^2 = 0$. Для нее должно выполняться условие $a_1(M_3) > 0$.

Отметим, что для значений параметра x, соответствующих всем рассмотренным характерным точкам, выполняется неравенство: $0 = x(O) < x(M_1) < x(M_2) < x(M_3)$.

Точка M_2 имеет некоторые отличия от остальных характерных точек кривой. Она является *особой* точкой, т. к. в ней одновременно выполняются два условия: $da_0(x)=0$ и $da_1(x)=0$. Точнее, это — *касп* (англ. *cusp* — заострение) или *точка возврата* — точка, в которой граничная кривая разделяется на две ветви, имеющие в этой точке одинаковый направляющий вектор.

Особенности геометрии области апериодической устойчивости при нарушении неравенства (5.3) леммы 5.1 иллюстрируются рис. 5.2. На рис. 5.2а при $\mu_2 = \mu_2^{(dop)} = 1/4$ «хвост» граничной кривой пересекает ее начальную точку (точку начала координат), а на рис. 5.2б при $\mu_2 = 1/3 > \mu_2^{(dop)}$ точка M_3 граничной кривой становится особой точкой (касп) и мы имеем самопересекающуюся граничную кривую.

Задача Вышнеградского. Современный подход

В работе Вышнеградского [5] исходное характеристическое уравнение $a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 = 0$ нормируется делением на a_0 и вводится новая переменная $q = s\sqrt[3]{a_3/a_0}$. В результате получается уравнение $s^3 + As^2 + Bs + 1 = 0$, содержащее всего два параметра

$$A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}, \quad B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}.$$

На их плоскости строится область устойчивости (множество $AB > 1$, $A > 0$, $B > 0$) и область апериодичности. Диаграмма Вышнеградского проста и наглядна.

Однако в настоящее время более естественным стало использование пространства *коэффициентов характеристического полинома*, а не обобщенных параметров (более простой последующий переход к коэффициентам регулятора).

Рассмотрим область устойчивости и область апериодической устойчивости для системы третьего порядка на плоскости коэффициентов a_0, a_1. На рис. 6.1 граница области устойчивости представлена прямой OS_1 уравнение этой прямой $a_0 = a_1\dfrac{a_2}{a_3}$ (см., например, [6]). Граничная кривая области апериодической устойчивости — кривая OM_1M_2. Она описывается парой параметрических уравнений: $a_1 = 2a_2x - 3a_3x^2$, $a_0 = a_2x^2 - 2a_3x^3$. Координаты точек M_1 и S_1:

$$a_1(M_1) = \frac{a_2^2}{3a_3}, \quad a_0(M_1) = \frac{a_2^2}{27a_3}, \quad a_1(S_1) = a_1(M_1) = \frac{a_2^2}{3a_3}, \quad a_0(S_1) = \frac{a_2^3}{3a_3^2}. \tag{6.1}$$

Отношение ординат характерных точек M_1 и S_1, как следует из приведенных выше формул (6.1), является постоянной величиной:

$$a_0(M_1)/a_0(S_1) = 1/9 \tag{6.2}$$

для любых прикладных задач рассматриваемого типа.

Литература

1. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.

2. Mitrovich D. Graphical Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems: Part I, Theory and Analysis; Part II, Synthesis // Trans. AIEE (Applications and Industry). 1959. January. Vol. 57. P. 476-496.

3. Šiljak D. D. Generalization of the Parameter Plane Method // IEEE Trans. Automat. Control. 1966. V.AC-11. No 1. P. 63-70.

4. Грязина Е. Н., Поляк Б. Т., Тремба А. А. Современное состояние метода *D*-разбиения. Обзор. // АиТ. 2008. №12. С. 3-40.

5. Vishnegradsky I. Sur la theorie generale des regulateurs // Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris. 1876. V. 83. P. 318-321.

6. Александров А. Д., Николаев Ю. П. Анализ устойчивости и синтез многорежимных систем управления // Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления – М.: Машиностроение, 1978. С. 93-118.

7. Николаев Ю. П. Геометрия многомерной области устойчивости в пространстве четных (нечетных) коэффициентов характеристического полинома линейных систем // АиТ. 2014. №9. С. 3-20.

8. Немировский А. С., Поляк Б. Т. Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование // АиТ. 1994. №11. С. 113-119.

9. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

10. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Л.; М.: ОНТИ, 1936.

11. Fuller A. T. Conditions of aperiodicity in linear systems //Brit. J. Appl. Phys. 1955. № 6. P. 195-198.

12. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. Jury E. I. Inners and the Stability of Dynamic Systems. Wiley, New York, 1974.

УДК 629.7.015

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПОСАДКИ ПО КАТЕГОРИИ IIIC САМОЛЕТА ТУ-204СМ НА ВПП ПЕРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УСЛОВИЯХ БОКОВОГО ВЕТРА

А. В. ГРЕБЁНКИН, *д. т. н., профессор*
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»,
С. А. КОСТИН
Группа компаний «ВОЛГА-ДНЕПР»

В статье рассматривается возможность автоматической посадки самолета Ту-204СМ по категории IIIc ИКАО на влажную ВПП переменного состояния в условиях бокового ветра с повторяющимся выходом на режимы глиссирования и отказом критического двигателя.

Ключевые слова: *автоматическая посадка, коэффициент сцепления, глиссирование, пробег по полосе, управление тормозами, управление интерцепторами.*

THE ANALYSIS OF THE CAT.IIIC AUTOMATIC LANDING CAPABILITY OF TU-204SM AIRCRAFT ON THE RUNWAY WITH VARIABLE SURFACE CONDITIONS IN THE CROSSWIND ENVIRONMENT

A. V. GREBYONKIN, *D. Sc. in Engineering, professor*
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC,
S. A. KOSTIN
VOLGA-DNEPR Group

The article considers the capability of Tu-204SM aircraft Cat. IIIc (ICAO) automatic landing on a wet runway with variable surface conditions in the crosswind environment with repetitive coming to aquaplaning modes and critical engine failure.

Keywords: *automatic landing, friction coefficient, aquaplaning, ground roll, brake control, spoiler control.*

Важным фактором, повышающим конкурентоспособность гражданских воздушных судов нового поколения, является возможность реализации посадки по категории IIIc ИКАО с расширением области ожидаемых условий эксплуатации при условии сохранения или повышения уровня безопасности полетов. Одним из путей решения этой задачи является разработка и внедрение высокоэффективных надежных систем автоматического управления, реализующих полностью автоматическую посадку, включая автоматическое управление на пробеге в широком диапазоне ожидаемых условий эксплуатации (ОУЭ), включая движение по ВПП различного (или переменного) состояния, сильный боковой ветер и отказ критического двигателя. Повышение эффективности управляющих воздействий системы автоматического управления (САУ) в условиях расширения области ОУЭ может быть получено за счет включения в контур автоматического управления на пробеге вспомогательных управляющих сигналов на секции интерцепторов и систему автоматического дифференциального торможения колес как вспомогательного средства борьбы с боковым выкатыванием.

При оценке характеристик устойчивости и управляемости самолета при движении по ВПП основным критерием, определяющим ее состояние, является заданный коэффициент сцепления. Такой подход справедлив, если ВПП сухая или толщина покрывающего ее слоя осадков не превышает 3 мм.

По оценкам состояния ВПП можно ввести следующие определения:

- сухая ВПП ($\mu_S = 0{,}6$) — это ВПП, имеющая рифленое или пористое покрытие, обеспечивающее «эффективно сухое» торможение даже при наличии влаги,
- влажная ВПП ($\mu_S = 0{,}5 \ldots 0{,}4$) — это ВПП, хорошо пропитанная влагой, но без значительных участков со стоячей водой (ВПП становится отражающей),
- ВПП, покрытая льдом ($\mu_S = 0{,}3$),
- загрязненная ВПП — это ВПП, 25 % которой покрыто водой глубиной более 3 мм, либо слякотью или рыхлым снегом с толщиной более 3 мм.

Обычно рассматривается неизменное состояние ВПП на всем ее протяжении. В то же время интерес представляет движение самолета по ВПП переменного состояния, где могут встречаться участки с различными коэффициентами сцепления различной протяженности. В статье рассматривается ВПП с тремя участками, покрытыми слоем воды толщиной 3 мм на расстоянии 750 м от торца ВПП. Модель ВПП переменного состояния показана на рисунке 1.

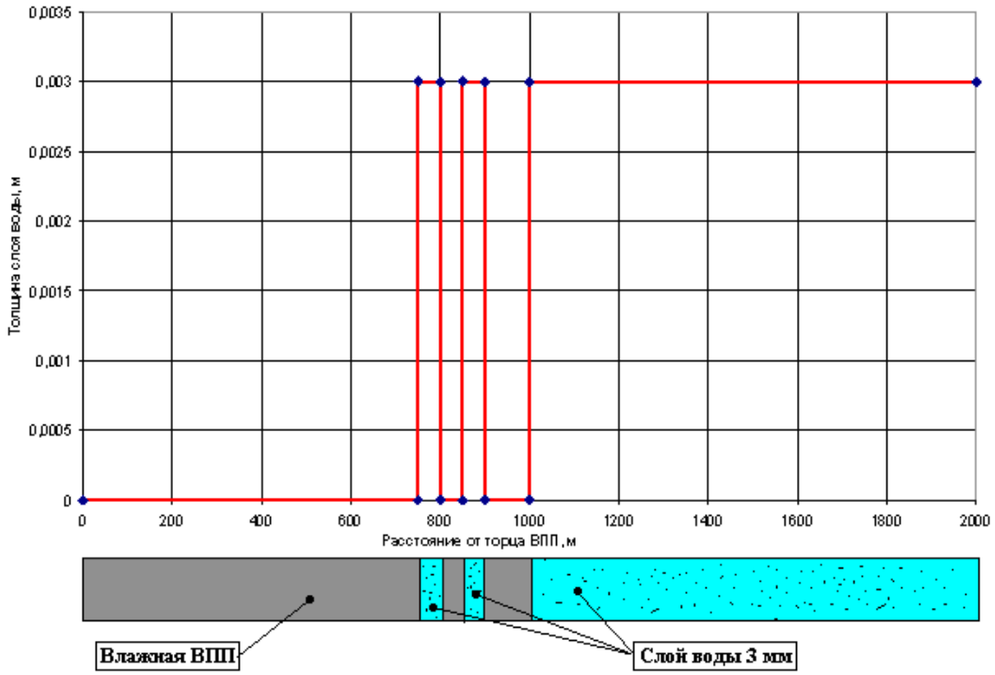

Рис. 1. Модель ВПП переменного состояния

Протяженность первых двух участков, покрытых слоем воды, и расстояние между ними задавалось 50 м. За вторым участком моделировался участок влажной ВПП без слоя воды протяженностью 100 м. За этим участком предполагалось наличие слоя воды 3 мм до конца ВПП. Предполагалось, что ВПП в целом влажная с коэффициентом сцепления $\mu_S = 0{,}4$. Однако если скорость движения колес по слою воды превышает скорость глиссирования, то рассматривается возможность выхода на режим глиссирования или аквапланирования с уменьшением коэффициента сцепления до $\mu_S = 0{,}05$.

Особенности движения колеса по слою воды поясняются на рисунке 2. При качении колеса по слою осадков (жидкости) перед ним образуется волна с повышенным градиентом давления. Это давление приводит к возникновению силы гидродинамического давления, действующей под некоторым углом к поверхности ВПП. Величина этой силы зависит от толщины слоя жидкости и ее плотности. С увеличением скорости качения колеса сила гидродинамического давления увеличивается. Эта сила дает две составляющие: нормальную $Y_{гд}$ и тангенциальную $X_{гд}$. Нормальная сила $Y_{гд}$ стремится поднять колесо на поверхность слоя осадков, а тангенциальная сила $X_{гд}$ создает сопротивление поступательному и вращательному движению колеса. При определенной скорости

качения нормальная сила $Y_{гд}$ становится равной силе давления в пневматике колеса. В этом случае колесо поднимается (всплывает) на поверхность слоя осадков и скользит, не имея контакта с поверхностью ВПП. По мере подъема колеса сила $X_{гд}$ уменьшается пропорционально уменьшению толщины слоя осадков [1].

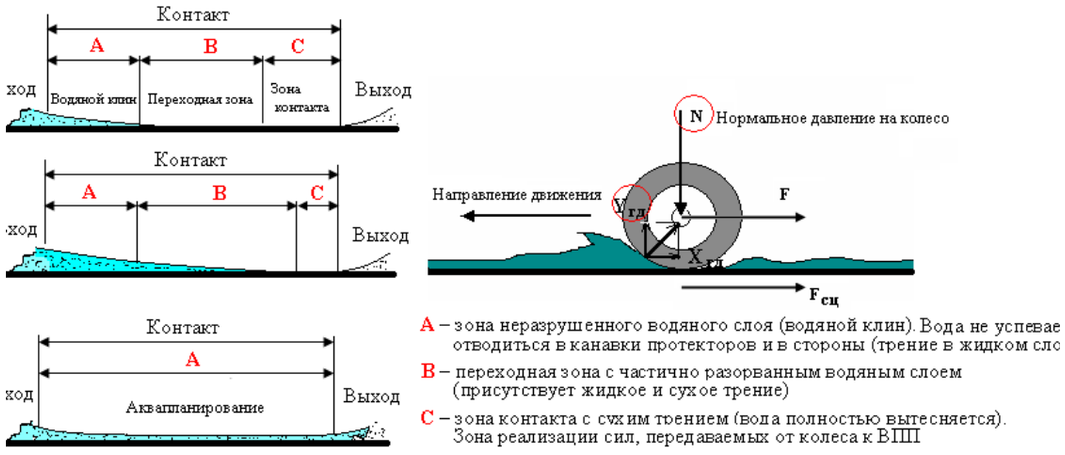

Рис. 2. Физические особенности движения колеса по слою осадков

Скорость, при которой гидродинамическая сила, создаваемая слоем осадков, полностью отрывает колесо от поверхности ВПП, называется скоростью глиссирования $V_{гл}$ [км/ч]. Величину скорости глиссирования можно определить по формуле [2]:

$$V_{гл} = K\sqrt{P_{ш}}\,. \qquad (1)$$

где: K — коэффициент пропорциональности (определяется эмпирическим путем); $P_{ш}$ — давление в пневматике колеса [кгс/см^2].

Характеристики торможения колес на мокрой ВПП, покрытой слоем осадков 3 мм и более, могут быть получены, предполагая, что коэффициент сцепления при торможении на мокрой ВПП $\left(\mu_{S_{мокр}}\right)$ равен коэффициенту сцепления, не ограниченному по крутящему моменту, замеренному на сухой ВПП $\left(\mu_{S_{сух}}\right)$, умноженному на коэффициент K:

$$\mu_{S_{мокр}} = \mu_{S_{сух}} K\left(V_n\right). \qquad (2)$$

Ниже в таблице представлена зависимость $K(V_n)$.

Путевая скорость, $V_п$, м/с	10,3	20,56	30,84	41,12	51,4	71,96	82,24
Коэффициент $K\left(\mu_{S_{мокр}}/\mu_{S_{сух}}\right)$	0,64	0,64	0,62	0,57	0,52	0,44	0,41

При определении характеристик движения на загрязненной ВПП (стоячая вода, слякоть, рыхлый снег), лобовое сопротивление при движении колеса в слое осадков можно определить по следующей формуле:

$$X_{осадков} = C_{x_{осадков}} \frac{\rho_{осадков} V_n^2}{2} S, \qquad (3)$$

где: $C_{x_{осадков}}$ — коэффициент силы лобового сопротивления осадков; $\rho_{осадков}$ — плотность слоя осадков [кг/м3]; $S = db$ — фронтальная площадь контакта колеса со слоем осадков заданной толщины [м^2]; d — глубина осадков [м]; b — ширина колеса [м].

По оценкам состояния ВПП из действующих JAR1591 и AMJ1591 (JAR25 изменение 13/14), для изолированного пневматика коэффициент силы сопротивления для ВПП с осадками в виде слоя воды ($\rho_{осадков}$ = 1000 кг/м^3) принимается равным 0,75.

При скорости равной или более скорости глиссирования колесо не продавливает слой осадков и движется на его поверхности, что позволяет принять коэффициент сцепления при торможении колес равным 0,05, а при определении силы сопротивления от пневматиков, движущихся в слое воды, принять глубину осадков равной нулю.

В расчетах в качестве слоя осадков принимается вода с плотностью 1000 кг/м^3. Сила сопротивления осадков суммируется по всем парам колес и рассчитывается отдельно для каждой опоры шасси в зависимости от заданной толщины слоя воды на ВПП, условий контакта пар колес соответствующей опоры шасси с поверхностью ВПП, размеров колес. Если имеет место касание ВПП только одной (левой или правой) основной стойкой шасси, то учитывается соответствующий момент рыскания, вызванный влиянием слоя осадков (для самолета Ту-204СМ):

$$M_y = X_{ш_{ЛЕВ}} \cdot 2{,}405 \quad \text{или} \quad M_y = -X_{ш_{ПРАВ}} \cdot 2{,}405\ . \qquad (4)$$

На характеристики пробега существенное влияние оказывает качество управления на предшествующих этапах стабилизации самолета на глиссаде и курсе посадки, выравнивания, контроля и минимизации углов рыскания и крена, касания ВПП основными опорами шасси и управляемого опускания носового колеса, управление тягой двигателей, тормозами колес и средствами аэродинамического торможения.

На этапе движения по глиссаде удержание самолета на курсе посадки обеспечивается управлением элеронами по сигналам курсового радиомаяка

$$X_{Э_i} = X_{Э_{i-1}} + K_{\varepsilon_K}\varepsilon_K + K_{\dot{\varepsilon}_K}\dot{\varepsilon}_K + K_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + K_{\dot{\omega}_x}\dot{\omega}_x - K_{\dot{\psi}}\dot{\Psi}, \qquad (5)$$

при этом необходимо контролировать величину угла рыскания. При условии, когда угол рыскания не превышает 10 градусов, целесообразно управлением рулем направления устранять скольжение

$$X_{H_i} = X_{H_{i-1}} + K_\beta\beta + K_{\dot{\omega}_y}\dot{\omega}_y + K_{\dot{\psi}}\dot{\psi}, \qquad (6)$$

иначе необходимо переходить на удержание достигнутого угла рыскания

$$X_{H_i} = X_{H_{i-1}} + K_\psi\left(\psi - \psi_{огр}\right) + K_{\dot{\omega}_y}\dot{\omega}_y + K_{\dot{\psi}}\dot{\psi}. \qquad (7)$$

В этом случае нет необходимости вводить этап доворота перед касанием, при выполнении которого появляются условия, способствующие уводу самолета от оси ВПП. Уборку угла крена необходимо начинать как можно ниже по высоте (в рассматриваемом случае 0,5 м), перед самым касанием ВПП, при этом уборку крена целесообразно совмещать с плавным подключением управления рулем направления по сигналам курсового радиомаяка:

$$X_{H_i} = X_{H_{i-1}} - K_{\varepsilon_K}\varepsilon_K - K_{\varepsilon_K}\dot{\varepsilon}_K + K_{\omega_y}\omega_y + K_{\omega_y}\dot{\omega}_y, \qquad (8)$$

$$X_{Э_i} = X_{Э_{i-1}} + K_\gamma\gamma + K_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + K_{\omega_x}\omega_x + K_{\dot{\omega}_x}\dot{\omega}_x. \qquad (9)$$

Стабилизация нулевого крена выполняется вплоть до касания ВПП носовым колесом.

В общем случае управление на этапе послепосадочного пробега формируется в виде сигналов на РУД, руль высоты, элероны, руль направления, носовое колесо, педали тормоза колес левой и правой основной опоры шасси, секции интерцепторов для реализации функций торможения и удержания самолета на оси ВПП.

Управляющий сигнал на носовое колесо $\left(\delta_{НК}^{УПР}\right)$ формируется по условию начала уборки крена перед касанием ВПП и определяется по величине суммарного ограниченного сигнала на руль направления через коэффициент $K_Ш = \dfrac{\delta_{НК}^{MAX}}{\delta_H^{MAX}}$:

$$\delta_{НК}^{УПР} = K_Ш\delta_H\,. \qquad (10)$$

Сразу после первого касания ВПП пневматиками основных опор шасси, режим работы двигателей переводится на минимальный реверс тяги. Первое касание ВПП может сопровождаться последующим самопроизвольным взмыванием самолета («козлением»). Поэтому для формирования последующих управляющих воздействий вводится понятие «уверенное касание»: безотрывный контакт пневматиков основных опор шасси с поверхностью ВПП не менее 1 с. До уверенного касания управлением рулем высоты удерживается тангаж касания ($\vartheta_{зад} = \vartheta_{кас}$):

$$X_{B_i} = X_{B_{i-1}} + K_{\vartheta}\left(\vartheta - \vartheta_{зад}\right) + K_{\omega_z}\omega_z + K_{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z. \qquad (11)$$

После уверенного касания ВПП выпускаются средства аэродинамического торможения (воздушный тормоз, интерцепторы) и выполняется опускание носового колеса, путем управления рулем высоты, направленное на удержание $\vartheta_{зад} = 0°$.

После опускания носового колеса включается максимальный реверс тяги и с задержкой 1 с выполняется процедура торможения колес основных опор. При достижении скорости 110 км/ч режим работы двигателей переводится с максимального реверса на малый реверс тяги.

Торможение колес моделируется путем линейного увеличения тормозного момента до максимальной величины за 2 с путем имитации обжатия педалей тормоза. При моделировании учитывались особенности тормозной системы самолета, с учетом которых время на полное растормаживание колес задавалось 1 с, а время на полное торможение (достижение максимальной величины тормозного момента) — 2 с. Для повышения эффективности управляющих воздействий на пробеге в условиях низких коэффициентов сцепления, сильных боковых возмущений в виде отказа двигателя и бокового ветра в статье рассматривается возможность использования автоматического раздельного управления тормозами колес левой и правой стоек шасси и раздельное управление боковой силой секциями интерцепторов.

С учетом выявленных особенностей логика автоматического управления тормозами колес основных опор шасси и секциями интерцепторов на пробеге сводилась к следующим действиям:

1. По признаку обжатия передней стойки шасси (сигнал с соответствующего концевого выключателя) и скорости раскрутки, по крайней мере, одного тормозного колеса каждой основной опоры больше или равной 37 км/ч, формируется управляющий сигнал полного обжатия **левой** $K_{ТОР}^{ЛЕВ}$ и **правой** $K_{ТОР}^{ПР}$ педали тормоза: изменение $K_{ТОР}^{ЛЕВ}$ и $K_{ТОР}^{ПР}$ от 0 **(колеса полностью расторможены)** до 1 **(колеса полностью заторможены)** за 2 с.

В случае если колеса не раскрутились, давление в тормоза должно быть подано сразу же после задержки в 1 с после получения сигналов обжатия передней стойки шасси.

2. В процессе пробега контролируется направление бокового смещения самолета относительно оси ВПП, направление и угол отклонения носового колеса. При смещении самолета от оси ВПП **влево** ($Z < 0$), и достижении максимального угла отклонения носового колеса **вправо** $\left(\delta_{НК}^{УПР} = \delta_{НК}^{MAX}\right)$, при условии, что носовое колесо находится на ограничении максимального угла отклонения более 1 с, формируется сигнал на **растормаживание колес левой стойки шасси** (изменение коэффициента $K_{ТОР}^{ЛЕВ}$ от 1 до 0 за 1 с) и **уборку секций интерцепторов на левом полукрыле**. При условии снятия носового колеса с ограничения и уменьшении максимального угла его отклонения до величины $\delta_{НК}^{УПР} = 0{,}5\,\delta_{НК}^{MAX}$ формируется сигнал на повторное полное торможение колес левой стойки шасси (изменение коэффициента $K_{ТОР}^{ПР}$ от 0 до 1 за 2 с) и повторный выпуск секций интерцепторов на левом полукрыле. Повторное срабатывание сигнала на раздельное торможение колес и раздельное управление секциями интерцепторов не выполняется по причине возможного недопустимого увеличения длины пробега.

3. Аналогичные действия выполняются при отклонении самолета от оси ВПП вправо, но при этом формируются команды управления тормозами правой стойки шасси и секциями интерцепторов на правом полукрыле.

Некоторые результаты математического моделирования применительно к самолету Ту-204СМ приведены на рисунках 3 — 9.

На рисунках 3 и 4 приведены результаты математического моделирования посадки на ВПП переменного состояния в условиях действия бокового ветра 5 м/с и 10 м/с соответственно. Процесс выравнивания сопровождался увеличением угла крена на 0,5...1 град для удержания самолета на курсе посадки. К моменту касания соответствующим управлением элеронами, начиная с высоты 0,5 м, угол крена почти полностью убирается, что позволило обеспечить касание ВПП левой и правой стойками шасси с нормальной перегрузкой касания $n_y = 1{,}125$. Однако после первого касания наблюдался незначительный подскок с повторным касанием ВПП, но уже с меньшей нормальной перегрузкой.

Боковое смещение от оси ВПП в момент касания в условиях бокового ветра 5 м/с достигало величины 3 м, а при боковом ветре 10 м/с максимальное смещение самолета от оси ВПП достигало величины 6 м. В процессе пробега попадание колес на два участка со слоем воды сопровождалось выходами на режимы глиссирования, что подтверждалось

соответствующими уменьшениями коэффициента сцепления до минимальной величины. На втором участке уменьшение скорости пробега привело к более быстрому восстановлению коэффициента сцепления с меньшей продолжительностью глиссирования. Характер изменения коэффициента сцепления (на рисунке коэффициент сцепления обозначается MUDEC) подтверждает два выхода на режимы глиссирования на первых двух участках со слоем воды 3 мм. По мере уменьшения скорости пробега коэффициент сцепления увеличивался и при скорости меньше скорости глиссирования достигал установленного для влажной ВПП значения μ_S =0,4.

В ходе пробега руль направления и носовое колесо имели достаточно большой запас хода, что позволило избежать необходимости раздельного управления тормозами колес и интерцепторами. Результаты моделирования показали, что включение малого и максимального реверса тяги несколько замедляет устранение бокового увода.

На рисунках 5...7 приведены результаты посадки на ВПП переменного состояния в условиях бокового ветра 15 м/с. В этом случае примерно на скорости 130 км/ч носовое колесо достигло максимального угла отклонения 10 град. По рассматриваемой логике управления тормозами колес и интерцепторами на пробеге, после фиксации события «Носовое колесо на упоре более 1 с» была выполнена процедура полного растормаживания колес левой стойки шасси и полная уборка левых секций интерцепторов (см. рисунок 5). При этом сразу удалось снять носовое колесо с упора, получить условия возможного повторного торможения колес левой стойки, выпуска секций интерцепторов на левом полукрыле и обеспечить уверенное устранение бокового увода.

Для оценки эффективности предлагаемого способа управления тормозами колес и интерцепторами приводятся результаты моделирования пробега с использованием и без использования раздельного управления тормозами колес и интерцепторами на пробеге по влажной ВПП переменного состояния в условиях бокового ветра 15 м/с при всех работающих двигателях (рисунки 6, 7) и одном отказавшем (критическом) двигателе (рисунки 8, 9). Из сравнительного анализа видно, что при всех работающих двигателях предлагаемый способ управления на пробеге не оказал существенного влияния на боковой увод, однако без использования раздельного торможения колес и раздельного управления интерцепторами на пробеге носовое колесо достаточно долго находится на упоре, а руль направления при этом достигает максимального угла отклонения (см. рисунок 6).

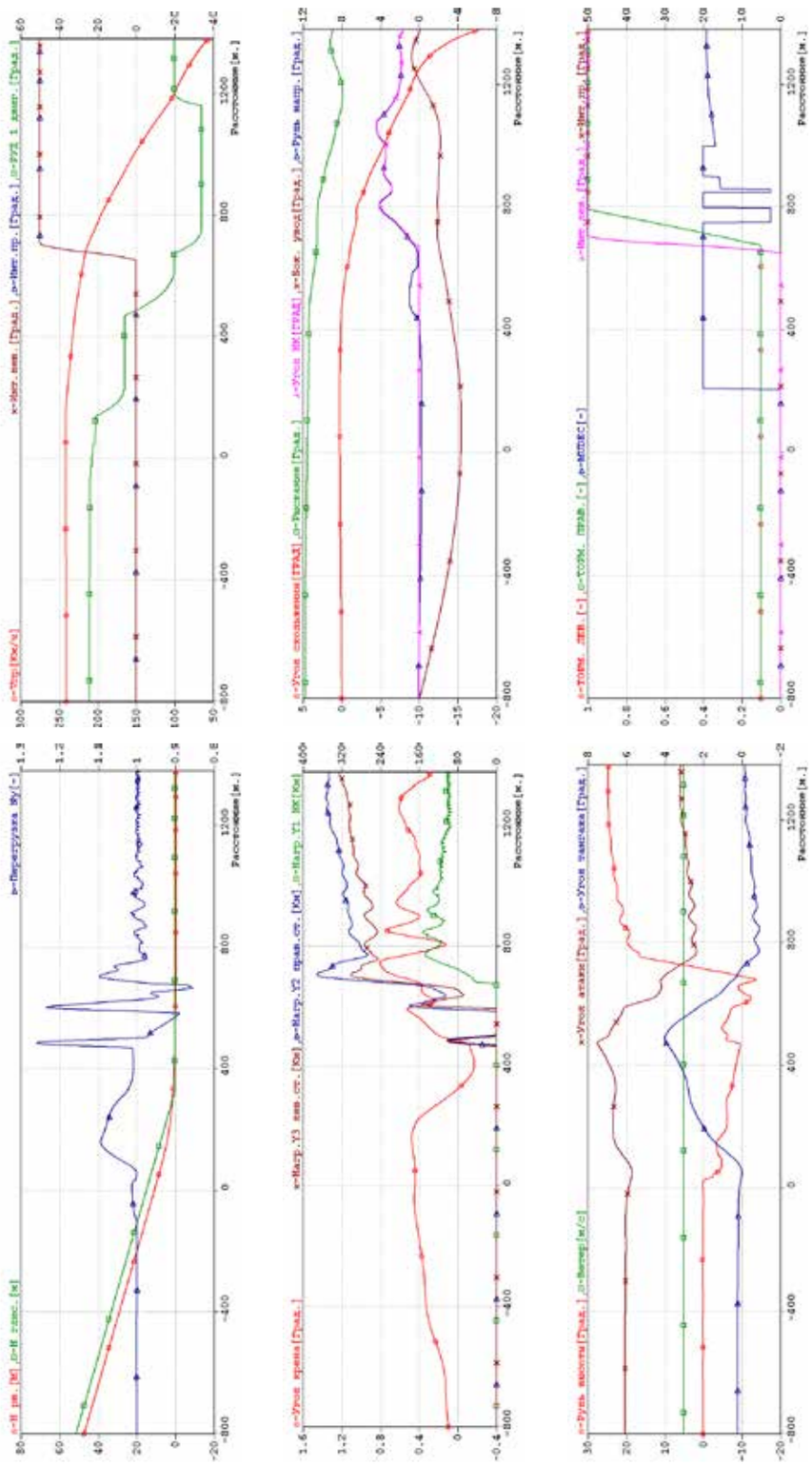

Рис. 3. С контролем необходимости дифференциального торможения колес и дифференциального управления интерцепторами на пробеге. Боковой ветер $W_{\text{ж}}$=5 м/с

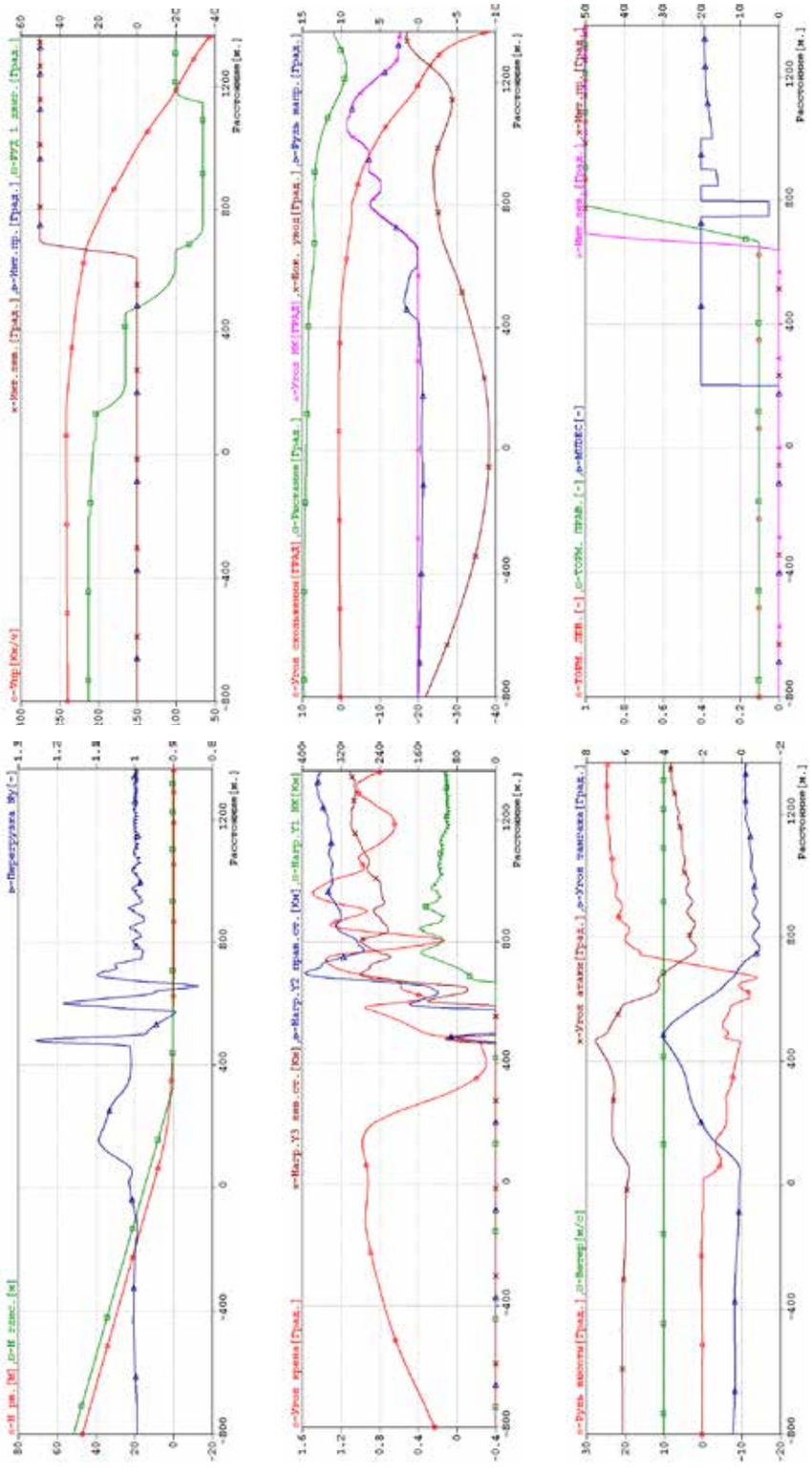

Рис. 4. С контролем необходимости дифференциального торможения колес и дифференциального управления интерцепторами на пробеге. Боковой ветер Wzg =10 м/с

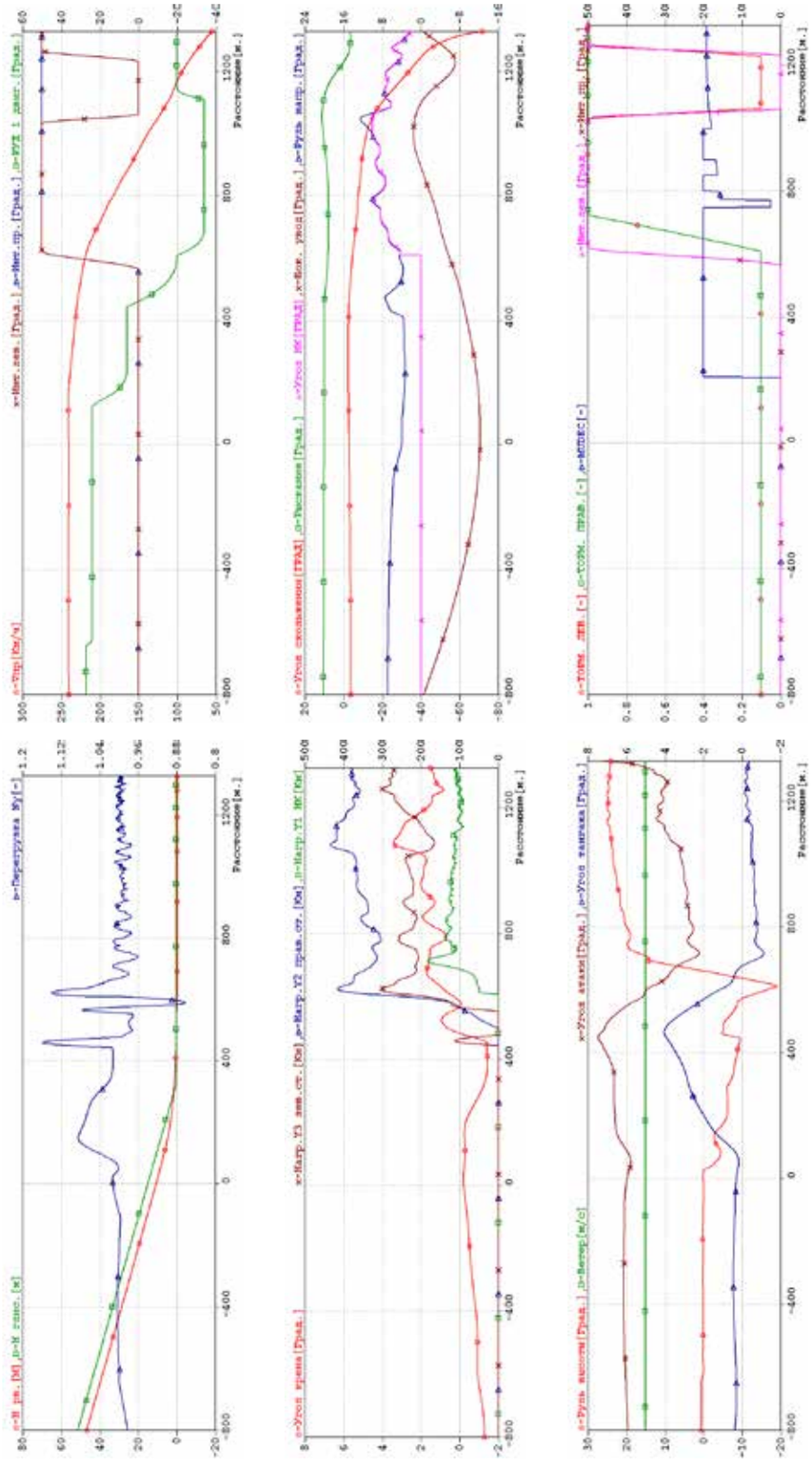

Рис. 5. С использованием дифференциального торможения колес и дифференциального управления интерцепторами на пробеге. Боковой ветер Wzg =15 м/с

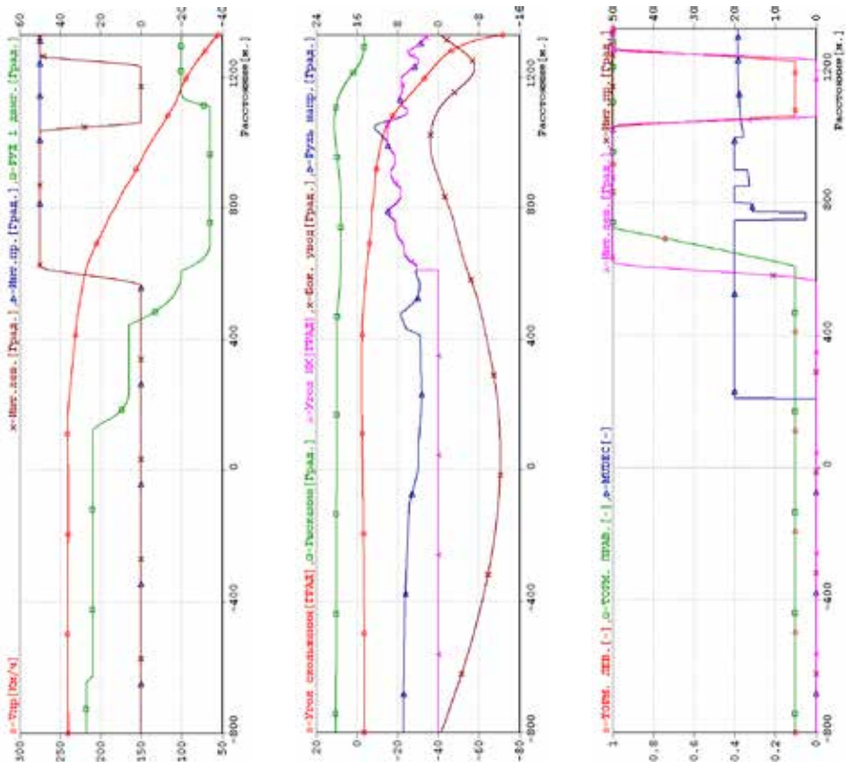

Рис. 7. С использованием дифференциального торможения колес и дифференциального управления интерцепторами на пробеге. Боковой ветер Wzg =15 м/с

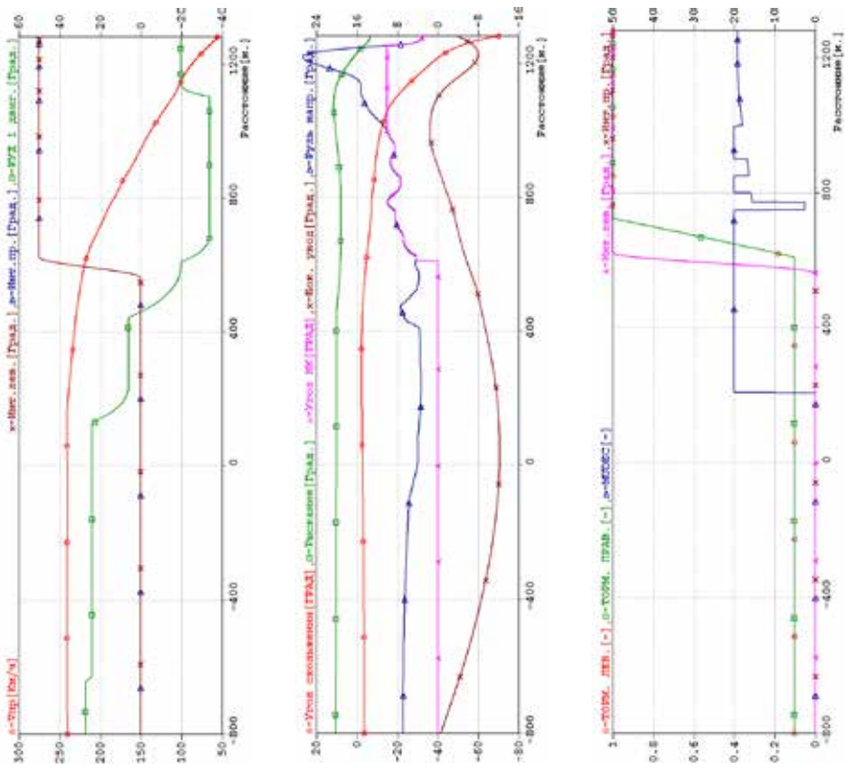

Рис. 6. Без использования дифференциального торможения колес и дифференциального управления интерцепторами на пробеге. Боковой ветер Wzg =15 м/с

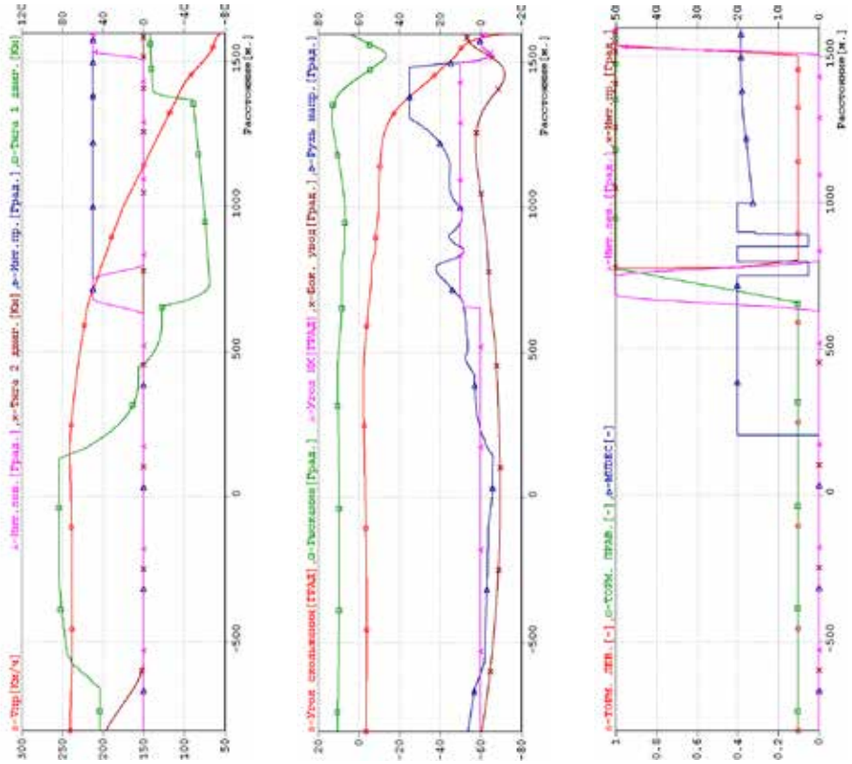

Рис. 9. С использованием дифференциального торможения колес и дифференциального управления интерцепторами на пробеге. Боковой ветер Wzg =15 м/с. Отказ критического двигателя на глиссаде

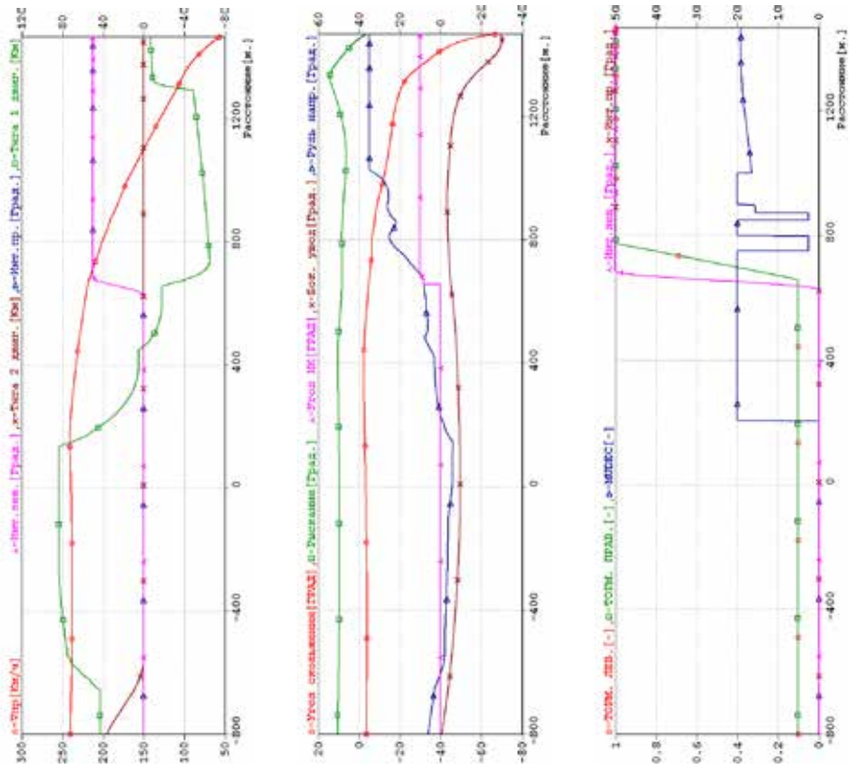

Рис. 8. Без использования дифференциального торможения колес и дифференциального управления интерцепторами на пробеге. Боковой ветер Wzg =15 м/с. Отказ критического двигателя на глиссаде

При отказе критического двигателя удержать самолет в пределах влажной ВПП переменного состояния в условиях действия бокового ветра 15 м/с весьма затруднительно: носовое колесо почти сразу отклоняется на полный угол и находится в этом положении до конца пробега. При этом руль направления достаточно быстро достигает максимального угла отклонения, а боковое смещении от оси ВПП достигает величины 30 м. Использование предлагаемой логики раздельного торможения колес и раздельного управления интерцепторами на пробеге в этих условиях позволяет полностью устранить боковое смещение от оси ВПП к концу пробега с гарантированным снятием руля направления и носового колеса с упора по максимальному отклонению. Максимальное отклонении от оси ВПП в этом случае не превышает 10 м. При этом достаточно долго сохраняется необходимый для управления запас руля направления.

Заключение

Показана возможность математического моделирования движения самолета по ВПП переменного состояния ее поверхности на всем протяжении с реализацией возможности выхода на режимы глиссирования колес.

Предлагается способ раздельного управления тормозами колес и секциями интерцепторов на пробеге, обеспечивающий повышение сопротивляемости самолета боковому уводу. Результаты моделирования применительно к самолету Ту-204СМ показали, что использование предлагаемого способа управления позволяет расширить область ожидаемых условий эксплуатации и повысить уровень безопасности полетов при выполнении посадок по IIIс категории на ВПП переменного состояния в условиях значительных боковых возмущений, вызванных боковым ветром и отказом критического двигателя.

Литература

1. Кнороз В. И., Кленников Е. В. и др. Работа автомобильной шины. М.: Транспорт, 1976. 238 с.

2. Гребенкин А. В., Лигум Д. В. Оценка влияния состояния взлетно-посадочной полосы и бокового ветра на характеристики прерванного взлета и посадки регионального самолета с отказавшим критическим двигателем. Проблемы подготовки специалистов для гражданской авиации и повышения эффективности работы воздушного транспорта: сборник материалов Международной научно-практической конференции 18 — 19 ноября 2010 г.: научное издание / под ред. Н. У. Ушакова. Ульяновск: УВАУ ГА(И), 2010. С. 30-32.

УДК 629.7.05

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АВТОМАТА ТЯГИ ТЯЖЕЛОГО САМОЛЕТА

В. Е. КУЛИКОВ, *д. т. н., профессор,*
М.С. БАЛЯКИН,
В. В. КУЛИКОВ,
А. С. ЮРЧЕНКО,
Д. Б. ЮРЧЕНКО
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Рассмотрена задача построения системы управления скоростью полета самолета с помощью автомата тяги. Найдена структура и параметры обратных связей астатического контура скорости с учетом динамических характеристик исполнительного механизма автомата тяги и приемистости двигателей самолета. Полученный результат аналитического синтеза системы управления скоростью полета подтвержден при моделировании разгонов и торможений тяжелого самолета.

Ключевые слова: *автомат тяги, управление скоростью, астатический контур, исполнительный механизм.*

ANALYTICAL SYNTHESIS OF THE AUTOMAT OF THE STRIKE OF THE HEAVY AIRCRAFT

V. E. KULIKOV, *D. Sc. in Engineering, professor,*
M. S. BALYAKIN,
V. V. KULIKOV,
A. S. YURCHENKO,
D. B. YURCHENKO
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

This article considers the problem of aircraft flight speed control system with auto-throttle construction. Astatic speed loop feedback structure and parameters with consideration for auto-throttle actuators and acceleration dynamic performance of the aircraft are found. The acceleration and deceleration of heavy aircraft modeling confirms the received result of aircraft flight speed control system analytical synthesis is confirmed by acceleration and deceleration of heavy aircraft modeling.

Keywords: *auto-throttle, flight speed control, astatic loop, actuator.*

Автомат тяги (АТ) как система управления скоростью полета с использованием изменения тяги двигателей, широко применяется на тяжелых транспортных и пассажирских самолетах. Известны различные технические и алгоритмические решения задачи стабилизации и управления скоростью полета [1, 2, 3]. В работе [4] дано определение автомата тяги и предложен интегральный закон управления сектором газа с настройкой параметров по методу стандартных коэффициентов.

В настоящее время прорабатываются вопросы о рациональных способах синтеза замкнутого контура управления скоростью с помощью тяги двигателей для получения назначенных желаемых свойств системы управления. Так, в работе [5] показан способ формирования управления скоростью при назначении динамических характеристик замкнутого контура управления в виде дифференциального уравнения, которому должно соответствовать рассогласование между желаемой и действительной траекториями движения летательного аппарата. В работе [6] на основе метода обратных задач динамики рассмотрен подход раздельного формирования алгоритма получения заданной тяги силовой установки и алгоритма реализации заданной тяги, разнесенных между собой по времени регулирования.

Вообще говоря, для каждого современного варианта формирования закона управления тягой обязательными условиями синтеза являются: невыход ошибки по скорости за допуск при перерегулировании и астатизм системы по входному сигналу заданной скорости в установившемся состоянии стабилизации постоянной скорости полета. Требования по быстродействию к системе управления скоростью при разгоне (торможении) варьируются в зависимости от массы летательного аппарата и мощности двигательной установки.

Рассмотрим вопрос формирования структуры контура управления скоростью полета с использованием АТ как сепаратного канала управления. Автомат тяги в задаче стабилизации заданной скорости всегда применяется «с одновременной стабилизацией траектории» [4, стр. 373] центра масс самолета. Поэтому для построения базового алгоритма управления скоростью достаточно использовать в качестве объекта управления только уравнение для продольных сил, которое в полусвязанной системе координат [7] имеет вид, совпадающий при $\beta = 0$ с видом [8, стр. 118] уравнения в траекторной системе координат:

$$\dot{V} = g\left[n_{x_e} - \sin\theta\right],\ n_{x_e} = \frac{P\cos\left(\alpha + \varphi_{\text{дв}}\right) - Q}{G}, \qquad (1)$$

где V — скорость полета самолета, θ — угол наклона траектории, g = 9,81 м/с^2 — ускорение свободного, падения, n_{x_e} — тангенциальная

перегрузка, P — суммарная тяга двигателей, $\varphi_{ДВ}$ — угол установки двигателей относительно оси фюзеляжа, α — угол атаки, Q — сила лобового сопротивления в полусвязанной системе координат, G — масса самолета. Здесь и далее очевидная зависимость переменных движения от времени подразумевается, но в формулах не показывается.

В уравнении (1) продольное ускорение самолета направлено по проекции вектора скорости на плоскость симметрии летательного аппарата. Силы тяги и лобового сопротивления являются линейно зависимыми и требуют отдельного рассмотрения. Начнем с силы лобового сопротивления. Согласно [9] для дозвуковых режимов полета ее можно представить следующим образом:

$$Q = \left(c_{x_0} + c_{x_i} + \Delta c_{x_{закр}}\right)\frac{\rho_H V^2}{2} S_{кр}, \tag{2}$$

где c_{x_0} — коэффициент сопротивления про нулевой подъемной силе, c_{x_i} — коэффициент индуктивного сопротивления, $\Delta c_{x_{закр}}$ — приращение коэффициента лобового сопротивления из-за изменения конфигурации самолета при выпуске закрылков, ρ_H — плотность воздуха на высоте полета H, $S_{кр}$ — площадь крыла самолета.

Введем практически выполняемое условие независимости управления скоростью и траекторией полета в вертикальной плоскости, которое при малых углах атаки выглядит как

$$n_{y_e} = 1. \tag{3}$$

Здесь нормальная перегрузка n_{y_e} при включенных режимах системы автоматического управления стабилизации высоты или малого угла наклона траектории всегда является околоединичной.

Индуктивную составляющую силы лобового сопротивления можно представить в виде:

$$Q_i = c_{x_i}^{\alpha}(M)(\alpha - \alpha_0)\frac{\rho_H V^2}{2} S_{кр},\ c_{x_i}^{\alpha}(M) = \frac{\partial c_{x_i}(\alpha, M)}{\partial \alpha}, \tag{4}$$

где $c_{x_i}^{\alpha}(M)$ — частная производная коэффициента индуктивного сопротивления по углу атаки в разложении полного коэффициента лобового сопротивления при гладком крыле в окрестности точки α_0, для которой подъемная сила $Y(\alpha_0) = 0$.

Условию (3) эквивалентно выполнение равенства

$$\frac{c_y^{\alpha}(M)(\alpha - \alpha_0)\rho_H V^2 S_{кр}}{2G} = 1, \quad c_y^{\alpha}(M) = \frac{\partial c_{x_i}(\alpha, M)}{\partial \alpha}, \tag{5}$$

где $c_y^{\alpha}(M)$ частная производная коэффициента подъемной силы по углу атаки.

Из соотношения (5) определим величину рабочего диапазона угла атаки, обеспечивающего выполнение условия (3), а именно

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{2G}{c_y^{\alpha}(M)\cdot \rho_H V^2 S_{кр}}. \tag{6}$$

Подставим (6) в (4) и получим

$$Q_i = \frac{c_{x_i}^{\alpha}(M)}{c_y^{\alpha}(M)} G. \tag{7}$$

Так как функция $c_{x_i}^{\alpha}(M)$ в докритическом диапазоне чисел Маха $0 \le M < M_{кр}$ дозвукового профиля крыла [9] монотонно возрастает с ростом числа M, имеется возможность представить ее в виде линейной функции:

$$c_{x_i}^{\alpha}(M) = k_{x_i} M = k_{x_i}\frac{V}{a(H)}. \tag{8}$$

где k_{x_i} — коэффициент пропорциональности прироста производной коэффициента индуктивного сопротивления по числу M, $a(H)$ — скорость звука в стандартной атмосфере.

Тогда на основании выражения (7) с учетом (8) и, полагая производную коэффициента подъемной силы постоянной величиной $c_y^{\alpha}(M) = c_y^{\alpha} = \text{const}$, мало зависящей от числа M для дозвуковых самолетов, перепишем выражение (7) в виде:

$$Q_i = \frac{k_{x_i} V G}{c_y^{\alpha} a(H)}. \tag{9}$$

Понятно, что стабилизация скорости происходит в эксплуатационном диапазоне скоростей и включается при некоторой начальной скорости V_0. При изменении скорости относительно начальной на некоторое приращение ΔV скорость полета можно представить в виде:

$$V = V_0 + \Delta V. \tag{10}$$

Поэтому составляющую силы лобового сопротивления, пропорциональную скоростному напору

$$Q_0 = \left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\frac{\rho_H V^2}{2} S_{\text{кр}},$$

с учетом (10) при $\Delta V << V$, можно записать в линейном приближении

$$Q_0 = \left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\frac{\rho_H V_0^2}{2} S_{\text{кр}} + \left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\rho_H S_{\text{кр}} V_0 \cdot \Delta V. \qquad (11)$$

Выделим в выражении (2) для полной силы лобового сопротивления $Q = Q_0 + Q_i$ составляющую, зависящую от приращения скорости ΔV и, учитывая (9), (10) и (11), получим:

$$\begin{aligned} Q = &\left[\left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\frac{\rho_H V_0^2}{2} S_{\text{кр}} + \frac{k_{x_i} V_0 G}{c_y^{\alpha} a(H)}\right] + \\ &+ \left[\left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\rho_H S_{\text{кр}} V_0 + \frac{k_{x_i} G}{c_y^{\alpha} a(H)}\right]\Delta V. \end{aligned} \qquad (12)$$

Выражение в первой квадратной скобке (12) представляет собой балансировочную силу лобового сопротивления $Q_{\text{бал}}$, которую в исходном установившемся состоянии уравнения (1) при начальной скорости V_0 должна уравновесить балансировочная сила тяги двигателей $P_{\text{бал}} = -Q_{\text{бал}}$. Выражение во второй квадратной скобке суммы (12) является постоянным коэффициентом прироста силы лобового сопротивления от приращения скорости полета.

Введем обозначение составляющей тангенциального ускорения от действия силы лобового сопротивления

$$n_{x_Q} = \frac{Q}{G}. \qquad (13)$$

Подставляя выражение (12) в формулу (13), получим

$$\begin{aligned} &n_{x_Q} = n_{x_{\text{бал}}} + k_{n_x}^V \cdot \Delta V, \; n_{x_{\text{бал}}}(V_0) = \frac{\left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\rho_H V_0^2 S_{\text{кр}}}{2G} + \frac{k_{x_i} V_0}{c_y^{\alpha} a(H)}, \\ &k_{n_x}^V = \frac{\left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\rho_H S_{\text{кр}} V_0}{G} + \frac{k_{x_i}}{c_y^{\alpha} a(H)}, \end{aligned} \qquad (14)$$

где $k_{n_x}^V$ — коэффициент пропорциональности между приращением скорости и соответствующим ему по знаку приращении тангенциального

ускорения, вызываемого дополнительной силой лобового сопротивления при изменении скорости полета.

Рассмотрим теперь составляющую n_{x_P} тангенциального ускорения, вызываемую силой тяги двигателей. При малых углах атаки и угле установки двигателей будем считать проекцию тяги на продольную ось полусвязанной системы координат равной тяге самолета $P_e = P$, что, как будет показано ниже, в незначительной степени влияет на коэффициент усиления контура АТ. Эта составляющая определяется как:

$$n_{x_P} = \frac{P}{G}. \qquad (15)$$

Тяга двигателей для установившегося режима его работы определяется высотно-скоростными характеристиками (ВСХ), представляющими собой зависимость тяги от высоты, числа M и относительных оборотов, пропорционально связанных с фиксированными положениями рычагов управления двигателей (РУД).

Анализ ВСХ турбореактивных двигателей дозвукового тяжелого самолета показывает возможность представления установившейся тяги $P_{\text{уст}}$ в виде линейной по параметру функции от отклонения $\delta_{\text{РУД}}$, а именно:

$$P_{\text{уст}} = P_{\text{уст}}^{\delta_{\text{РУД}}}(H, M)\delta_{\text{РУД}}, \quad \delta_{\text{РУД}} \in \left[\delta_{\text{МГ}}, \delta_{\text{ВР}}\right], \qquad (16)$$

где $P_{\text{уст}}^{\delta_{\text{РУД}}}(H, M)$ — производная приращения тяги по приращению отклонения РУД в диапазоне от «малого газа» $\delta_{\text{МГ}}$ до «взлетного режима» $\delta_{\text{ВР}}$. В силу слабого роста тяги при увеличении числа M в относительно небольшом диапазоне его изменения можно, согласно (15) и с учетом (16), представить ускорение $n_{x_{P_{\text{уст}}}}$ для установившейся тяги при средней массе $G_{\text{ср}}$ в виде

$$n_{x_{P_{\text{уст}}}} = \frac{\overline{P}_{\text{уст}}^{\delta_{\text{РУД}}}(H)}{G_{\text{ср}}} \cdot \delta_{\text{РУД}}, \qquad (17)$$

где $G_{\text{ср}}$ — средняя масса самолета, $\overline{P}_{\text{уст}}^{\delta_{\text{РУД}}}(H)$ — осредненная по числу Маха для каждой высоты полета производная тяги по отклонению РУД. Формула (17) определена из статических характеристик двигателя, определенных ВСХ в функции параметров полета.

Динамические характеристики двигателя определяются уравнениями, описывающими математическую модель двигателя [10], основным из которых является дифференциальное уравнение для частоты вращения. В линейном приближении в формате передаточных функций ускорение n_{x_P} (15), вызываемое тягой двигателей P, будет связано, согласно (17),

с установившейся тягой $P_{уст}$, на которую необходимо выйти, через апериодическое звено:

$$P(s) = \frac{1}{T_{дв}s + 1} P_{уст}(s), \tag{18}$$

где $T_{дв}$ — постоянная времени двигателя, s — комплексная переменная преобразования Лапласа.

Вернемся к уравнению (1) движения самолета по скорости полета, будем рассматривать его в линеаризованном виде [11] относительно исходной скорости V_0. Тогда, с учетом (10), (15), (17) и (18), а также при малом угле наклона траектории $\sin\theta = \theta$, объект управления скоростью полета самолета при условии (3) может быть записан в виде:

$$\begin{cases} \Delta\dot{V} = g\left[n_{x_P} - n_{x_{бал}}(V_0) - k_{n_x}^V \cdot \Delta V - \theta\right], \\ \dot{n}_{x_P} = -\dfrac{1}{T_{дв}} n_{x_P} + \dfrac{1}{T_{дв}} k_{n_{x_{P_{уст}}}}^{РУД} \delta_{РУД}, \quad k_{n_{x_{P_{уст}}}}^{РУД} = \dfrac{\overline{P}_0^{\delta_{РУД}} + k_P^H \cdot H}{G_{ср}}, \end{cases} \tag{19}$$

где $k_{n_{x_{P_{уст}}}}^{РУД}$ — передаточный коэффициент порции отклонения РУД в приращение установившейся тангенциальной перегрузки, $\overline{P}_0^{\delta_{РУД}}$ — осредненная производная тяги по РУД на нулевой высоте, k_P^H — коэффициент необходимого прироста тяги на приращение отклонения РУД от высоты для создания единичного ускорения $n_{x_{P_{уст}}}$. Понятно, что часть общей тяги задействуется на балансировку самолета по скорости до начала разгона (торможения). Структурная схема объекта управления для синтезируемого автомата тяги, соответствующая системе (19), показана в изображении Лапласа на рис. 1.

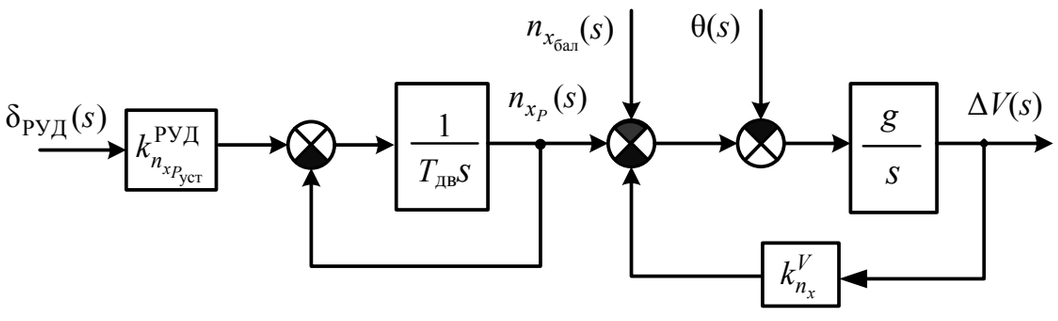

Рис. 1. Структурная схема объекта управления автомата тяги

Обратим внимание на коэффициент $k_{n_x}^V$ обратной связи, при которой объект управления самолета по скорости формируется как апериодическое звено с постоянной времени:

$$T_V = \frac{1}{g k_{n_x}^V}. \tag{20}$$

В силу того что коэффициент $k_{n_x}^V$, согласно (8) и (14), имеет чрезвычайно малую величину, постоянная времени (20), например, для тяжелого транспортного самолета, может составлять 70-100 секунд для гладкого крыла и 50-60 секунд при выпущенной механизации крыла (закрылками). Поэтому можно считать модель самолета в течение времени разгона (торможения), которое существенно меньше времени переходного процесса нарастания лобового сопротивления из-за изменения скорости, интегральным звеном. Одновременно следует отметить в качестве объяснения указанного эффекта следующее: с ростом скорости наблюдается уменьшение балансировочного угла атаки для обеспечения условия (3), что практически незначительно увеличивает силу лобового сопротивления самолета. После разгона отклоненные для его выполнения РУДы фактически возвращаются в балансировочное положение, близкое к исходному. При торможении процесс имеет аналогичный характер.

Поэтому рассмотрим в качестве базовой структуры синтезируемой системы управления скоростью с помощью АТ замкнутый контур с «идеальным» объектом при безынерционном возникновении тяги. Будем считать точно известными ВСХ двигателей, тогда контур управления можно строить в размерности продольного ускорения, «мгновенно» отрабатываемого двигателями. С учетом особенности незначительного изменения лобового сопротивления самолета при изменении скорости имеет место необходимость использования астатического закона управления скоростью полета, обеспечивающего высокоточную установку РУД в новое балансировочное положение для отрабатываемой контуром заданной скорости полета $V_{зад}$.

Тогда следует подчеркнуть, что, в связи с наличием интегрального звена в системе управления, принципиально существует возможность накопления сигнала заданной перегрузки для обеспечения равновесного состояния $\dot{V} = 0$ с установлением балансировочной тяги после переходного движения. В результате можно вернуться в замкнутом контуре управления от представления объекта в приращениях (19) к полным уравнениям управления скоростью полета без их относительного разделения на опорное (V_0) и возмущенное движение (ΔV), как это предложено в [12].

В указанном варианте рассмотрения замкнутой системы допускается использование передаточных функций в изображениях полных переменных уравнений движения. Это объясняется тем, что динамические характеристики системы одинаково определяются и тривиальным решением дифференциальных уравнений (в приращениях), и решением в окрестности любой точки равновесия системы из области ее существования [13]. Передаточная функция системы для любого установившегося состояния всегда при наличии интеграла в прямой цепи регулирования имеет нулевые начальные условия по ошибке управления. Это позволяет использовать формат рассмотрения системы в виде передаточных функций, связывающих заданную и текущую скорости полета. Интеграл Дюамеля вынужденного движения, переводящий устойчивую линейную динамическую систему в новую точку равновесия, после завершения переходного процесса равен величине установившейся координаты движения (в нашем случае — скорости). Возмущенное движение системы в этой точке будет совпадать с возмущенным движением однородной системы.

В простейшем случае система уравнений (1) при горизонтальном полете самолета $(\theta = 0)$ и безынерционном АТ, переводящем заданное тангенциальное ускорение $n_{x_e}^{\text{зад}}$ в текущее n_{x_e}, с интегральным законом управления имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{V} = g n_{x_e}, \\ n_{x_e} = n_{x_e}^{\text{зад}} = k_{\Delta V} \Delta V + k_{\text{и}} \int\limits_0^t \Delta V d\tau, \quad \Delta V = V_{\text{зад}} - V, \end{cases} \tag{21}$$

где $k_{\Delta V}$ и $k_{\text{и}}$ — передаточные коэффициенты соответственно по сигналу отклонения скорости и его интегралу. Тогда получим передаточную функцию, соответствующую системе (21), а именно:

$$W_V^{V_{\text{зад}}}(s) = \frac{g k_{\Delta V} s + g k_{\text{и}}}{s^2 + g k_{\Delta V} s + g k_{\text{и}}}. \tag{22}$$

Не представляет труда рассчитать коэффициенты закона управления для получения устойчивой системы с заданным качеством регулирования. Однако появление нуля $\frac{k_{\Delta V}}{k_{\text{и}}}$ в числителе передаточной функции (22) означает появление значительного перерегулирования при ступенчатом входном сигнале заданной скорости.

Перерегулирование по скорости при относительном коэффициенте затухания 0,7 может достигать 20% от величины входной заданной скорости, что неприемлемо при выходе самолета на скорости, близкие к предельно допустимым.

Понятно, что возможная компенсация нуля передаточной функции (22) путем выбора передаточных коэффициентов $k_{\Delta V}$ и $k_{\text{и}}$ является невозможной, так как при данной структуре системы ее характеристический полином не делится без остатка на полином числителя. Единственным способом компенсации нуля является введение в контур управления отрицательной обратной связи по текущей скорости полета с передаточным коэффициентом k_V, как показано в минимально достаточной для решения этой задачи структуре на рис. 2.

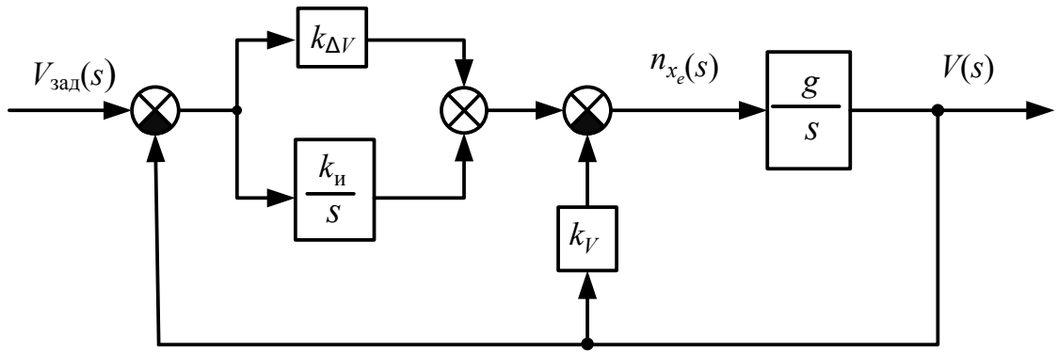

Рис. 2. Структурная схема идеального контура автомата тяги

По-видимому, впервые вопрос построения минимально-функциональной структуры системы стабилизации самолета с указанием на способ компенсацию нулей передаточных функций САУ самолетов был предложен в работе [14], в которой проведено исследование первичных структур законов управления.

Структуре замкнутой системы управления скоростью (рис. 2) соответствует следующая передаточная функция:

$$W_{V_{\text{ид}}}^{V_{\text{зад}}}(s) = \frac{g k_{\Delta V} s + g k_{\text{и}}}{s^2 + g\left(k_{\Delta V} + k_V\right) s + g k_{\text{и}}}. \tag{23}$$

Квадратный трехчлен знаменателя в выражении (23) допускает деление без остатка на линейный двучлен числителя. В результате характеристический полином имеет разложение в виде произведения двучленов, в одном из которых корнем (полюсом) будет корень (ноль) полинома числителя.

Действительно, нетрудно убедиться, что:

$$s^2 + g\left(k_{\Delta V} + k_V\right)s + gk_{\text{и}} = \left(\frac{1}{gk_{\Delta V}}s + 1\right)\left(gk_{\Delta V}s + gk_{\text{и}}\right)$$

при выполнении равенства

$$k_V = \frac{k_{\text{и}}}{gk_{\Delta V}}. \qquad (24)$$

Тогда передаточная функция (23) по входному сигналу $V_{\text{зад}}$ упрощается и принимает вид апериодического звена

$$W_V^{V_{\text{зад}}}(s) = \frac{1}{T_V + 1}, \quad T_V = \frac{1}{gk_{\Delta V}}, \qquad (25)$$

где T_V — постоянная времени идеального контура управления скоростью, желаемое значение которой определяется коэффициентом $k_{\Delta V}$. Постоянная времени T_f форсирующего звена полной системы устанавливается соотношением

$$T_f = \frac{k_{\Delta V}}{k_{\text{и}}} \qquad (26)$$

и определяется коэффициентом $k_{\text{и}}$ интегрального звена после назначения желаемой постоянной времени T_V. Тогда закон управления с компенсационной составляющей обратной связи по скорости примет вид:

$$n_{x_e} = k_{\Delta V}\Delta V + k_{\text{и}}\int_0^t \Delta V d\tau + k_V V. \qquad (27)$$

Следует сказать, что для других точек входа возмущения в структуре (рис. 2) характеристическое уравнение в приведенном виде будет полным и представлять произведение двух сомножителей

$$\left(T_V + 1\right)\left(T_f + 1\right). \qquad (28)$$

Поэтому при выборе значения T_f следует учитывать, что время переходного процесса реакции системы с характеристическим уравнением (28) на возмущение может при близких постоянных времени $T_V \approx T_f$ возрасти в 1,6 раза.

Структуру и правило назначения параметров закона управления скоростью (27) с помощью изменения тяги будем считать базовыми.

Рассмотрим возможность реализации этого закона управления с учетом инерционных характеристик двигателя (18) и исполнительного механизма автомата тяги (ИМАТ), который описывается апериодическим звеном

$$W_{\delta_{\text{РУД}}}^{\delta_{\text{РУД}}^{\text{зад}}}(s) = \frac{1}{T_{\text{АТ}}s + 1}, \qquad (29)$$

где $T_{\text{АТ}}$ — постоянная времени исполнительного механизма АТ. Закон управления (27) формирует заданную тангенциальную перегрузку, для получения которой необходимо отклонить РУД с созданием тяги, обеспечивающей требуемую перегрузку. Согласно (17), заданное положение РУД выражается в виде:

$$\delta_{\text{РУД}}^{\text{зад}} = \frac{G_{\text{ср}}}{\overline{P}_{\text{уст}}^{\delta_{\text{РУД}}}\left(H\right)} n_{x_{P_{\text{уст}}}}^{\text{зад}}.$$

Однако даже при точном соответствии ВСХ реальным характеристикам, после отработки ИМАТ заданного положения РУД этому положению будет соответствовать тангенциальная перегрузка при текущей массе $G \in \left[G_{\text{мин}}, G_{\text{макс}}\right]$, в общем случае не совпадающей со средней массой $G_{\text{ср}}$. Так как тяга и ее приращения создаются вдоль продольной оси установки двигателей, передаточный коэффициент между заданной и полученной перегрузками (назовем его коэффициентом усиления), в том числе и по указанной выше причине, отличен от единицы, а именно:

$$n_{x_{P_{\text{уст}}}} = k_{\text{ус}} n_{x_{P_{\text{уст}}}}^{\text{зад}}, \; k_{\text{ус}} = \frac{G}{G_{\text{ср}}}\cos\left(\alpha + \varphi_{\text{дв}}\right)n_{x_e}, \quad k_{\text{ус}} \in \left[0{,}7; 1{,}3\right]. \qquad (30)$$

Коэффициент усиления из (30) может находиться в интервале значений 0,7...1,3 в зависимости от варианта загрузки самолета и режима полета, являясь практически единичным для средней массы при малых величинах угла атаки и угла установки двигателей.

Далее, для учета физически существующей обратной связи объекта управления по скорости полета на основании (15) и (10) справедливо следующее представление тангенциального ускорения от действия силы лобового сопротивления:

$$n_{x_Q} = k_{n_x}^V V - \Delta n_{x_{\text{бал}}}^*, \quad \Delta n_{x_{\text{бал}}}^* = \frac{\left(c_{x_0} + \Delta c_{x_{\text{закр}}}\right)\rho_H V_0^2 S_{\text{кр}}}{2G},$$

где $\Delta n_{x_{\text{áàë}}}^*$ — поправка в балансировке, зависящая от начальной скорости полета.

Теперь все готово для построения полного линейного замкнутого контура управления скоростью с использованием автомата тяги. На основании (19), (25), (27), (29) и (30) сформируем следующую структурную схему (рис. 3).

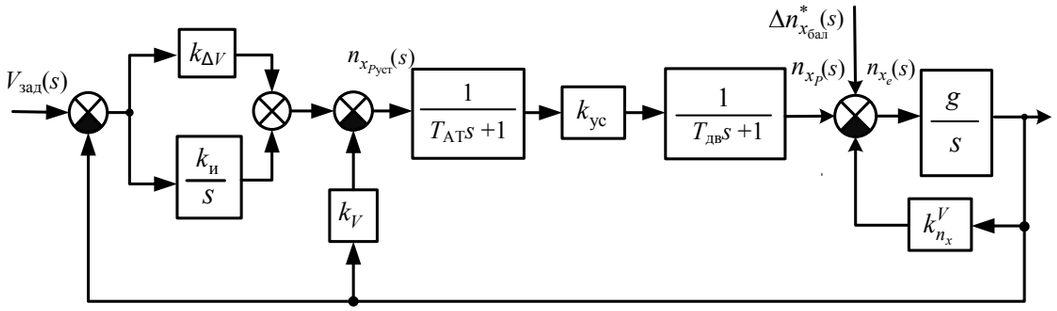

Рис. 3. Структура контура управления скоростью с автоматом тяги

Передаточная функция, соответствующая структуре (рис. 3), имеет вид:

$$W_V^{V_{зад}}(s)=\frac{gk_{ус}\left(k_{\Delta V}s+k_и\right)}{A_4s^4+A_3s^3+A_2s^2+A_1s+A_0},$$

$$A_4=T_{AT}T_{дв},\ A_3=T_{AT}+T_{дв}+gk^V_{n_x}T_{AT}T_{дв},\ A_2=gk^V_{n_x}\left(T_{AT}+T_{дв}\right)+1, \quad (31)$$

$$A_1=g\left[k^V_{n_x}+k_{ус}\left(k_{\Delta V}+k_V\right)\right],\quad A_0=gk_{ус}k_и.$$

Проведем деление без остатка характеристического полинома передаточной функции (31) на полином числителя, в результате получим полином третьего порядка и сопровождающее его уравнение, обеспечивающее нулевой остаток процедуры деления, а именно:

$$\begin{cases}\dfrac{T_{АТ}T_{дв}}{gk^*_{ус}k^*_{\Delta V}}s^3+\dfrac{b_2}{gk^*_{ус}k^*_{\Delta V}}s^2+\dfrac{b_1}{gk^*_{ус}k^*_{\Delta V}}s+1,\\ gk^V_{n_x}+gk^*_{ус}k^*_V-\dfrac{k^*_и}{k^*_{\Delta V}}b_1=0,\\ b_1=gk^V_{n_x}\left(T_{АТ}+T_{дв}\right)+1-\dfrac{k^*_и}{k^*_{\Delta V}}b_2,\ b_2=T_{АТ}+T_{дв}+T_{АТ}T_{дв}\left(gk^V_{n_x}-\dfrac{k^*_и}{k^*_{\Delta V}}\right),\end{cases} \quad (32)$$

где $k^*_V, k^*_и, k^*_{\Delta V}, k^*_{ус}$ — коэффициенты, одноименные с коэффициентами закона управления (27), которые должны удовлетворять уравнению нулевого остатка в (32) и в такой постановке вопроса являются неизвестными.

Заметим, что отмеченный звездочкой «неизвестный» коэффициент усиления $k^*_{ус}$ будем рассматривать в задаче компенсации нуля передаточной функции (31) как варьируемый относительно единицы.

Анализ выражений (32) и избыточность переменных в уравнении нулевого остатка допускают возможность сохранения неизменными коэффициентов идеального контура

$$k^*_{\Delta V}=k_{\Delta V},\ k^*_и=k_и,\ k^*_V=k_V. \quad (33)$$

Выполнение равенств (33) обеспечивает аналитическую разрешимость уравнения нулевого остатка в (32), которое при этом становится линейным относительно неизвестной переменной $k^*_{ус}$. Это уравнение имеет решение:

$$k^*_{ус}=\frac{\left(k_и-gk^V_{n_x}k_{\Delta V}\right)\left(k_{\Delta V}-k_иT_{AT}\right)\left(k_{\Delta V}-k_иT_{дв}\right)}{gk_{\Delta V}k_V^3}. \quad (34)$$

Проверим устойчивость и качество характеристического полинома третьего порядка (32) для передаточной функции пониженного (по входному сигналу) порядка по сравнению с исходным четвертым порядком системы (31). Проверку будем проводить методом разложения на сомножители. В любом случае в разложении будет присутствовать линейный двучлен. Полагая второй сомножитель в общем случае «колебательным» полиномом второго порядка, представим разложение в виде:

$$\frac{T_{АТ}T_{дв}}{gk^*_{ус}k_{\Delta V}}s^3+\frac{b_2}{gk^*_{ус}k_{\Delta V}}s^2+\frac{b_1}{gk^*_{ус}k_{\Delta V}}s+1=\left(T_1s+1\right)\left(T_2^2s^2+2\xi_2T_2s+1\right), \quad (35)$$

где T_1, T_2 — неизвестные постоянные времени, ξ_2 — неизвестный относительный коэффициент затухания.

Для этого проведем повторное деление нацело полинома (32) на линейный двучлен $\left(T_1s+1\right)$ и определим условия его разложения в виде уравнения, гарантирующего нулевой остаток. В результате получим:

$$\begin{cases}\dfrac{T_{АТ}T_{дв}}{gk^*_{ус}k_{\Delta V}T_1}s^2+\dfrac{1}{gk^*_{ус}k_{\Delta V}T_1}\left(b_2-\dfrac{T_{АТ}T_{дв}}{T_1}\right)s+1,\\ \dfrac{b_1}{gk^*_{ус}k_{\Delta V}}-\dfrac{1}{gk^*_{ус}k_{\Delta V}T_1}\left(b_2-\dfrac{T_{АТ}T_{дв}}{T_1}\right)-T_1=0.\end{cases} \quad (36)$$

В (36) все параметры известны, за исключением постоянной времени T_1, относительно которой это уравнение будет уравнением третьего порядка

$$gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}T_1^3 - b_1T_1^2 + b_2T_1 - T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}} = 0. \qquad (37)$$

Уравнение (37) имеет действительный корень

$$T_1 = \sqrt[3]{A+B} - \frac{\left(b_2 - \frac{b_1^2}{3b_2^3}\right)}{3gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}\sqrt[3]{A+B}} + \frac{b_1}{3gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}},$$

$$A = \frac{b_1^3}{27\left(gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}\right))^3} - \frac{b_1b_2}{6\left(gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}\right)^2} + \frac{T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}}{2gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}}, \qquad (38)$$

$$B = \sqrt{\frac{b_2^3 - \frac{b_1^2b_2^3}{4gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}}}{27\left(gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}\right)^3} + \frac{T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}}{gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}}\left(A - \frac{T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}}{4gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}}\right)}.$$

Из сравнения (36) и (35) при найденных T_1 и $k^*_{\text{ус}}$ (34) находим постоянную времени и относительный коэффициент затухания для полинома второго порядка

$$T_2 = \sqrt{\frac{T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}}{gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}T_1}}. \qquad \xi_2 = \frac{b_2 - \frac{T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}}{T_1}}{2\sqrt{gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}T_1T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}}}. \qquad (39)$$

Тогда передаточная функция (31) замкнутого контура, астатического по входной заданной скорости, автомата тяги, с учетом полученных параметров (38), (39), примет вид:

$$W_V^{V_{\text{зад}}}(s) = \frac{1}{(T_1s+1)\left(T_2^2s^2 + 2\xi_2T_2s + 1\right)}. \qquad (40)$$

Отсутствие колебательной пары корней $(\xi_2 > 1)$ гарантирует неравенство

$$T_1\left(b_2 - 2\sqrt{gk^*_{\text{ус}}k_{\Delta V}T_1T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}}\right) > T_{\text{АТ}}T_{\text{дв}}. \qquad (41)$$

Неравенство (41) в силу громоздкости выражений входящих в него компонентов может быть проверено численно. В случае его невыполнения необходимо уточнить исходные задаваемые постоянные времени T_V и T_f для корректировки по формулам (24), (25) и (26) коэффициентов $k_{\Delta V}, k_{\text{и}}$ и k_V, обеспечивая при этом $\xi_2 \geq 0,7$.

Рассмотрим на примере тяжелого транспортного самолета применение рассмотренного подхода к синтезу автомата тяги. Пусть для средней массы задан режим полета V = 100 м/с, H = 1000 м, угол отклонения закрылков $\delta_{\text{закр}}$ = 0. Для этого варианта $k_{n_x}^V = 0,0012$ м$^{-1}$с. Постоянные времени привода автомата тяги и приемистости двигателей равны $T_{\text{АТ}}$ = 0,5 с и $T_{\text{ДВ}}$ = 1,1 с. Все исходные параметры заданы, определимся с постоянными времени идеального контура: T_V = 7 с и T_f = 7 с. На основании формул (25), (26), (27), (38), (39) получаем следующие параметры передаточной функции (40), а именно

$$T_1 = 4,8 \text{ с}, \quad T_2 = 1,05 \text{ с}, \quad \xi_2 = 1,34\ . \qquad (42)$$

В силу полученных параметров (42) полином второго порядка в (40) распадается на два сомножителя первого порядка с постоянными времени:

$$T_{21} = T_2\left(\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 1}\right) = 2,345 \text{ с}, \quad T_{22} = T_2\left(\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 1}\right) = 0,462 \text{ с}. \qquad (43)$$

Тогда, с учетом (42) и (43), передаточная функция (40) содержит только действительные корни и имеет следующее представление

$$W_V^{V_{\text{зад}}}(s) = \frac{1}{(4,8s+1)(2,345s+1)(0,462s+1)}. \qquad (44)$$

На рис. 4 показан переходный процесс отработки контуром (44) приращения заданной скорости 40 км/ч.

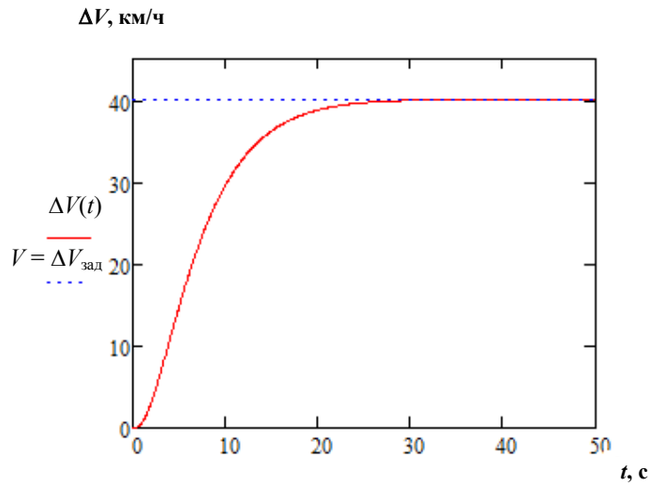

Рис. 4. Переходный процесс выхода самолета на заданную скорость с помощью астатического автомата тяги

В подтверждение достоверности правильной работы предложенного автомата тяги было проведено моделирование разгонов (торможений) на полной модели самолета с включенным режимом стабилизации высоты. Результаты моделирования для указанного выше режима полета показаны на рис. 5.

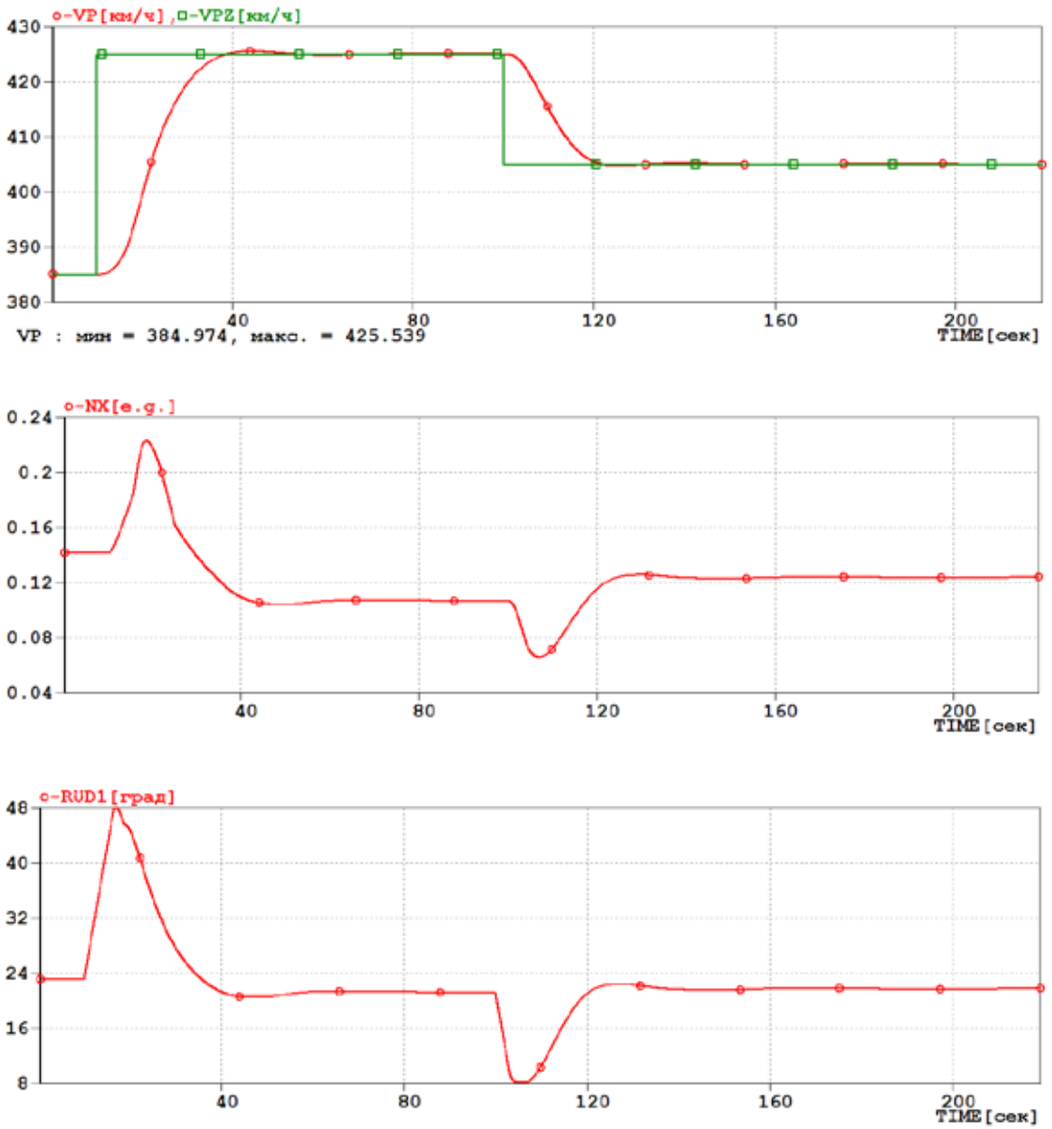

Рис. 5. Переходные процессы разгона (торможения) по приборной скорости в крейсерской конфигурации при включенном режиме «Стабилизация барометрической высоты» в продольном канале управления

Сравнение рис. 1 и рис. 2 показывает фактически полное совпадение результатов расчетного и модельного экспериментов.

Таким образом, предложен метод аналитического синтеза системы управления скоростью полета с желаемыми для тяжелых самолетов динамическими характеристиками автомата тяги.

Литература

1. Самолет Ил-76ТД. Инструкция по технической эксплуатации. Часть 5, глава 57. Система автоматического управления (САУ-1Т-2БТ). Раздел 57-30-35. Автомат тяги. 1978.

2. Автоматическая бортовая система управления АБСУ-154-2. Руководство по технической эксплуатации. Часть 3. Автомат тяги АТ-6-2. 1984.

3. Самолет ТУ-204-300.Руководство по летной эксплуатации. Книга первая. Раздел 8.16.2. Вычислительная система управления тягой двигателей ВСУТ-85-3. – ОАО «Туполев». 2005.

4. Михалев И. А., Окоемов Б. Н., Павлина И. Г., Чикулаев М. С., Эйдинов Н.М. Системы автоматического управления самолетом. Методы анализа и расчета. – М.: Машиностроение, 1971, 464 с.

5. Харьков В. П., Халютин С. П. Управление вектором скорости летательного аппарата на основе энергетического подхода// Научный вестник МГТУ ГА. 2015. № 213. С. 73-80.

6. Кулифеев Ю. Б., Миронова М. М. Моделирование автоматического управления скоростью и высотой полета беспилотного летательного аппарата // Проблемы безопасности полетов/ Москва, 2016. № 5. С. 25-40.

7. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. – М.: Издательство стандартов, 1981, 54 с.

8. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, переработанное и доп. – М., «Машиностроение», 1973, 616 с.

9. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: учеб. пособие для авиац. вузов./ Под ред. А. А. Лебедева. – М.: Оборонгиз, 1962. — 286 с.

10. Боднер В. А., Рязанов Ю. А., Шаймарданов Ф. А. Системы автоматического управления двигателями летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973. — 247 с.

11. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1965. — 467 с.

12. Аэромеханика самолета. Учебник для авиационных вузов. Под ред. канд. техн. наук доц. А. Ф. Бочкарева, М.: Машиностроение, 1977. — 416 с.

13. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2-е изд., испр. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с.

14. Системы автоматического управления самолетом/ И. А. Михалев, Б. Н. Окоемов, М. С. Чикулаев. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1987. — 240 с.

УДК 629.7.05

КОМПЛЕКСНАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В БОРТОВОМ НАВИГАЦИОННОМ КОМПЛЕКСЕ БПЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ОДНОВРЕМЕННОЙ НАВИГАЦИИ И СОСТАВЛЕНИЯ КАРТЫ (SLAM)

Ф. Г. ПАДЕРИН
ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Применение метода одновременной навигации и составления карты при комплексной обработке информации в бортовом навигационном комплексе позволяет осуществлять навигацию в условиях плохого приема или отсутствия сигнала ГНСС. В работе рассматривается возможность использования измерений лазерного радара для вычисления координат точки места БПЛА и углов его ориентации, осуществления картографирования подстилающей поверхности и навигации в относительном режиме, предложен вариант комплексирования БИНС и лазерного радара по слабосвязанной схеме с использованием оптимального фильтра Калмана.

Ключевые слова: *беспилотный летательный аппарат (БПЛА), бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), метод одновременной локализации и построения карты (SLAM), лазерный радар (лидар), фильтр Калмана.*

INTEGRATED DATA PROCESSING IN UAV ONBOARD NAVIGATION SYSTEM BASED ON SIMULTANEOUS LOCALIZATION AND MAPPING (SLAM) METHOD

F. G. PADERIN
'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The use of simultaneous localization and mapping (SLAM) method during integrated data processing in onboard integrated navigation system provides navigation in the areas with low or absence of GNSS signal availability. This paper considers the Lidar (laser radar) applicability for UAV positioning and angles computations, ground mapping and navigation in relative mode. The Strapdown INS (SINS) and laser radar integration based on loosely coupled scheme with the optimal Kalman filter is proposed.

Keywords: *Unmanned Air Vehicle (UAV), Strapdown INS (SINS), simultaneous localization and mapping (SLAM) method, laser radar (Lidar), Kalman filter.*

Введение

В настоящее время широкое распространение получил способ построения бортовых навигационных комплексов (БНК) на основе слабосвязанной схемы комплексирования бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), построенной на микромеханических инерциальных измерителях, и приемника глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) с одной или несколькими антеннами, работающего в кодовом, дифференциальном или фазовом режимах. Применение оптимального фильтра Калмана позволяет оценивать дрейф гироскопов и постоянную случайную составляющую погрешности ГНСС. Такая связка позволяет определять с высокой точностью координаты точки местоположения БПЛА и углы его ориентации, при этом дрейф гироскопов и постоянные случайные составляющие принимаемого сигнала ГНСС постоянно оцениваются и компенсируются.

Слабым местом БНК с таким составом является зависимость от наличия и качества принимаемого сигнала ГНСС. На прием сигнала могут влиять такие факторы, как недостаточная видимость спутников созвездия и многолучевость в условиях городской застройки и гористой местности, срыв захвата сигнала вследствие высоких угловых скоростей БПЛА и наличие помех на частоте приема сигнала. В отсутствии сигнала ГНСС оптимальный фильтр Калмана расходится, БИНС работает без коррекции.

Для обеспечения непрерывности решения навигационной задачи в условиях отсутствия поступления измерений от приемника ГНСС в работе рассматривается возможность использования системы технического зрения и алгоритмов обработки изображений, используемых при осуществлении навигации с помощью метода одновременной локализации и построения карты (SLAM – Simultaneous Localization and Mapping).

Алгоритмы SLAM

Алгоритмы SLAM решают задачу построения и обновления карты окружающего пространства на основе измерений с одновременным контролем текущего местоположения и пройденного пути. В большинстве методов решения задачи SLAM используются видеокамеры и/или лидары. В основном можно выделить две группы алгоритмов: первая включает в себя алгоритмы, выделяющие в получаемых изображениях опорные точки и грани, а вторая охватывает алгоритмы, обрабатывающие изображения целиком.

Алгоритмы первой группы обрабатывают изображение в два этапа. На первом этапе выявляются точки или грани, а на втором на основе сформированного набора характеристик изображения происходит оценка положения, ориентации и перемещения объекта. Такой подход позволяет упростить алгоритмическое решение задачи и снизить требования к вычислительным ресурсам. В то же время работа лишь с частью изображения потенциально отсекает доступную информацию, приводя к ситуации, когда пригодные для оценки характеристики изображения не используются, т. к. не проходят по критериям отбора.

Алгоритмы второй группы восстанавливают геометрические характеристики окружающего пространства по изображениям с помощью информации о контрастности и интенсивности отдельных областей изображения. Такой подход требует больших, по сравнению с первой группой, вычислительных ресурсов, однако работа с изображением целиком позволяет решать задачу SLAM в условиях отсутствия достаточного количества опорных точек или граней.

Решение задачи SLAM в общем случае не подразумевает работы в режиме реального времени. Однако для коррекции БИНС на борту движущегося БПЛА работа алгоритмов SLAM в режиме реального времени является необходимым условием. Одной из основных проблем при одновременном определении местоположения и картографировании с помощью алгоритмов SLAM, основывающихся на обработке изображений, является оценка положения подвижного основания в режиме реального времени без проведения прямых измерений дальностей.

Существующие решения

Ниже приведены несколько работ, описывающих методы решения задачи SLAM в режиме реального времени.

Возможность использования измерений, полученных с помощью стереокамеры, закрепленной на подвижном основании, рассмотрена в работе [1]. Авторы используют приведенный ими алгоритм для решения задачи SLAM в режиме реального времени, используя для вычислений процессор Intel i7-2600k 3,4 ГГц, при этом на обработку кадра разрешением 1240×368 пикселей тратится 103 мс.

В работе [2] авторы используют связку из широкоугольной монохромной камеры, работающей с частотой 60 Гц, и лидара с максимальной дальностью работы 30 м, совершающего полный цикл сканирования за 1 с. Подход авторов заключается в использовании двух одновременно работающих алгоритмов. Первый алгоритм обрабатывает изображения, поступающие с камеры, и с частотой в 60 Гц рассчитывает перемещения между двумя последовательными кадрами, используя алгоритм Левенберга — Марквардта.

Второй алгоритм с частотой в 1 Гц компенсирует внесенные в измерения лидара искажения, вызванные движением основания, на котором он закреплен, и рассчитывает перемещение между облаком точек, сформированным на прошлом шаге и измеренным на текущем. Рассчитанное на основе измерений лидара перемещение используется для коррекции оценки местоположения в первом алгоритме. При экспериментальном подтверждении предложенного метода вычисления проводились на 4-х ядерном процессоре с частотой работы 2,5 ГГц, при этом расчет первого алгоритма полностью загружает два ядра из четырех, а расчет второго алгоритма загружает одно ядро наполовину.

В работе [3] не используются алгоритмы SLAM в чистом виде, т. к., по условиям эксперимента, авторы считают трехмерную карту окружающего пространства заранее известной. Однако комплексирование БИНС и лидара позволило авторам получить систему, способную адекватно оценивать вектор состояния при угловых скоростях до 360 градусов в секунду. Модель БИНС авторы описывают, используя расширенный фильтр Калмана, а для интеграции измерений лидара, нелинейных по своей природе, применяют многочастичный фильтр Гаусса (Gaussian Particle Filter [4]). Т. к. многочастичный фильтр является более требовательным к вычислительным ресурсам, чем расширенный фильтр Калмана, он применяется только для формирования псевдоизмерений в модели БИНС. Принимая во внимание, что для вычислений в режиме реального времени использовался компьютер на базе Intel Atom 1,6 ГГц, расположенный на борту БПЛА, можно сделать вывод о невысокой вычислительной нагрузке конечного алгоритма.

Рассматривая описанные выше примеры реализации систем измерений с точки зрения решения задачи коррекции БИНС в условиях отсутствия поступления измерений от приемника ГНСС, можно сделать следующие выводы:

1. Используемый в работе [1] алгоритм при проведении расчетов на современном процессоре выполняется с частотой не более 10 Гц. Стереокамеры обладают ограниченным рабочим диапазоном по дальности. Такие характеристики накладывают ограничения на максимальные линейные и угловые скорости БПЛА, при которых этот алгоритм можно использовать для коррекции БИНС.
2. Используемый в работе [2] алгоритм обработки изображений работает с частотой 60 Гц, что является достаточным для БПЛА, однако его точность зависит от своевременной коррекции с помощью алгоритма, обрабатывающего измерения лидара, который работает с частотой 1 Гц. Следовательно, при высоких угловых скоростях погрешность в первом алгоритме будет быстро накапливаться, сбрасываясь раз в секунду, что затрудняет оценку вектора состояния системы.
3. Используемая в работе [3] связка БИНС и лидар хорошо подходит для решения задачи коррекции БИНС, т. к. не требует использования алгоритмов сравнения изображений, являющихся требовательными к вычислительным ресурсам.

Связка БИНС и лидар выглядит наиболее перспективно, однако в случае заранее известной трехмерной карты местности вопрос картографирования остается открытым.

Флэш лидар

Использование лидара вместо камер позволяет напрямую получать измерения о дальности до опорных точек, граней и поверхностей. Однако применение сканирующего лидара на подвижном основании неизбежно вносит искажения в получаемые измерения, которые потом необходимо определять и компенсировать. Недавно появившийся новый тип лидара, обозначаемый как флэш лидар, хорошо подходит под задачу картографирования. Флэш лидар отличается от традиционного тем, что в качестве регистратора отраженного излучения использует не один фотодиод, а матрицу из фотодиодов на основе арсенида галлия-индия. Флэш лидар Advanced Scientific Concepts GoldenEye 3D Flash LIDAR имеет матрицу 128×128 фотодиодов, позволяя одномоментно делать снимок, содержащий 16384 измерений дальности. Данный флэш лидар работает с частотой 10 Гц и имеет смещение нуля ±10 см. Размеры 14,5×21,6×14 см, вес 6,5 кг.

Коррекция БИНС

Каждый измеренный с помощью флэш лидара кадр без дополнительной обработки несет информацию об опорных точках, гранях и плоскостях, т. к. дальность до них измерена напрямую. Любой отличающейся от соседей по дальности «пиксель» может быть использован для отслеживания относительного перемещения БПЛА. Используя граф, состоящий из измеренных флэш лидаром кадров, можно отслеживать перемещение и ориентацию БПЛА относительно выбранной системы координат. Для определения трансформации, описывающей изменение между взаимными положениями опорных точек в двух последовательных кадрах, можно использовать итеративный алгоритм ближайших точек (ICP [5]). Зная изменения между взаимными положениями опорных точек, можно восстановить перемещение и ориентацию БПЛА между двумя измеренными кадрами, а следовательно, определить положение

и ориентацию кадра в навигационной системе координат и добавить измеренный кадр в граф. Таким образом, используя измерения флэш лидара и алгоритм SLAM, использующий для представления карты граф с расположенными в нем в соответствии со своими координатами и углами ориентации кадры, можно осуществлять относительную навигацию без привязки к глобальным координатам.

Схема коррекции БИНС представлена на рис. 1. Измеряемые в БИНС проекции линейной и угловой скоростей на оси навигационного базиса используются для прогноза смещения набора опорных точек относительно предыдущего кадра, полученный прогноз сравнивается с текущим кадром.

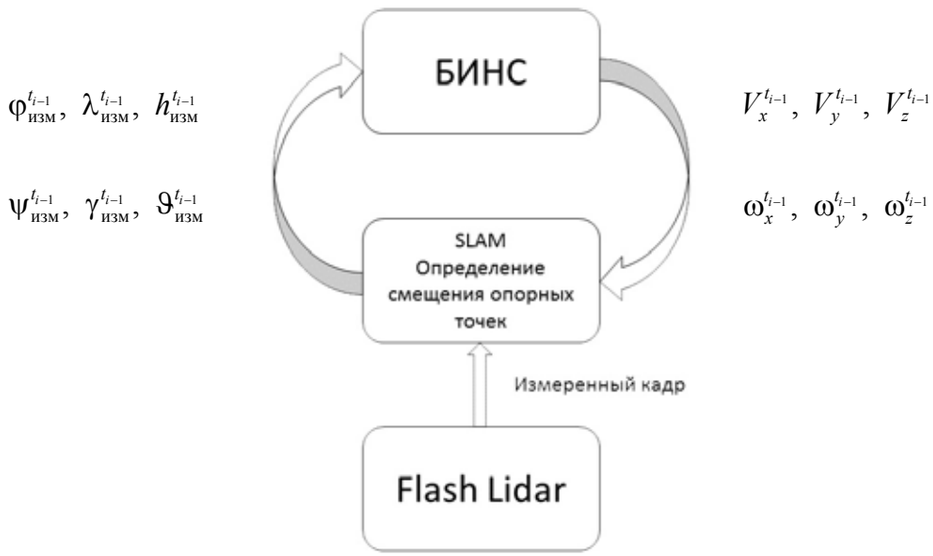

Рис. 1. Схема коррекции БИНС с помощью измерений флэш лидара

Для идентификации одной и той же опорной точки на двух кадрах используется информация о взаимном расположении опорных точек. Т. к. прогнозируемый и измеренный кадры будут неизбежно отличаться, процесс наложения происходит до попадания в выбранный доверительный интервал. Пример сопоставления измеренного и спрогнозированного кадров представлен на рисунке 2.

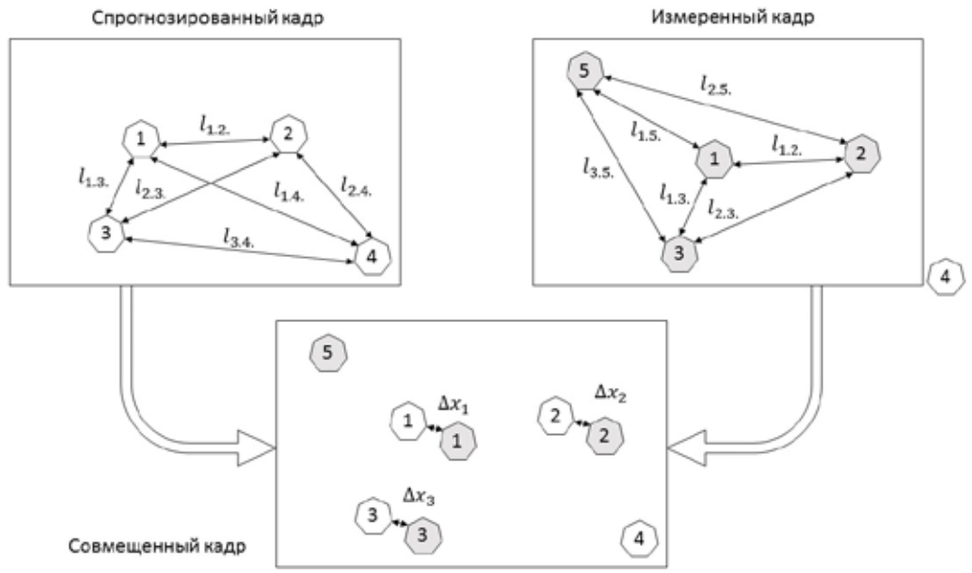

Рис. 2. Сопоставление измеренного и спрогнозированного кадров

После успешной идентификации опорных точек, присутствующих в обоих кадрах, точки, не прошедшие идентификацию, получают статус кандидата и сравниваются с близлежащими точками, не вошедшими в оба кадра: при отсутствии таких точек или их несовпадении с точкой-кандидатом, последняя заносится в базу данных с записью ее координат в выбранной навигационной системе координат. Таким образом, формируется цифровая трехмерная карта окружающего пространства. После обработки всех опорных точек в измеренном кадре рассчитываются координаты точки местоположения БПЛА и его углы ориентации в выбранной навигационной системе координат. На основе измеренного кадра и рассчитанных координат и углов ориентации БПЛА формируется вектор измерений. Сформированный вектор измерений используется в оптимальном фильтре Калмана для оценки вектора состояния. Полученные оценки затем используются для коррекции погрешностей в измерениях БИНС, вызванных дрейфом гироскопов. Кроме формирования вектора измерений, возможно формирование вектора поправок в случае, если средняя дельта между соответствующими опорными точками спрогнозированного и измеренного кадров больше определенной величины.

На рисунке 3 представлена слабосвязанная схема комплексирования с оптимальным фильтром Калмана.

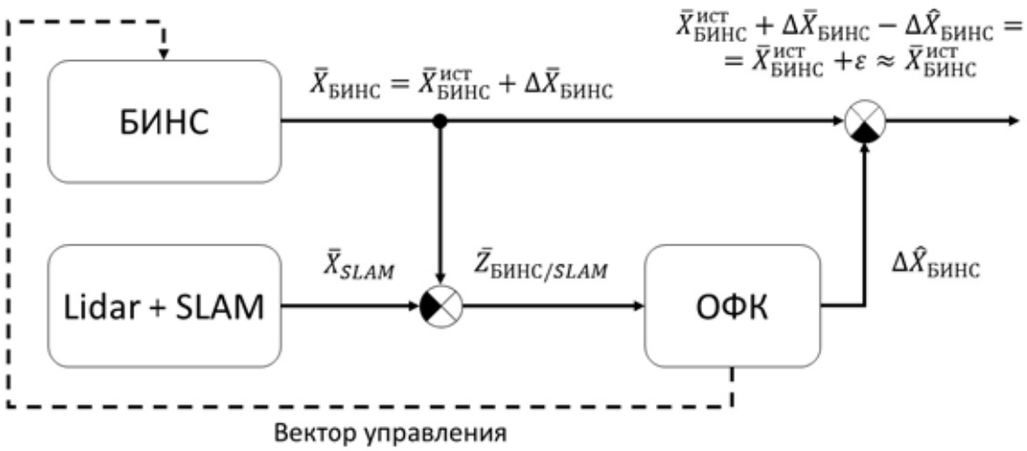

Рис. 3. Слабосвязанная схема комплексирования

Заключение

Приведен вариант использования алгоритма SLAM, позволяющего осуществлять навигацию в относительном режиме, опираясь на измерения флэш лидара. Предложенный вариант комплексирования БИНС и флэш лидара с использованием оптимального фильтра Калмана позволяет оценивать и компенсировать (корректировать) дрейф гироскопов БИНС, обеспечивая непрерывность решения навигационной задачи в условии отсутствия поступления измерений от приемника ГНСС. Для подтверждения возможности использования такого варианта комплексирования следует провести моделирование в разных режимах движения на основе заранее подготовленной совокупности данных, совмещающих измерения лидара и инерциальных измерителей. Такой набор данных содержится в KITTI vision benchmark suite [6], в нем присутствуют измерения лидара, стереокамер, инерциальных измерителей и ГНСС.

Литература

1. Usenko, V. Reconstructing Street-Scenes in Real-Time From a Driving Car // V. Usenko [и др.]. – IEEE Intl. Conf. on 3D Vision (3DV), 2015.

2. Zhang, J. and Singh, S. Visual-lidar odometry and mapping: Low-drift, roust, and fast // IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation (ICRA), May 2015.

3. Bry, A. State Estimation for Aggressive Flight in GPS-Denied Environments Using Onboard Sensing // A. Bry, A. Bachrach, N. Roy – IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation (ICRA), May 2012.

4. Kotecha, J. H. and Djuric, P. M. Gaussian particle filtering // IEEE Trans. Signal Processing, 51(10):2592-2601, October 2003.

5. Besl, P. J. A method for Registration of 3-D Shapes // Paul J. Besl, N. D. McKay – IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 14(2):239-256, 1992.

6. Geiger, A. Are we ready for autonomous driving? The KITTI vision benchmark suite // Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2012.

**Правила оформления материалов,
направляемых для опубликования в журнале
«Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами»**

- Для опубликования в журнале принимаются статьи объемом до 30 с., а также краткие сообщения объемом до 5 стр.
- Статья должна иметь аннотацию не более 600 знаков, ключевые слова.
- На первой странице должны быть указаны: фамилии и инициалы авторов, полное название текста статьи без сокращений, проставлен индекс УДК.
- Материалы должны быть подготовлены в формате *.doc, лист А4, ориентация книжная (вертикальное расположение), шрифт Times New Roman, размер шрифта 12, интервал между строками одинарный, поля (мм): верхнее 22, нижнее 50, левое 30, правое 28, расположение страниц зеркальное. Установить «Автоматическую расстановку переносов». Переносы вручную не ставить.
- Формат формул в MathType или Microsoft Equation: Define Sizes, Full 12 pt, Subscript/Superscript 7 pt, Sub-Subscript/Superscript 5 pt, Symbol 18 pt, Sub-Symbol 12 pt.
- Иллюстрированный материал представляется в формате *.jpg, *.bmp, *.png (разрешение не менее 300 точек на дюйм) или в виде рисунка Word, фрагменты которого объединены в единый объект. Цветные иллюстрации приветствуются.
- В конце текста указывается информация о каждом авторе: Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, полное название и почтовый адрес организации, должность, контактные телефоны (служебный, мобильный или домашний), адрес электронной почты.
- В редакцию предоставляется электронный носитель с текстом статьи и ее распечатка в двух экземплярах, подписанная всеми авторами.
- К статье прилагается экспертное заключение о возможности ее открытой публикации, рецензия, лицензионный договор.
- Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Содержание

О. Н. Богданов, А. В. Фомичев
Исследование влияния запаздывания между измерительными трактами датчиков угловой скорости на точность навигационного решения бескарданной инерциальной навигационной системы.....2

О. А. Бабич
Расширение алгоритмов БИНС для решения задач полярной навигации.....18

Ю. П. Николаев
Апериодическая устойчивость линейных динамических систем.....35

А. В. Гребенкин, С. А.Костин
Анализ возможности автоматической посадки по категории IIIC самолета Ту-204СМ на ВПП переменного состояния в условиях бокового ветра.....44

В. Е. Куликов, М. С. Балякин, В. В. Куликов, А. С. Юрченко, Д. Б. Юрченко
Аналитический синтез автомата тяги тяжелого самолета.....60

Ф. Г. Падерин
Комплексная обработка информации в бортовом навигационном комплексе БПЛА с использованием метода одновременной навигации и составления карты (SLAM).....79