
ТРУДЫ
МОСКОВСКОГО ИНСТИТУТА
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И АВТОМАТИКИ (МИЭА)

Основаны в 2010 году

Выпуск 18

НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ
ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

Под общей редакцией доктора технических наук А. Г. Кузнецова

Москва
2017

УДК 629.7.018.7

АЛГОРИТМЫ КОМПЛЕКСНОЙ ОБРАБОТКИ БОРТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

О. Н. КОРСУН, д.т.н., профессор

ФГУП «ГосНИИАС»,

П. А. МОТЛИЧ

ФГБУ «ГНМЦ» Минобороны России

Рассмотрены современные алгоритмы комплексной обработки информации на основе взаимосвязи между линейными и угловыми параметрами движения. Предложен алгоритм проверки согласованности измерений угловых величин, а также два варианта алгоритма восстановления углов ориентации летательного аппарата, использующих измеренные спутниковой навигационной системой проекции линейной скорости объекта.

Ключевые слова: параметры движения летательного аппарата, обработка бортовых измерений.

ONBOARD MEASUREMENTS INTEGRATED PROCESSING ALGORITHMS BASED ON INTERRELATION BETWEEN AIRCRAFT MOTION LINEAR AND ANGULAR PARAMETERS

O. N. KORSUN, D. Sc. in Engineering, professor

FGUP 'GosNIIAS',

P. A. MOTLICH

CRMC Russian Defense Ministry 'Chief Research Metrological Center'

The paper considers the modern integrated data processing algorithms based on relationship between linear and angular motion parameters of the aircraft. The paper introduces the angular parameters measurements relation validation algorithm as well as two types of aircraft attitude angles estimation algorithms based on body linear velocity, measured by GPS.

Keywords: Aircraft motion parameters, on-board measurements processing.

Требования безопасности полетов и организации эксплуатации воздушных судов обуславливают необходимость создания эффективных методов контроля технического состояния авиационной техники в процессе полета.

При этом важной задачей является анализ методик и алгоритмов идентификации систематических погрешностей измерений, учитывающих специфику проблемы оценивания технического состояния, в целях ускорения практического внедрения технологий идентификации в комплекс бортового оборудования перспективных летательных аппаратов (ЛА).

Анализ отечественной и зарубежной литературы, в том числе [1 — 9], позволяет выделить две основные группы современных методов комплексирования информации о параметрах движения ЛА в полете. К первой группе относятся алгоритмы комплексирования аэродинамических измерений, спутниковых измерений и оценивания скорости ветра. Примеры можно найти в [5, 7 — 9].

Рассмотрим подробнее вторую группу, включающую алгоритмы и методы на основе взаимосвязи между линейными и угловыми параметрами движения. Они позволяют осуществить:

- 1) проверку правильности соотношений между измеряемыми в полете углами ориентации и угловыми скоростями на основе уравнений Эйлера;
- 2) восстановление углов ориентации путем интегрирования угловых скоростей при известных начальных условиях интегрирования по углам;
- 3) восстановление углов ориентации при отказе канала измерения углового положения путем интегрирования угловых скоростей при восстановлении начальных условий интегрирования на основе использования проекций перегрузки в связанной системе координат и проекций скорости ЛА, измеряемых спутниковой навигационной системой (СНС);
- 4) восстановление углов ориентации и угловых скоростей по перегрузкам и скорости СНС при отсутствии измерений углов ориентации и угловых скоростей;
- 5) восстановление угловых скоростей путем численного дифференцирования значений углов ориентации;
- 6) восстановление перегрузок и линейных скоростей в связанной системе координат по измерениям скорости СНС и значениям углов ориентации или угловых скоростей;
- 7) восстановление скоростей, измеряемых СНС, в случае кратковременной потери «созвездия» спутников при маневрировании по скоростям, измеренным инерциальной навигационной системой ИНС, или по перегрузкам и углам ориентации.

Рассмотрим некоторые алгоритмы (п. п. 1, 3 и 7) из представленной группы методов более подробно.

Первая задача легко решается путем численного интегрирования уравнений Эйлера (1), определяющим взаимосвязь между угловыми скоростями в связанной системе координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и углами тангажа ϑ , крена γ и рыскания ψ :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = (\omega_y + C_{\omega_y}) \sin \gamma + (\omega_z + C_{\omega_z}) \cos \gamma,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = (\omega_x + C_{\omega_x}) - \operatorname{tg} \vartheta \left((\omega_y + C_{\omega_y}) \cos \gamma - (\omega_z + C_{\omega_z}) \sin \gamma \right), \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} \left((\omega_y + C_{\omega_y}) \cos \gamma - (\omega_z + C_{\omega_z}) \sin \gamma \right).$$

На рис. 1 показан пример соответствия сигналов крена и тангажа при правильной работе системы измерений для маневра «бочка», когда углы ориентации изменяются в широком диапазоне.

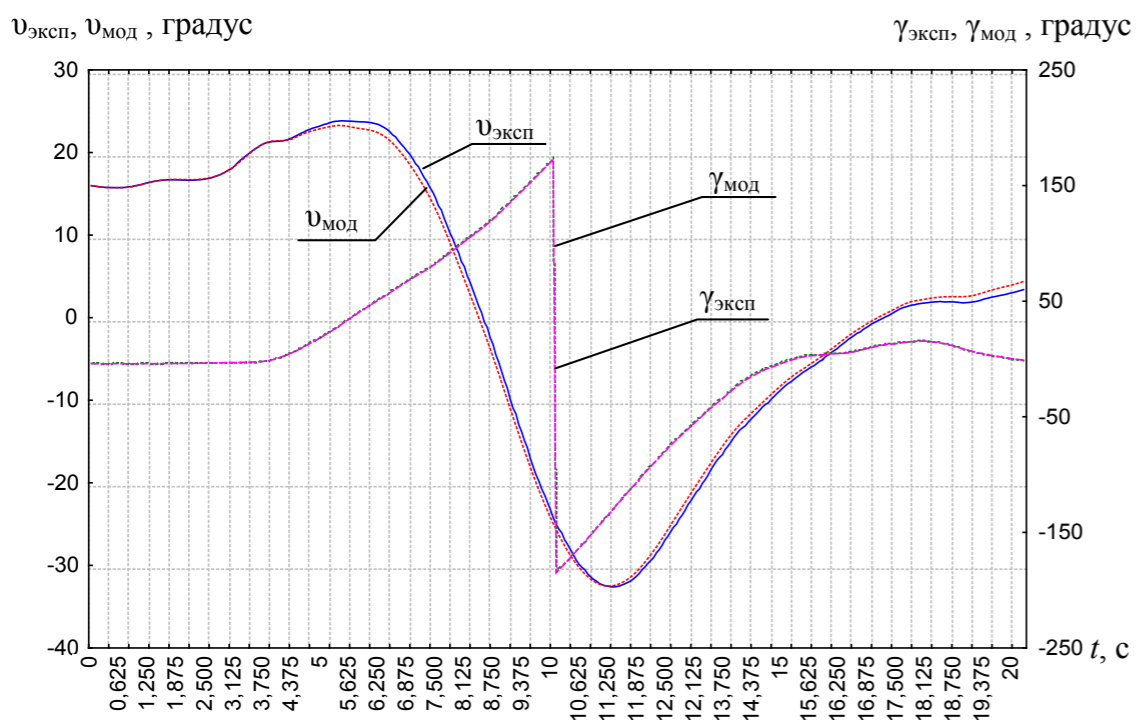


Рис. 1. Сравнение углов тангажа и крена, измеренных в эксперименте ($v_{\text{эксп}}, \gamma_{\text{эксп}}$) и оцененных в модели ($v_{\text{мод}}, \gamma_{\text{мод}}$) при правильной работе бортовой системы измерений. Вид маневра — «Бочка»

На рис. 2 представлен пример выявления авиагоризонтом АГР-29 значительных погрешностей измерения тангажа, обусловленных интенсивным маневрированием по крену.

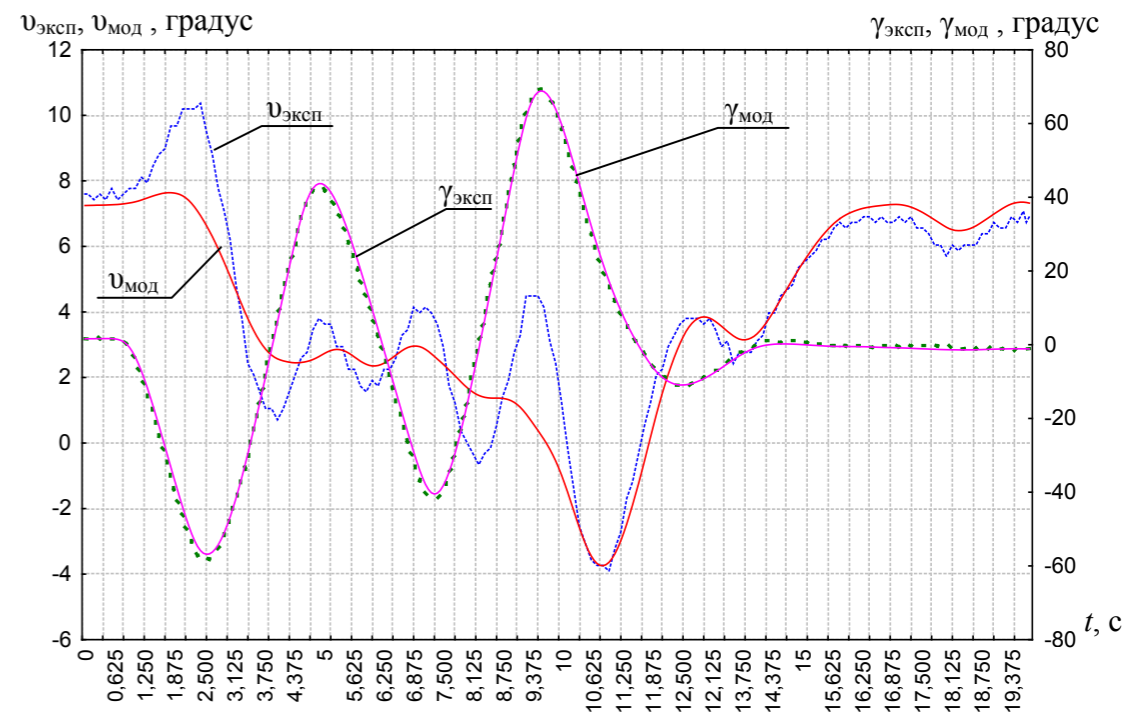


Рис. 2. Выявление погрешностей измерений авиагоризонтом АГР-29 угла тангажа $v_{\text{эксп}}$, обусловленных движением по крену, путем сравнения с выходом модели $v_{\text{мод}}$

Более детально данный подход изложен в [1, 2]. В этом случае постоянные погрешности измерения угловых скоростей $C_{\omega_x}, C_{\omega_y}, C_{\omega_z}$ можно найти методами идентификации, как показано ниже на примере более сложной задачи. При задании начальных условий для численного интегрирования уравнений (1) принимается, что значения углов ориентации известны. Опыт показывает, что оценивание постоянных погрешностей измерений углов ориентации только на основе системы (1) не дает положительного результата. В этом случае требуется дополнительный источник информации, которым может стать канал измерения скоростей спутниковой навигационной системы (СНС).

Алгоритм восстановления угловой ориентации в полете на основе сравнения ускорений при отказе канала измерения углового положения

Рассмотрим предельный случай и допустим, что бортовые средства измерения углов Эйлера вышли из строя. Предложим алгоритм восстановления, или оценивания, углов Эйлера (углы тангажа, крена, рыскания) в полете. Алгоритм основан на совместной обработке измерений датчиков перегрузок, угловых скоростей и измерений скорости ЛА спутниковой навигационной системой. При этом решение получается при помощи соотношений между параметрами полета, определяемых уравнениями пространственного движения ЛА.

В этом случае необходимо учитывать погрешности, важнейшими из которых являются неточно известные начальные значения углов $C_\vartheta, C_\gamma, C_\psi$, постоянные погрешности измерений угловых скоростей $C_{\omega_x}, C_{\omega_y}, C_{\omega_z}$, а также постоянные погрешности измерений перегрузок $C_{n_x}, C_{n_y}, C_{n_z}$.

Для формирования модели объекта к системе (1) добавим формулы (2), (3), обеспечивающие пересчет ускорений между связанной и земной нормальной системами координат [10]:

$$\begin{bmatrix} a_{x-g} \\ a_{y-g} \\ a_{z-g} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta \\ \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\ \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $a_{x-g}, a_{y-g}, a_{z-g}$ — проекции ускорений на оси земной нормальной системы координат;

a_x, a_y, a_z — проекции ускорений на оси связанной системы координат.

Ускорения в связанной системе вычисляются через измеренные в полете значения перегрузок n_x, n_y, n_z

$$\begin{aligned} a_x &= g(n_x + C_{n_x} - \sin(\vartheta + C_\vartheta)), \\ a_y &= g(n_y + C_{n_y} - \cos(\vartheta + C_\vartheta) \cos(\gamma + C_\gamma)), \\ a_z &= g(n_z + C_{n_z} + \cos(\vartheta + C_\vartheta) \sin(\gamma + C_\gamma)). \end{aligned} \quad (4)$$

Для получения модели наблюдений продифференцируем измеренные СНС проекции скорости ЛА в земной нормальной системе координат. Для численного дифференцирования применимы формулы из работы [11], обладающие хорошими сглаживающими свойствами. Это позволяет получить оценки ускорений в земной нормальной системе, вычисленные по спутниковым измерениям в дискретные моменты времени:

$$a_{x-g_изм}(t_i), \quad a_{y-g_изм}(t_i), \quad a_{z-g_изм}(t_i). \quad (5)$$

Модель наблюдений примет вид:

$$\begin{aligned} z_1(t_i) &= a_{x-g}(t_i) + \xi_x(t_i), \\ z_2(t_i) &= a_{y-g}(t_i) + \xi_y(t_i), \\ z_3(t_i) &= a_{z-g}(t_i) + \xi_z(t_i), \end{aligned} \quad (6)$$

где величины (5) принимаются в качестве элементов вектора наблюдений $z(t_i)$, а $\xi^T(t_i) = [\xi_x(t_i) \xi_y(t_i) \xi_z(t_i)]$ — вектор шума наблюдений, представляющий собой векторную нормальную случайную последовательность типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и известной по априорной информации дисперсионной матрицей $R(t_i)$.

Ускорения в правых частях (6) вычисляются по уравнениям модели объекта (1) — (4), в которые входят неизвестные параметры, характеризующие погрешности датчиков перегрузок и угловых скоростей, а также неизвестные начальные значения углов Эйлера.

Вектор неизвестных параметров, подлежащих идентификации, имеет вид:

$$a^T = [C_\vartheta \ C_\gamma \ C_\psi \ C_{\omega_x} \ C_{\omega_y} \ C_{\omega_z} \ C_{n_x} \ C_{n_y} \ C_{n_z}]. \quad (7)$$

Модели объекта и наблюдений можно представить в следующей обобщенной векторной форме:

$$y'(t_i) = f(y(t), a, u(t)), \quad (8)$$

$$z(t_i) = h(y(t_i), a, u(t_i)) + \xi(t_i), \quad (9)$$

где $y(t), u(t)$ — векторы выходных и входных сигналов,

$z(t_i)$ — вектор наблюдений,

a — вектор неизвестных параметров, подлежащий идентификации,

$\xi(t_i)$ — вектор шума наблюдений, описанный выше.

Предполагается, что обработка проводится на конечном участке $[t_0, t_N]$, на котором получено N дискретных значений вектора наблюдений $z(t_i), i = \overline{1, N}$. Принимается также, что на участке обработке $u(t)$ есть известная функция времени, заданная дискретными значениями $u(t_i), i = \overline{1, N}$. Начальные условия $y(t_0)$ или предполагаются известными, или включаются в вектор оцениваемых параметров.

Шумы наблюдений представляют собой нормальные и независимые случайные векторные величины. Поэтому их совместная плотность распределения вероятностей равна произведению плотностей для каждого момента $t_i, i = \overline{1, N}$.

Известно, что максимум функции правдоподобия при указанных допущениях о свойствах шумов приводит к несмещенным и эффективным оценкам. Функционал максимума правдоподобия имеет следующий вид:

$$J(a) = \sum_{i=1}^N \left[z(t_i) - h(y(t_i), a, u(t_i)) \right]^T R^{-1}(t_i) \left[z(t_i) - h(y(t_i), a, u(t_i)) \right]. \quad (10)$$

По физическому смыслу функционал (10) представляет собой взятую по всем N измерениям на участке взвешенную сумму квадратов невязок между измерениями и соответствующими сигналами модели.

Для минимизации (10) предлагается использовать одну из модификаций классического метода Ньютона [12]:

$$a_{k+1} = a_k - \left(\frac{d^2 J(a_k)}{da_k^2} \right)^{-1} \frac{dJ(a_k)}{da_k}, \quad (11)$$

где:

$$\frac{d^2 J(a_k)}{da_k^2} \approx 2 \sum_{i=1}^N \frac{dz^T(t_i, a_k)}{da_k} \cdot R^{-1}(t_i) \frac{dz(t_i, a_k)}{da_k}, \quad (12)$$

$$\frac{dJ(a_k)}{da_k} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{dz^T(t_i, a_k)}{da_k} \cdot R^{-1}(t_i) (z(t_i) - z(t_i, a_k)). \quad (13)$$

Производные оценок прогноза определяются численно для моментов времени $t_i, i = \overline{1, N}$ по формулам:

$$\frac{dz(t_i, a)}{da} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_1} & \frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_p} \end{array} \right]_{(r \times p)}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial z(t_i, a)}{\partial a_j} = \frac{z(t_i, a + \varepsilon e_j) - z(t_i, a)}{\varepsilon},$$

где e_j — вектор размерности p , все элементы которого равны нулю за исключением j -го элемента, который равен 1; ε — малое число, обычно задаваемое на уровне 0,001...0,1% от номинального значения параметров.

Оценки $z(t_i, a), i = \overline{1, N}$ определяются численным решением уравнений объекта и наблюдений при $\eta(t_i) = 0$. Идентификация заканчивается по условию $|a_{k+1} - a_k| < \delta |a_k|$, где $\delta = 0,005$. При обработке в реальном масштабе времени целесообразно жестко задать максимальное число шагов, например, пять, чтобы зафиксировать число итераций и, следовательно, максимальное время счета.

Алгоритм восстановления углов Эйлера в полете на основе сравнения скоростей

Рассмотрим другой вариант решения задачи, в котором модель наблюдений формируется не по ускорениям, а по скоростям. При этом оценивание углов Эйлера в полете происходит на основе сравнения скоростей.

В данном случае для формирования модели объекта надо взять уравнения для скоростей в связанной системе координат [15]:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= a_x - (\omega_y V_z - \omega_z V_y), \\ \frac{dV_y}{dt} &= a_y - (\omega_z V_x - \omega_x V_z), \\ \frac{dV_z}{dt} &= a_z - (\omega_x V_y - \omega_y V_x). \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) начальные условия, то есть проекции скорости на оси связанной системы координат в начальный момент времени, находим по формуле (16):

$$\begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{y_0} \\ V_{z_0} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_{x_{-g_0}} \\ V_{y_{-g_0}} \\ V_{z_{-g_0}} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $V_{x_{-g_0}}, V_{y_{-g_0}}, V_{z_{-g_0}}$ — проекции скорости ЛА в земной нормальной системе координат в начальный момент времени, измеренные СНС, A — матрица пересчета, определяемая формулой (3).

Кроме того, систему (15) следует дополнить уравнениями (1) и (4). Модель наблюдений формируется на основе скоростей:

$$\begin{aligned} z_1(t_i) &= V_{x_{-g}} + \xi_x(t_i), \\ z_2(t_i) &= V_{y_{-g}} + \xi_y(t_i), \\ z_3(t_i) &= V_{z_{-g}} + \xi_z(t_i), \end{aligned} \quad (17)$$

где в левой части стоят проекции скорости, измеренные СНС, а проекции скоростей ЛА на оси земной нормальной системы координат $V_{x_{-g}}, V_{y_{-g}}, V_{z_{-g}}$, в правой части вычисляются по формуле (18):

$$\begin{bmatrix} V_{x_{-g}} \\ V_{y_{-g}} \\ V_{z_{-g}} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Далее расчеты проводятся по аналогии со способом оценивания углов Эйлера на основе сравнения ускорений.

Выводы

Рассмотрены алгоритмы комплексной обработки бортовых измерений на основе взаимосвязи между линейными и угловыми параметрами движения. Предложен алгоритм проверки согласованности измерений угловых величин, а также алгоритмы восстановления углов ориентации ЛА, основанные на совместной обработке сигналов датчиков перегрузок, угловых скоростей и проекций скорости ЛА, измеренных СНС. Представлены также примеры обработки данных летных испытаний современных самолетов.

Литература

1. Корсун О. Н., Лысюк О. П. Комплексная оценка погрешностей бортовых измерений и регистрации в целях обеспечения задач безопасности полетов. Проблемы безопасности полетов. 2007. № 2, с. 31-41.
2. Корсун О. Н., Мотлич П. А. Комплексный контроль бортовых измерений основных параметров полета летательного аппарата. Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2013. № 1, с. 135-148.
3. Корсун О. Н., Лысюк О. П., Зиновьев А. В. Оценивание погрешностей измерения скорости спутниковой навигационной системы движения летательных аппаратов с использованием информационной избыточности // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. Т. 6. № 11, с. 77-82.
4. Корсун О. Н., Зиновьев А. В., Лысюк О. П., Багнюк Е. С. Алгоритм оценивания постоянной составляющей погрешности измерения воздушной скорости при учете скорости ветра // Вестник компьютерных и информационных технологий». 2008. № 9, с. 2-6.
5. Пушков С. Г., Горшкова О. Ю., Корсун О. Н. Математические модели погрешностей бортовых измерений скорости и угла атаки на режимах посадки самолета // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 8, с. 65-70.
6. Булгаков В. В., Корсун О. Н., Кулабухов В. С., Стуловский А. В., Тимофеев Д. С. Алгоритмы повышения точности расчета углов ориентации летательного аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2016. № 1, с. 159-170.
7. Корсун О. Н., Николаев С. В., Пушков С. Г. Алгоритм оценивания систематических погрешностей измерений воздушной скорости, углов атаки и скольжения в летных испытаниях // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2016. № 3, с. 118-129.

УДК 629.7.05

8. A. Cho, Y.-S. Kang, B.-J. Park, and C.-S. Yoo, "Airflow angle and wind estimation using GPS/INS navigation data and airspeed," in Proc. 13th Int. Conf. Control, Automation and Systems (ICCAS), Gwangju, Korea, 2013.
9. H. Long and S. Song, "Method of estimating angle-of-attack and sideslip angle based on data fusion," in Proc. Int. Conf. Intelligent Computation Technology and Automation, 2009, pp. 641–644.
10. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Издательство стандартов, 1981. 54 с.
11. Васильченко К. К., Леонов В. А., Пашковский И. М., Поплавский Б. К. Летные испытания самолетов. М.: Машиностроение, 1996. 720 с.
12. Klein V., Morelli E.A. Aircraft system identification: Theory and Practice. USA, Reston: AIAA. 2006. 499 p.

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЗДЕЙСТВИЙ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ПОЛЕТ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Ю. Б. КУЛИФЕЕВ, д. т. н., профессор

ОАО МНПК «Авионика»,

В. Е. КУЛИКОВ, д. т. н., профессор

ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Рассмотрена задача формирования математической модели влияния полного вектора скорости ветра на динамику движения летательного аппарата. Разработана модель турбулентной составляющей скорости ветра с учетом возможности дифференцирования случайного процесса турбулентного ветра в интересах цифрового моделирования полета ЛА. Задача решена в виде получения дискретных моделей дифференцируемого случайного процесса ветровых возмущений вертикальной и боковой составляющих турбулентного ветра. Численно доказана адекватность предложенной модели в смысле реализации заданных частотных и статистических свойств генерируемого случайного ветра.

Ключевые слова: вектор скорости ветра, модель турбулентного ветра, дифференцируемый случайный процесс, дискретная модель.

GENERATION OF SPATIAL MATHEMATICAL MODEL FOR ATMOSPHERIC TURBULENCE IMPACT ON THE AIRCRAFT FLIGHT

Yu. B. KULIFEEV, D. Sc. in Engineering, professor

MRPC 'Avionica',

V. E. KULIKOV, D. Sc. in Engineering, professor

'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The paper considers the problem of mathematical model generation for full wind vector impact on aircraft flight dynamics. A wind turbulent component model was developed considering the possibility of random turbulent wind differentiation for aircraft flight digital simulation. The problem was solved in the form of discrete-time models of differentiable random wind disturbances of vertical and lateral turbulent wind components derivation. The adequacy of the proposed model in terms of given frequency and statistical properties of generated random wind implementation is numerically proved.

Keywords: wind vector, turbulent wind model, random differentiation, discrete-time model.

Турбулентность атмосферы оказывает существенное влияние на движение летательного аппарата (ЛА), а именно — на динамическую точность выдерживания параметров его полета в возмущенной атмосфере.

При полете в спокойной атмосфере вектор $\vec{V}(t)$ кинематической скорости воздушного ЛА совпадает с вектором его путевой скорости $\vec{W}(t)$ в рамках общепринятых допущений об инерциальности пространства, в котором рассматривается движение ЛА, без учета вращения Земли и кривизны ее поверхности:

$$\vec{V}(t) = \vec{W}(t).$$

Здесь вектор скорости $\vec{V}(t)$ в инерциальной системе координат называют вектором воздушной скорости в условиях неподвижной воздушной среды относительно Земли.

При математическом описании неспокойной атмосферы [1, стр. 372] воздушная скорость ЛА в атмосфере, движущейся относительно Земли со скоростью $\vec{U}(t)$, определяется уравнением:

$$\vec{V}(t) = \vec{W}(t) - \vec{U}(t). \quad (1)$$

Уравнение (1) при движении самолета в установившемся воздушном потоке после окончания переходного процесса входа ЛА в ветровой поток и постоянном навигационном ветре $\vec{U}(t) = U = \text{const}$ представляет собой уравнение навигационного треугольника скоростей [2], используемого в штурманских расчетах.

В общем случае полный вектор скорости ветра $\vec{U}(t)$ представляет собой сумму вектора скорости детерминированного ветра $\vec{U}^D(t)$ (в частном случае — постоянного) и случайного вектора турбулентного ветра $\vec{\xi}(t)$, а именно:

$$\vec{U}(t) = \vec{U}^D(t) + \vec{\xi}(t). \quad (2)$$

Вектор $\vec{U}(t)$ ориентирован в земной географической системе координат и имеет следующие координаты:

$$\vec{U}(t) = [U_{x_g}(t) \quad U_{y_g}(t) \quad U_{z_g}(t)]^T.$$

В дальнейшем аргумент времени t для сокращения записи будем опускать. Уточним описание вектора скорости ветра для задачи его использования при моделировании движения самолета, которое, будем

считать, проводится в связанной системе координат. Представим вектор ветра (2) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} U_{x_g} \\ U_{y_g} \\ U_{z_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{x_g}^D \\ U_{y_g}^D \\ U_{z_g}^D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{x_g} \\ \xi_{y_g} \\ \xi_{z_g} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Координаты горизонтальной составляющей вектора детерминированного ветра можно представить с использованием модуля горизонтального ветра U_Γ и угла ветра ε , а именно:

$$U_{x_g}^D = U_\Gamma \cos \varepsilon, \quad U_{z_g}^D = U_\Gamma \sin \varepsilon. \quad (4)$$

Следует особенно подчеркнуть, что, согласно нормам летной годности [3], на этапах предпосадочного маневрирования ЛА продольная составляющая турбулентного ветра ξ_{x_g} ориентирована в направлении среднего ветра, вертикальная составляющая ξ_{y_g} перпендикулярна поверхности Земли, а боковая составляющая ξ_{z_g} перпендикулярна среднему горизонтальному ветру и лежит в горизонтальной плоскости. То есть, вблизи Земли анизотропное движение воздушной среды в направлении преобладающего среднего ветра конфигурирует составляющие турбулентности относительно продольного ветрового потока.

Согласно такой ориентации турбулентного ветра в анизотропной среде и с учетом (4), можно переписать выражение (3) в виде:

$$\begin{bmatrix} U_{x_g} \\ U_{y_g} \\ U_{z_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\Gamma^D \cos \varepsilon + \xi_{x_U} \cos \varepsilon - \xi_{z_U} \sin \varepsilon \\ U_{y_g}^D + \xi_{y_g} \\ U_\Gamma^D \sin \varepsilon + \xi_{x_U} \sin \varepsilon + \xi_{z_U} \cos \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (5)$$

где ξ_{x_U}, ξ_{z_U} — составляющие продольного и бокового турбулентного ветра, ориентированные по вектору горизонтального детерминированного ветра U_Γ^D и перпендикулярно этому вектору.

Спроецируем полный вектор ветра $\vec{U} = [U_x \quad U_y \quad U_z]^T$ на связанную систему координат полета ЛА. Применяя матрицу направляющих косинусов [4] между земной и связанной системами координат, получаем векторное уравнение определения воздушных ветровых добавок к связанным инерциальным скоростям:

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta \\ \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\ \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{x_g} \\ U_{y_g} \\ U_{z_g} \end{bmatrix},$$

где ψ, γ, ϑ — соответственно углы рыскания, крена, тангажа.

После подстановки (5) в это уравнение получаем три проекции полного вектора ветра на связанные оси:

$$\begin{aligned} U_x &= U_r^A \cos \Psi \cos \vartheta + U_{y_g} \sin \vartheta + [\xi_{x_U} \cos \Psi - \xi_{z_U} \sin \Psi] \cos \vartheta + \xi_{y_g} \sin \vartheta, \\ U_y &= U_r^A [\sin \Psi \sin \gamma - \cos \Psi \sin \vartheta \cos \gamma] + U_{y_g} \cos \vartheta \cos \gamma + \\ &+ [\xi_{x_U} \sin \Psi + \xi_{z_U} \cos \Psi] \sin \gamma - [\xi_{x_U} \cos \Psi - \xi_{z_U} \sin \Psi] \sin \vartheta \cos \gamma + \\ &+ \xi_{y_g} \cos \vartheta \cos \gamma, \\ U_z &= U_r^A [\sin \Psi \cos \gamma - \cos \Psi \sin \vartheta \sin \gamma] - U_{y_g} \cos \vartheta \sin \gamma + \\ &+ [\xi_{x_U} \sin \Psi + \xi_{z_U} \cos \Psi] \cos \gamma - [\xi_{x_U} \cos \Psi - \xi_{z_U} \sin \Psi] \sin \vartheta \sin \gamma - \\ &- \xi_{y_g} \cos \vartheta \sin \gamma, \\ \Psi &= \varepsilon + \psi, \end{aligned} \quad (6)$$

где Ψ — курсовой угол ветра, который равен разности угла ветра и курса самолета, заметим, что угол рыскания ψ имеет знак, противоположный знаку угла курса ЛА.

В тех случаях, когда анизотропия крупномасштабных ветровых потоков у Земли перестает с подъемом на высоту влиять на вихревые образования, можно считать вихревое поле в свободной атмосфере изотропным.

Тогда случайные составляющие ветра не будут зависеть ни от направления полета ЛА, ни от направления среднего ветра. Тогда выражения (6) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} U_x &= U_r^A \cos \Psi \cos \vartheta + U_{y_g} \sin \vartheta + \xi_{x_g} \cos \vartheta + \xi_{y_g} \sin \vartheta, \\ U_y &= U_r^A [\sin \Psi \sin \gamma - \cos \Psi \sin \vartheta \cos \gamma] + U_{y_g} \cos \vartheta \cos \gamma + \\ &+ \xi_{z_g} \sin \gamma - \xi_{x_g} \sin \vartheta \cos \gamma + \xi_{y_g} \cos \vartheta \cos \gamma, \\ U_z &= U_r^A [\sin \Psi \cos \gamma - \cos \Psi \sin \vartheta \sin \gamma] - U_{y_g} \cos \vartheta \sin \gamma + \\ &+ \xi_{z_g} \cos \gamma - \xi_{x_g} \sin \vartheta \sin \gamma - \xi_{y_g} \cos \vartheta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Несмотря на независимость составляющих турбулентности свободной атмосферы от направления полета ЛА в поле турбулентных скоростей, сохраняется влияние угловой ориентации ЛА на проекции этих составляющих на связанные оси. В выражениях (7) обозначениями координат в виде ξ_{y_g}, ξ_{z_g} подчеркивается независимость от направления ветра этих составляющих, находящихся в плоскости, поперечной направлению полета. В большинстве случаев направление входа ЛА в турбулентность считается лежащим в горизонтальной плоскости, в которой сориентирован турбулентный слой.

Вектор ветра в разложениях (6), (7) на связанные оси суммируется с вектором инерциальной скорости ЛА, образуя полный вектор воздушной скорости \vec{V}_a с координатами:

$$V_{a_x} = V_x + U_x, \quad V_{a_y} = V_y + U_y, \quad V_{a_z} = V_z + U_z, \quad (8)$$

где V_x, V_y, V_z — проекции инерциальной скорости полета ЛА на оси связанной системы координат.

Таким образом, возникает добавочное изменение скорости и направления воздушного обдува летательного аппарата, что приводит к появлению дополнительных внешних сил. Эти силы возникают из-за соответствующих приращений угла атаки α и скольжения β . Полные углы α, β для решения задач моделирования ЛА в связанной системе координат можно вычислить [5, стр. 474] при положительной поступательной скорости $V_{a_x} > 0$ по следующим формулам:

$$\alpha = \arcsin \frac{-V_{a_y}}{\sqrt{V_{a_x}^2 + V_{a_y}^2}}, \quad \beta = \arcsin \frac{V_{a_z}}{V_a}, \quad V_a = \sqrt{V_{a_x}^2 + V_{a_y}^2 + V_{a_z}^2}. \quad (9)$$

Векторное уравнение движения ЛА в проекциях на оси связанной системы координат [6] образует следующую систему скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \omega_x V_y - \omega_y V_z + g(n_x - \sin \vartheta), \\ \dot{V}_y = \omega_x V_z - \omega_z V_x + g(n_y - \cos \vartheta \cos \gamma), \\ \dot{V}_z = \omega_y V_x - \omega_x V_y + g(n_z + \cos \vartheta \sin \vartheta), \end{cases} \quad (10)$$

где g — ускорение свободного падения, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции вектора угловой скорости вращения ЛА относительно центра масс на оси

системы координат, n_x, n_y, n_z — проекции вектора перегрузки на оси связанной системы координат:

$$n_x = \frac{P \cos \varphi_p - X(\alpha, \beta)}{mg}, \quad n_y = \frac{P \sin \varphi_p + Y(\alpha)}{mg}, \quad n_z = \frac{Z(\beta)}{mg}. \quad (11)$$

Здесь P — тяга двигателей, φ_p — угол установки двигателей относительно оси OX , $X(\alpha, \beta), Y(\alpha), Z(\beta)$ — проекции вектора аэродинамической силы на оси связанной системы координат, которые показаны в функции аргументов α и β из (9). Таким образом, при моделировании движения ЛА в связанной системе координат в неспокойной атмосфере соответствующие изменения перегрузок, вызванные ветром, будут являться входами при интегрировании системы (10). Способ учета возмущающих воздействий от ветра в правых частях линеаризованных уравнений движения ЛА в приращениях был предложен в работе [7, стр. 57-59].

Отдельно следует сказать, что для устойчивого ЛА изменение детерминированного ветра в виде зависимостей от высоты полета и типа околосредней поверхности вызывает дополнительное движение, направленное на компенсацию приращений угла атаки и скольжения. При этом ЛА соответствующим образом изменяет свое угловое положение и траекторию полета. Например, при входе самолета в струйное встречное течение происходит уменьшение скорости полета при сохранении воздушной скорости, соответствующей режиму работы двигателей. После переходного процесса входа в измененный ветром воздушный поток в точности выполняются условия для решения навигационного треугольника. Изменение воздушной скорости ЛА в установившемся состоянии приводит к соответствующему изменению путевой скорости. Заметим, что в навигационных системах, в которых воздушная и путевая скорости измеряются непосредственно, переходное движение к новым условиям обтекания воздушным потоком ЛА навигационным комплексом не идентифицируется.

Для задач моделирования ЛА с системой автоматического или штурвального управления вопросы безопасного движения ЛА при попадании в условно детерминированное изменение ветрового потока являются актуальными. Уравнения (5) — (10) возмущенного ветром движения ЛА позволяют моделировать такие явления, как порывы ветра, сдвиг ветра, градиентный ветер, изменения эпюры скоростей и направления ветра по высотам, вход и выход из струйных течений. Для этого достаточно знать функции, описывающие эти ветровые возмущения для их размещения в модели по трем координатам в земной системе координат.

Рассмотрим теперь способ моделирования турбулентной составляющей скорости ветра $\vec{\xi}(t)$ свободной атмосферы, которую генерирует пульсационная скорость ветра, являющаяся случайной функцией времени, координат определенной точки поля скоростей ветра и масштабов порывов [8]. Переход от пространственной модели ветра к временной осуществляется в предположении «замороженности» пространственного поля скоростей турбулентного ветра, пересекаемого летательным аппаратом на высокой, по сравнению со скоростями турбулентного движения воздуха, скорости полета [9]. Имеют место следующие выражения для корреляционных функций составляющих турбулентного ветра в варианте моделей Драйдена:

$$R_{x_g}(\tau) = \sigma_{x_g}^2 e^{-\mu_x |\tau|}, \quad \mu_x = V/L_{x_g}, \quad (12)$$

$$R_{y,z_g}(\tau) = \sigma_{y,z_g}^2 \left(1 - \frac{\mu_{y,z} |\tau|}{2}\right) e^{-\mu_{y,z} |\tau|}, \quad \mu_{y,z} = V/L_{y,z_g}, \quad (13)$$

где $R_{x_g}(\tau), R_{y,z_g}(\tau)$ — корреляционные функции продольной и поперечной (вертикальной и боковой) составляющих скорости ветра соответственно; $\sigma_{x_g}^2, \sigma_{y,z_g}^2$ — среднеквадратические отклонения (СКО) соответствующих составляющих скорости турбулентного ветра; L_{x_g}, L_{y,z_g} — масштабы турбулентности, имеющие смысл радиусов корреляции пространственной случайной функции поля турбулентных скоростей.

Корреляционным функциям (12), (13), описывающим связность турбулентных движений воздуха, после применения к ним преобразования Фурье соответствуют спектральные плотности, а именно:

$$S_x(\omega) = \sigma_{x_g}^2 \frac{2\mu_x}{\mu_x^2 + \omega^2}, \quad (14)$$

$$S_{y,z}(\omega) = \sigma_{y,z_g}^2 \frac{\mu_{y,z} (\mu_{y,z}^2 + 3\omega^2)}{(\mu_{y,z}^2 + \omega^2)^2}, \quad (15)$$

где ω — временная угловая частота. Спектральным плотностям (14), (15) соответствуют передаточные функции формирующих фильтров:

$$W_x(p) = \frac{1}{p + \mu_x}, \quad (16)$$

$$W_{y,z}(p) = \frac{p + \frac{\mu_{y,z}}{\sqrt{3}}}{(p + \mu_{y,z})^2}, \quad (17)$$

где p — комплексная переменная преобразования Лапласа. Фильтры (16), (17) имеют на выходе случайные процессы $\xi_{x_g}, \xi_{y_g}, \xi_{z_g}$, при подаче на их входы сигналов белого шума $\eta(t)$ с интенсивностями:

$$S_{\eta_x} = 2\mu_x \sigma_x^2, \quad S_{\eta_{y,z}} = 3\mu_{y,z} \sigma_{y,z}^2. \quad (18)$$

В связи с тем, что описание корреляционных функций (12), (13) является упрощенным [9, стр. 29], формирующие фильтры (16), (17) генерируют недифференцируемые случайные процессы. В тех случаях, когда при моделировании возмущенного турбулентностью движения ЛА требуется изучение только точностных характеристик, например, СКО стабилизации регулируемого параметра движения ЛА, применение указанного подхода является допустимым. Полная методика получения дискретных формирующих фильтров для цифрового моделирования турбулентного ветра приведена в работе [10]. Ее результатами являются следующие соотношения.

Дискретный формирующий фильтр продольного турбулентного ветра

$$\begin{aligned} \xi_{x_g}(t_{i+1}) &= e^{-\mu_x T} \xi_{x_g}(t_i) + \sigma_{x_g} \sqrt{1 - e^{-2\mu_x T}} \eta_x(t_i), \quad \xi_{x_g}(t_0) = 0, \\ \eta_x(t_i) &\in N(0,1), \quad t_{i+1} = t_i + T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\eta(t_i)$ — стандартная гауссовская случайная последовательность, T — постоянный шаг дискретизации по времени. Параметры σ_{x_g} и μ_x являются заданными величинами.

Дискретный формирующий фильтр поперечного турбулентного ветра

$$\begin{aligned} \xi_{y,z_g}(t_{i+1}) &= \frac{\mu_{y,z}}{\sqrt{3}} y_{1,y,z}(t_{i+1}) + y_{2,y,z}(t_{i+1}), \quad t_{i+1} = t_i + T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ y_{1,y,z}(t_0) &= 0, \quad y_{2,y,z}(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{1,y,z}(t_{i+1}) \\ y_{2,y,z}(t_{i+1}) \end{bmatrix} &= e^{-\mu_{y,z} T} \begin{bmatrix} 1 + \mu_{y,z} T & T \\ -\mu_{y,z}^2 T & 1 - \mu_{y,z} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,y,z}(t_i) \\ y_{2,y,z}(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1,y,z}(t_i) \\ \eta_{2,y,z}(t_i) \end{bmatrix}, \\ q_{11} &= \sqrt{p_{11}}, \quad q_{21} = \frac{p_{12}}{q_{11}}, \quad q_{22} = \frac{\sqrt{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}}{q_{11}}, \quad \eta_{1,y,z}(t_i) \in N(0,1), \quad \eta_{2,y,z}(t_i) \in N(0,1), \\ p_{11} &= \frac{S_{\eta_{y,z}}}{2} \left[\frac{1}{2\mu_{y,z}^3} - \left(\frac{1}{2\mu_{y,z}^3} + \frac{T}{\mu_{y,z}^2} + \frac{T^2}{\mu_{y,z}} \right) e^{-2\mu_{y,z} T} \right], \quad S_{\eta_{y,z}} = 3\mu_{y,z} \sigma_{y,z}^2, \\ p_{12} = p_{21} &= \frac{S_{\eta_{y,z}}}{2} T^2 e^{-2\mu_{y,z} T}, \quad p_{22} = \frac{S_{\eta_{y,z}}}{2} \left[\frac{1}{2\mu_{y,z}} - \left(\frac{1}{2\mu_{y,z}} - T + \mu_{y,z} T^2 \right) e^{-2\mu_{y,z} T} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $\eta_{1,y,z}(t_i), \eta_{2,y,z}(t_i)$ — независимые нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, p_{11}, p_{21}, p_{22} — элементы симметричной дисперсионной матрицы дискретного формирующего фильтра.

В задачах моделирования динамики процессов управления ЛА, в характеристиках которых содержатся производные аэродинамических сил и моментов от производных кинематических параметров $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$, возникает необходимость учитывать производную турбулентного ветра, получаемую из (9). Покажем, как это происходит. Производные по времени кинематических углов (9) в условиях ветровых воздействий:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{V_{a_y} \dot{V}_{a_x} - V_{a_x} \dot{V}_{a_y}}{V_{a_x}^2 + V_{a_y}^2}, \quad \dot{\beta} = \frac{(V_{a_x}^2 + V_{a_y}^2) \dot{V}_{a_z} - V_{a_z} (V_{a_x} \dot{V}_{a_x} + V_{a_y} \dot{V}_{a_y})}{(V_{a_x}^2 + V_{a_y}^2 + V_{a_z}^2) \sqrt{V_{a_x}^2 + V_{a_y}^2}}, \\ \dot{V}_{a_x} &= \dot{V}_x + \dot{U}_x, \quad \dot{V}_{a_y} = \dot{V}_y + \dot{U}_y, \quad \dot{V}_{a_z} = \dot{V}_z + \dot{U}_z. \end{aligned} \quad (21)$$

На основании (7), полагая постоянным детерминированный ветер $\overline{U^A}$ и считая квазистатическим угловое положение ЛА относительно горизонтальной плоскости по ϑ и γ , изменение которого после появления приращений углов обдува ЛА начинается инерционно, получим следующие проекции производных турбулентного ветра на связанные оси:

$$\begin{aligned} \dot{U}_x &= \dot{\xi}_{x_g} \cos \vartheta + \dot{\xi}_{y_g} \sin \vartheta, \\ \dot{U}_y &= \dot{\xi}_{z_g} \sin \gamma - \dot{\xi}_{x_g} \sin \vartheta \cos \gamma + \dot{\xi}_{y_g} \cos \vartheta \cos \gamma, \\ \dot{U}_z &= \dot{\xi}_{z_g} \cos \gamma - \dot{\xi}_{x_g} \sin \vartheta \sin \gamma - \dot{\xi}_{y_g} \cos \vartheta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, требуется разработка формирующих фильтров турбулентного ветра с возможностью получения производной генерируемого случайного процесса, который должен быть дифференцируемым. Вопрос заключается в уточнении исходных передаточных функций (16), (17) с сохранением низкочастотной части спектра моделей Драйдена.

Задача получения дифференцируемого продольного турбулентного ветра была решена в [11]. Формирующий фильтр (16) уточнялся следующим образом:

$$W_x^*(p) = \frac{1}{p + \mu_x} \cdot \frac{\lambda_x}{p + \lambda_x}, \quad \lambda_x \gg \mu_x. \quad (23)$$

Дискретный формирующий фильтр дифференцируемого продольного турбулентного ветра

$$\begin{aligned} \xi_{x_g}^*(t_{i+1}) &= \xi_{1x_g}(t_{i+1}), \quad \xi_{x_g}^*(t_{i+1}) = \xi_{2x_g}(t_{i+1}), \quad t_{i+1} = t_i + T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ \xi_{1x_g}(t_0) &= 0, \quad \xi_{2x_g}(t_0) = 0, \\ \begin{bmatrix} \xi_{1x_g}(t_{i+1}) \\ \xi_{2x_g}(t_{i+1}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{x_{11}}(T) & \varphi_{x_{12}}(T) \\ \varphi_{x_{21}}(T) & \varphi_{x_{22}}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1x_g}(t_i) \\ \xi_{2x_g}(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{x_{11}} & 0 \\ q_{x_{21}} & q_{x_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1_x}(t_i) \\ \eta_{2_x}(t_i) \end{bmatrix}, \\ \varphi_{11}(T) &= \frac{1}{\lambda - \mu} \cdot (\lambda \cdot e^{-\mu T} - \mu \cdot e^{-\lambda T}), \quad \varphi_{12}(T) = \frac{1}{\lambda - \mu} \cdot (e^{-\mu T} - e^{-\lambda T}), \quad \mu = \mu_x, \\ \varphi_{21}(T) &= \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda - \mu} \cdot (e^{-\lambda T} - e^{-\mu T}), \quad \varphi_{22}(T) = \frac{1}{\lambda - \mu} \cdot (\lambda \cdot e^{-\lambda T} - \mu \cdot e^{-\mu T}), \quad \lambda = \lambda_x, \\ q_{11} &= \sqrt{p_{11}}, \quad q_{21} = \frac{p_{12}}{q_{11}}, \quad q_{22} = \frac{\sqrt{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}}{q_{11}}, \quad \eta_{1_x}(t_i) \in N(0,1), \quad \eta_{2_x}(t_i) \in N(0,1), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= \sigma_x^2 \left\{ 1 - \frac{1}{(\mu - \lambda)^2} \left[(\mu e^{-\lambda T} - \lambda e^{-\mu T})^2 + \mu \lambda (e^{-\mu T} - e^{-\lambda T})^2 \right] \right\}, \\ p_{12} &= \frac{\mu \lambda}{(\mu - \lambda)^2} \sigma_x^2 \left\{ [(\mu e^{-\mu T} - \lambda e^{-\lambda T})(e^{-\mu T} - e^{-\lambda T}) - (\mu e^{-\lambda T} - \lambda e^{-\mu T})(e^{-\mu T} - e^{-\lambda T})] \right\}, \\ p_{22} &= \mu \lambda \sigma_x^2 \left\{ 1 - \frac{1}{(\mu - \lambda)^2} \left[(\mu e^{-\mu T} - \lambda e^{-\lambda T})^2 + \mu \lambda (e^{-\mu T} - e^{-\lambda T})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Создадим формирующий фильтр для моделирования вертикальной и боковой составляющих дифференцируемого поперечного ветра. Дополним передаточную функцию (17) апериодическим звеном с малой постоянной времени $T_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ в виде:

$$W_{y,z}^*(p) = \frac{p + \frac{\mu_{y,z}}{\sqrt{3}}}{(p + \mu_{y,z})^2} \cdot \frac{\lambda_{y,z}}{p + \lambda_{y,z}}, \quad \lambda_{y,z} \gg \mu_{y,z}. \quad (25)$$

где $\lambda_{y,z}$ — собственная частота вводимого апериодического звена. Для сохранения коэффициента усиления исходной модели (17) параметр $\lambda_{y,z}$ вводится и в числитель. Тогда спектральная плотность дифференцируемого случайного процесса скорости поперечного ветра для формирующего фильтра с передаточной функцией (25) на основании известного соотношения для возбуждаемой белым шумом линейной системы:

$$S_x(\omega) = S_\eta |W_{x/\eta}(j\omega)|^2$$

будет равна:

$$S_{y,z}^*(\omega) = S_{\eta_{y,z}}^* \frac{\lambda_{y,z}^2 (\mu_{y,z}^2 + 3\omega^2)}{3(\mu_{y,z}^2 + \omega^2)^2 (\lambda_{y,z}^2 + \omega^2)}, \quad (26)$$

где $S_{\eta_{y,z}}^*$ — интенсивность входного белого шума. В дальнейшем для рассматриваемого фильтра нижние индексы у параметров для сокращения записи будем исключать.

Найдем интенсивность S_{η} по методу интегральной квадратичной оценки [12]. Для системы третьего порядка (25) дисперсия выходного сигнала динамической линейной системы с постоянными параметрами, на вход которой подается сигнал «белый шум», определяется выражением:

$$\sigma^2 = S_{\eta} \cdot \frac{\Delta_B}{2 \cdot a_2 \cdot \Delta_A}, \quad \Delta_A = \det \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_B = \det \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 \\ b_0^2 & b_1^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$a_0 = \mu^2 \lambda, \quad a_1 = \mu^2 + 2\mu\lambda, \quad a_2 = 2\mu + \lambda, \quad a_3 = 1, \quad b_0 = \frac{\mu\lambda}{\sqrt{3}}, \quad b_1 = \lambda, \quad b_2 = 0. \quad (27)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 — коэффициенты характеристического полинома, b_0, b_1, b_2 — коэффициенты полинома числителя передаточной функции (7). Подставляя выражения для этих коэффициентов в формулу для дисперсии (27) определим из нее искомую интенсивность входного белого шума:

$$S_{\eta} = \sigma^2 \cdot \frac{6\mu \cdot (\mu + \lambda)^2}{\lambda(\mu + 2\lambda)}. \quad (28)$$

Поставляя (28) в (26) получим выражение для спектральной плотности, содержащее назначаемое для моделирования среднеквадратическое отклонение генерируемого сигнала, а именно:

$$S^*(\omega) = \sigma^2 \cdot \frac{6\mu\lambda^2(\mu + \lambda)^2(\mu^2 + 3\omega^2)}{3\lambda(\mu + 2\lambda)(\mu^2 + \omega^2)^2(\lambda^2 + \omega^2)}. \quad (29)$$

При больших значениях λ спектральные плотности $S(\omega)$ и $S^*(\omega)$ являются близкими функциями, а при $\omega \rightarrow \infty$ совпадают, действительно, можно показать, что в пределе функция (29) стремится к (26), а именно:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2 \cdot 6\mu\lambda^2(\mu + \lambda)^2(\mu^2 + 3\omega^2)}{3\lambda(\mu + 2\lambda)(\mu^2 + \omega^2)^2(\lambda^2 + \omega^2)} = \frac{\sigma^2 \cdot 6\mu(\mu + \lambda)^2}{\lambda(\mu + 2\lambda)}.$$

Совпадение дисперсий обеспечивается равенством интегралов от функций (26) и (29):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^*(\omega) d\omega = \sigma^2,$$

что подтверждено численно. Сравним зависимости (26) и (29) для одинаковых значений σ и μ . Для значений $\sigma = 1$ м/с и $\lambda = 25\mu$ на рис. 1 показаны графики исходной $S(\omega)$ и уточненной $S^*(\omega)$ спектральных плотностей при $\mu = 0,2$ с⁻¹ (рис. 1а) и $\mu = 0,6$ с⁻¹ (рис. 1б).

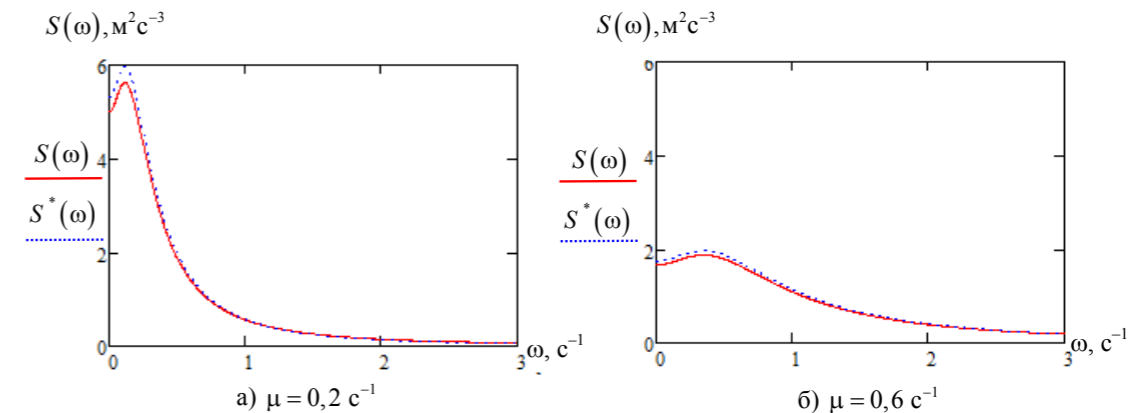


Рис. 1. Спектральные плотности исходной и уточненной моделей Драйдена поперечного турбулентного ветра

Как видно из графиков рис. 1, практически обеспечивается совпадение частотного разложения дифференцируемого случайного процесса и исходного недифференцируемого случайного процесса (модели Драйдена). Отклонение полученной функции в этом варианте соотношений λ и μ не превышает 7%. Таким образом, дисперсии двух процессов и спектры совпадают.

Перейдем к выводу дискретной математической модели формирующего фильтра дифференцируемого поперечного турбулентного ветра. Сначала запишем систему с передаточной функцией (25) и скалярным входом $\eta(t)$ с интенсивностью (28) в непрерывном виде в матричной форме записи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^*(t) = \frac{\mu}{\sqrt{3}} x_1(t) + x_2(t), \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + D\eta(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu^2\lambda & -(\mu^2 + 2\lambda\mu) & -(2\mu + \lambda) \end{bmatrix}, \quad D = \sigma(\mu + \lambda) \sqrt{\frac{6\mu}{\lambda(\mu + 2\lambda)}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{array} \right. \quad (30)$$

где вектор $x_{1,2,3}$ — вспомогательные фазовые переменные, описывающие поведение свободного движения системы.

Использование уравнения (30) для моделирования случайного процесса недопустимо, так как белый шум имеет бесконечную дисперсию. Осуществим переход от непрерывного уравнения (30) к соответствующему ему разностному векторному уравнению с помощью дискретного эквивалентного преобразования [13]. Разностное уравнение для стационарной системы (30) примет вид:

$$x(t_{i+1}) = \Phi(T)x(t_i) + \omega(t_i), \quad \omega(t_i) = [\omega_1(t_i) \ \omega_2(t_i) \ \omega_3(t_i)]^T, \quad (31)$$

$$t_{i+1} = t_i + T, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\Phi(T)$ — фундаментальная матрица системы, T — постоянный шаг дискретизации по времени, t_i — i -тый шаг отсчета, $\omega(t_i)$ — случайный вектор, который определяется дисперсионной матрицей:

$$Q(t_i) = M[\omega(t_i)\omega(t_i)^T], \quad (32)$$

где M — оператор математического ожидания. Заметим, что в дискретном представлении линейной стационарной системы (31) дискретный белый шум, действующий на ее вход, представляет собой последовательность центрированных некоррелированных случайных векторов $\omega(t_i)$, элементы которых предстоит найти.

В уравнении (31) фундаментальная матрица $\Phi(T)$ определяется интегрированием уравнения:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A \cdot \Phi(t), \quad \Phi(0) = E \quad (33)$$

на интервале дискретизации $[0, T]$.

Здесь E — единичная матрица соответствующей размерности. Таким образом, решением уравнения (33) будет матричная экспонента, которая с учетом выражения для матрицы A (30) имеет вид:

$$\Phi(T) = e^{AT} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu^2\lambda & -\mu^2 - 2\lambda\mu & -2\mu - \lambda \end{bmatrix} T}, \quad \Phi(T) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Для нашей стационарной системы (31) матричная функция (34) будет постоянной при выбранном значении T интервала дискретизации, а ее элементы определяются следующими выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{11} = \frac{\lambda[\lambda - 2\mu + \mu(\lambda - \mu)t]e^{-\mu t} + \mu^2 e^{-\lambda t}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{12} = \frac{[2\mu + (\lambda^2 - \mu^2)t]e^{-\mu t} + 2\mu e^{-\lambda t}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{13} = \frac{[-1 + (\lambda - \mu)t]e^{-\mu t} + e^{-\lambda t}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{21} = \frac{\mu^2\lambda\{[1 - (\lambda - \mu)t]e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}\}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{22} = \frac{[\mu^2 + \lambda^2 + \mu(\lambda^2 - \mu^2)t]e^{-\mu t} - 2\mu\lambda e^{-\lambda t}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{23} = \frac{[\lambda - \mu(\lambda - \mu)t]e^{-\mu t} - \lambda e^{-\lambda t}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{31} = \frac{\mu^2\lambda\{[\lambda - \mu(\lambda - \mu)t]e^{-\mu t} + \lambda e^{-\lambda t}\}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{32} = \frac{\mu[-2\lambda^2 + \mu(\lambda^2 - \mu^2)t]e^{-\mu t} + 2\mu\lambda^2 e^{-\lambda t}}{(\lambda - \mu)^2}, \\ \Phi_{33} = \frac{\mu[\mu - 2\lambda + \mu(\lambda - \mu)t]e^{-\mu t} + \lambda^2 e^{-\lambda t}}{(\lambda - \mu)^2}. \end{array} \right. \quad (35)$$

Дисперсионная матрица выходного сигнала $P_x(t)$ линейной стационарной устойчивой системы (30) является симметричной и постоянной и в установившемся состоянии удовлетворяет линейному алгебраическому уравнению [12]:

$$AP_x(\infty) + P_x(\infty)A^T + S_{\zeta_1} = 0, \quad P_x(\infty) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Матричное уравнение (36) для рассматриваемого случая эквивалентно системе шести скалярных уравнений относительно искомым элементов дисперсионной матрицы, а именно:

$$\begin{cases} p_{12} = 0, \\ p_{23} = 0, \\ p_{13} + p_{22} = 0, \\ \mu^2 \lambda p_{11} + (2\mu + \lambda) p_{13} = 0, \\ p_{33} - \mu(\mu + 2\lambda) p_{22} = 0, \\ \frac{6\mu\sigma^2(\mu + \lambda)^2}{\lambda(\mu + 2\lambda)} - 2\mu^2 \lambda p_{13} - 2(2\mu + \lambda) p_{33} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Решение системы (37) определяет дисперсионную матрицу в установившемся состоянии:

$$P_x(\infty) = \begin{bmatrix} \frac{3\sigma^2(2\mu + \lambda)}{2\lambda^2\mu^2(\mu + 2\lambda)} & 0 & -\frac{3\sigma^2}{2\lambda(\mu + 2\lambda)} \\ 0 & \frac{3\sigma^2}{2\lambda(\mu + 2\lambda)} & 0 \\ -\frac{3\sigma^2}{2\lambda(\mu + 2\lambda)} & 0 & \frac{3\mu\sigma^2}{2\lambda} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Нетрудно убедиться, что дисперсия выхода равна заданной величине:

$$\frac{\mu^2}{3} p_{11} + p_{22} = \sigma^2.$$

Уравнение для дисперсионной матрицы (36) в разностной форме записи для входа (32) имеет следующий вид:

$$P_x(t_{i+1}) = \Phi(T)P_x(t_i)\Phi^T(T) + Q(t_i). \quad (39)$$

Так как нас будет интересовать только случайное вынужденное движение системы, находящейся в стационарном и установившемся состоянии после прекращения свободного движения, то на основании

$$P_x(t_{i+1}) = P_x(t_i) = P_x(\infty) = \text{const}, \quad Q(t_i) = Q = \text{const} \quad \text{при } i \rightarrow \infty$$

уравнение для дисперсионной матрицы (39) примет вид:

$$P_x(\infty) = \Phi(T)P_x(\infty)\Phi^T(T) + Q, \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Подставляя в уравнение (40) требуемые выражения из (35) и (38), найдем после матричных преобразований элементы симметричной дисперсионной матрицы случайного дискретного входного вектора формирующего фильтра, а именно:

$$\begin{cases} q_{11} = p_{11} - 2p_{13}\Phi_{11}\Phi_{13} - p_{22}\Phi_{12}^2 - p_{33}\Phi_{13}^2 - p_{11}\Phi_{11}^2, \\ q_{12} = -\Phi_{11}(p_{11}\Phi_{12} + p_{13}\Phi_{23}) - \Phi_{13}(p_{13}\Phi_{12} + p_{33}\Phi_{23}) - p_{22}\Phi_{12}\Phi_{22}, \\ q_{13} = p_{13} - \Phi_{11}(p_{11}\Phi_{13} + p_{13}\Phi_{33}) - \Phi_{13}(p_{13}\Phi_{13} + p_{33}\Phi_{33}) - p_{22}\Phi_{12}\Phi_{23}, \\ q_{22} = p_{22} - 2p_{13}\Phi_{12}\Phi_{23} - p_{22}\Phi_{22}^2 - p_{33}\Phi_{23}^2 - p_{11}\Phi_{12}^2, \\ q_{23} = -\Phi_{12}(p_{11}\Phi_{13} + p_{13}\Phi_{33}) - \Phi_{23}(p_{13}\Phi_{13} + p_{33}\Phi_{33}) - p_{22}\Phi_{22}\Phi_{23}, \\ q_{33} = p_{33} - 2p_{13}\Phi_{13}\Phi_{33} - p_{22}\Phi_{23}^2 - p_{33}\Phi_{33}^2 - p_{11}\Phi_{13}^2. \end{cases} \quad (41)$$

Теперь необходимо найти случайный вектор, дисперсионная матрица которого удовлетворяет (40) и (41), для этого будем искать его в виде:

$$\omega(t_i) = C \cdot \begin{bmatrix} n_1(t_i) \\ n_2(t_i) \\ n_3(t_i) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

где $n_1(t_i), n_2(t_i), n_3(t_i)$ — независимые, нормальные, нормированные, центрированные случайные величины с единичной дисперсией каждая; C — нижняя треугольная матрица, которая удовлетворяет равенству:

$$C \cdot C^T = Q. \quad (43)$$

Формула (43) представляет собой разложение для симметричной матрицы, которую можно представить в виде произведения двух транспонированных друг другу треугольных матриц (42). Нахождение симметрично расположенных элементов верхней треугольной матрицы и ее транспонированной матрицы проведем по методу квадратного корня [11, стр. 166], который дает следующее решение:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sqrt{q_{11}}, \quad c_{12} = \frac{q_{12}}{c_{11}}, \quad c_{13} = \frac{q_{13}}{c_{11}}, \\ c_{22} &= \sqrt{q_{22} - c_{12}^2}, \quad c_{23} = \frac{q_{23} - c_{12}c_{13}}{c_{22}}, \quad c_{33} = \sqrt{q_{33} - (c_{13}^2 + c_{23}^2)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда в окончательном виде дискретная модель генерации случайного процесса поперечного турбулентного ветра (30), имеющей передаточную функцию (25), будет иметь следующее дискретное представление:

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = \Phi_{11}x_{1i} + \Phi_{12}x_{2i} + \Phi_{13}x_{3i} + c_{11}n_{1i}, \\ x_{2,i+1} = \Phi_{21}x_{1i} + \Phi_{22}x_{2i} + \Phi_{23}x_{3i} + c_{12}n_{1i} + c_{22}n_{2i}, \\ x_{3,i+1} = \Phi_{31}x_{1i} + \Phi_{32}x_{2i} + \Phi_{33}x_{3i} + c_{13}n_{1i} + c_{23}n_{2i} + c_{33}n_{3i}, \\ \xi_{i+1}^* = \frac{\mu\lambda}{\sqrt{3}}x_{1,i+1} + \lambda x_{2,i+1}, \quad \dot{\xi}_{i+1}^* = \frac{\mu\lambda}{\sqrt{3}}x_{2,i+1} + \lambda x_{3,i+1}. \end{cases} \quad (45)$$

Выходом формирующего фильтра (45) является скалярная координата ξ_{i+1}^* , представляющая собой дискретный сигнал поперечного турбулентного ветра. Вторая составляющая выхода фильтра — дискретная «производная» $\dot{\xi}_{i+1}^*$ скорости ветра, имеющая размерность ускорения ветра в м/с². Таким образом, формулы (45), (44), (41), (35) описывают формирующий фильтр уточненной модели Драйдена поперечного турбулентного ветра, позволяющей использовать при моделировании производную ветрового возмущения при расчете аэродинамических сил и моментов в уравнениях движения летательного аппарата.

На рис. 2 приведен пример генерации дифференцируемого турбулентного ветра (синий цвет) при $\mu = 0,156 \text{ с}^{-1}$ ($V = 300 \text{ км/ч}$, $L = 533,4 \text{ м}$), $\lambda = 1,6 \text{ с}^{-1}$, $\sigma = 1 \text{ м/с}$ и шаге $T = 0,005 \text{ с}$.

По рекуррентной формуле расчета СКО для дискретной случайной величины:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\xi^*}(i) &= \sqrt{\hat{D}_{\xi^*}(i)}, \quad \hat{D}_{\xi^*}(i) = \frac{i-1}{i}\hat{D}_{\xi^*}(i-1) + \frac{1}{i}(\xi_i^*)^2 - \hat{m}_{\xi^*}^2(i), \\ \hat{m}_{\xi^*}(i) &= \frac{i-1}{i}\hat{m}_{\xi^*}(i-1) + \frac{1}{i}(\xi_i^*), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

графически показана кривая рекуррентной оценки СКО $\hat{\sigma}_{\xi^*}(i)$ (красная кривая). Одновременно проиллюстрирован результат интегрирования производной $\dot{\xi}_{i+1}^*$ по методу Эйлера с шагом 0,005 с (кривая зеленого цвета на рис. 2 сливается с кривой синего цвета).

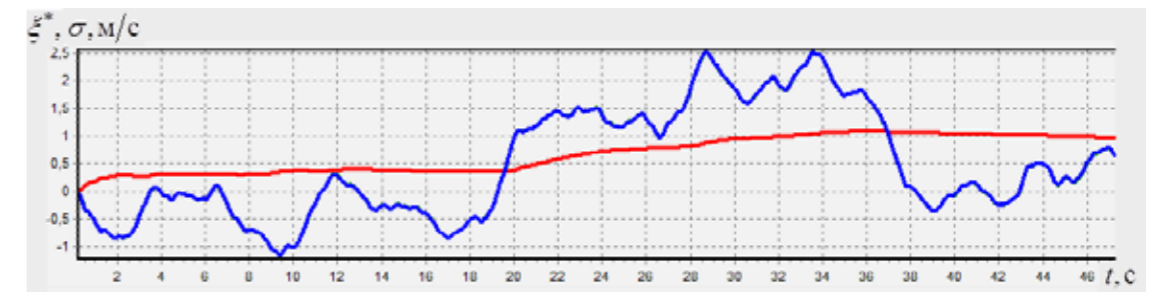


Рис. 2. Случайный процесс дифференцируемого поперечного ветра

На рис. 3 показан увеличенный фрагмент кривых случайного процесса и процесса, восстановленного при интегрировании производной (рис. 2) на сороковой секунде. Ошибка воспроизведения интеграла от дискретной производной генерируемого ветра в сравнении с выходом формирующего фильтра не превосходит 0,004 м/с.

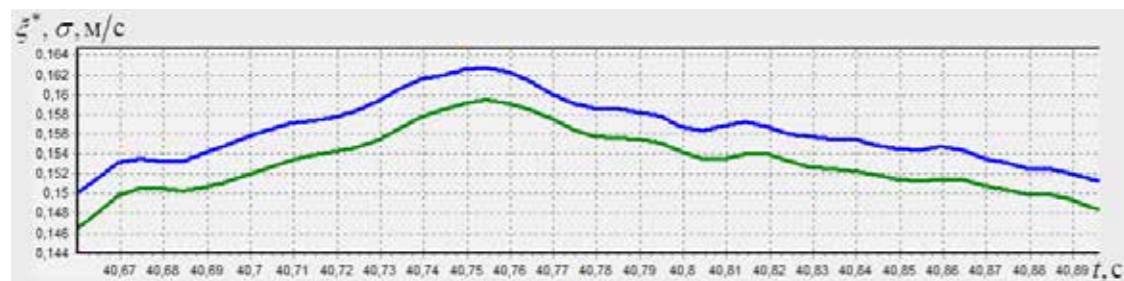


Рис. 3. Сравнение кривых выхода фильтра и интеграла его производной

Таким образом, доказана согласованность генерируемой последовательности скорости и ускорения поперечного турбулентного ветра, которая подтверждается практическим совпадением процесса интегрирования методом Эйлера получаемого ускорения и процесса скорости ветра. Поэтому производная поперечного ветра, получаемая по предложенному методу, может быть применена в моделях летательного аппарата, имеющего в коэффициентах аэродинамических сил и моментов составляющие производных угла атаки и скольжения.

Среднеквадратические отклонения скоростей всех составляющих турбулентного ветра изменяются в пределах 0,2...2 м/с и задаются при моделировании в соответствии с задачей исследования.

Масштабы турбулентности, зависящие от высоты полета, совместно со скоростью полета самолета определяют частотные свойства скорости турбулентного ветра. Масштабы компонент ветра на взлетных режимах полета изменяются пропорционально высоте и лежат в пределах $L = 50...300$ м. На высотах более 500 метров величины масштабов турбулентности в свободной атмосфере считаются постоянными и превосходят 500 м. Зависимость масштабов турбулентности от высоты полета, а также соотношения между СКО продольного, вертикального и бокового ветров могут быть найдены, например, в работах [3, 14, 15] и определяются конкретной задачей моделирования полета летательного аппарата.

Литература

1. Доброленский Ю. П., Иванова В. И., Поспелов Г. С. Автоматика управляемых снарядов. — М.: ГНТИ Оборонгиз, 1963. — 548 с.
2. Воздушная навигация: справочник / А. М. Белкин, Н. Ф. Миронов, Ю. И. Рублев, Ю. Н. Сарайский. — М.: Транспорт, 1988. — 303 с.
3. Единые западно-европейские нормы летной годности. Всепогодные полеты. ЕЗЕНЛГ-ВП. / Перевод с англ. JAR-FWO, 2-е изменение от 01 08.1996 г. — ЛИИ им. М. М. Громова.
4. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е переработанное и доп. — М.: Машиностроение, 1973. — 616 с.
5. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г. С. Бюшгенса. — М.: Наука. Физматлит, 1998. — 816 с.
6. Динамика полета: Учебник для студентов высших учебных заведений / А. В. Ефремов, В. Ф. Захарченко, В. Н. Овчаренко и др.; под ред. Г. С. Бюшгенса. — М.: Машиностроение, — 2011. — 776 с.
7. Красовский А. А. Системы автоматического управления и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. — 560 с.
8. Турбулентность в свободной атмосфере. - 2-е изд., перераб. и доп. / Н. К. Винниченко, Н. З. Пинус, С. М. Шметер, Г. Н. Шур — Л.: Гидрометеиздат, 1976. — 287 с.
9. Доброленский Ю. П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. — М.: Машиностроение, 1969. — 254 с.
10. Кулифеев Ю. Б. Определение дискретных математических моделей динамических объектов, заданных линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами / Труды Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского, 2008, № 3 (т. 80). С. 5-19.

11. Куликов В. Е. Формирующий фильтр дифференцируемого турбулентного ветра. // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. Вып. 7, 2013. С. 36-42.
12. Кочетков Ю. А. Основы автоматики авиационного оборудования. М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1995. – 574 с.
13. Кулифеев Ю. Б. Методика построения дискретных математических моделей линейных динамических объектов с постоянными коэффициентами. // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. Вып. 13, 2016. С. 2-16.
14. Авиационные правила. Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. Приложение G. – М.: МАК Авиаиздат, 2009. – 274 с.
15. David J. Moorhouse; Robert J. Woodcock. Background Information and User Guide for MIL-F-8785C, Military Specification – Flying Qualities of Piloted Airplanes. – Flight Dynamics Laboratory, 1982. – 256 p.

УДК 629.7.052

О ПЕРСПЕКТИВНЫХ АСТРОКОРРЕКТОРАХ АСТРОИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

**С. А. ЧЕРЕНКОВ,
А. А. ХУДЯКОВ**

ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Рассмотрена возможность разработки малогабаритных астрокорректоров с использованием матричных приемников излучения, обеспечивающих упрощение и удешевление технологий разработки перспективных астроинерциальных навигационных систем.

Ключевые слова: астроинерциальная навигационная система, астрокорректор, астроориентир, обнаружительная способность, матричный фотоприемник.

ON ADVANCED ASTRO-INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS ASTROCORRECTORS

**S. A. CHERENKOV,
A. A. HUDYAKOV**

'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The possibility of small-size astrocorrectors development based on matrix radiation detectors providing simplifying and cost cutting of the advanced astro-inertial navigation systems development technology is considered here.

Keywords: astro-inertial navigation system, astrocorrector, stellar tracker, detectability, matrix radiation detectors.

Введение

История развития астроинерциальных систем (АИС) для воздушных летательных аппаратов (ВЛА) представлена в [1] с кратким описанием коррекции инерциальных систем по астрокорректорам (звездным датчикам, упрощенно представляющих собой телеблок с фотоприемным устройством). Пути дальнейшего развития применяемых на ВЛА АИС нового поколения — использование новых производственных технологий, обеспечивающих применение систем в жесточенных условиях эксплуатации при дальнейшем уменьшении погрешности коррекции инерциальных параметров и увеличении надежности. В настоящее время используются два принципа построения астрокорректоров АИС для ВЛА, а именно, построение астрокорректора с «узкопольным» телеобъективом на базе усовершенствованного метода сканирования и построение астрокорректора на базе «широкопольного» телеобъектива без механического сканирования областей небесной сферы.

Преимущества и недостатки АИС с «широкопольным» астрокорректором подробно рассмотрены в [2]. Основным преимуществом данного построения считается существенное уменьшение стоимости и габаритов АИС при повышении ее надежности и точности без применения высокоточного механического устройства наведения, а наибольшую трудность представляет создание прибора звездной ориентации, способного визировать и автоматически выделять группу звезд в поле зрения как ночью, так и днем, при углах Солнца, близких к оптической оси (менее 40°). Здесь также важно исключение «смазов» изображения при угловых качаниях объекта.

Для сканирующих «узкопольных» астрокорректоров ранее разработанных систем Л-14 и Л-41 [1] длительное сканирование небесной сферы приводило к значительному расходу ресурса АИС. Но можно усовершенствовать процесс сканирования, а именно:

- наличие поля зрения $> 0,5^\circ$ (учитывающее ошибку в расчете направления) для мгновенного уверенного захвата астроориентира позволяет уйти от долговременного сканирования небесной сферы, тем самым уменьшая нагрузку на вращающиеся части;

- применение матричных приемников излучения позволяет использовать методики накопления сигнала и суммирования кадров для увеличения отношения сигнал/шум;

- стабилизацией оптической оси в географической системе координат при угловых колебаниях объекта (по курсу, крену и тангажу) можно практически исключить «смаз» изображения с целью эффективного использования световой энергии астроориентира,

остаточные колебания стабилизации визирной оси телеблока при угловом колебании объекта более 3°/с не превышают 15"/с.

При использовании двигателей, имеющих наработку на отказ (при номинальных условиях вращения ротора) до 20000 — 50000 ч, как например, бесконтактные моментные электродвигатели серии ДБМ, и при угловых колебаниях объекта намного менее номинальных скоростей вращения двигателей, стабилизация оптической оси телеблока в инерциальном пространстве не вызовет сильного расхода ресурса вращающихся частей.

Так используются преимущества обоих подходов к построению астрокорректоров, а именно, применение матричных приемников излучения и сканирование небесной сферы.

Рассмотрим возможность построения астрокорректора, максимально уменьшая геометрические размеры его оптико-электронной части, что способствует уменьшению энергопотребления и увеличению надежности астроинерциальной системы в целом.

Основные соотношения, определяющие обнаружительную способность телеблока астрокорректора

Отношение сигнал/шум [3] для выделения сигнала при воздействии фонового излучения и шумовых помех:

$$S/N = \frac{N_*}{\sqrt{N_* + n_{pix} + (N_S + N_D + N_R^2)}}, \quad (1)$$

где N_* — количество фотоэлектронов от полезного сигнала на пиксель матрицы;

N_S — количество фотоэлектронов от фонового излучения на пиксель матрицы;

N_D — общее количество электронов темнового тока на пиксель матрицы;

N_R^2 — шум чтения;

n_{pix} — количество пикселей матрицы, на которых формируется изображение астроориентира.

Освещенность в изображении астроориентира $E_*(\text{Лк})$:

$$E_* = \tau_{об1} E_{зв} D^2 / d^2, \quad (2)$$

где $E_{зв}$ — освещенность на входном зрачке объектива, созданная излучением астроориентира;

D — диаметр входного зрачка объектива;

d — средний диаметр изображения астроориентира;
 $\tau_{об_1}$ — пропускание объектива для спектра излучения астроориентира.

Освещенность по полю матрицы от воздействия фонового излучения E_S (Лк) [4]:

$$E_S = 0,25\pi\tau_{об_2}B_\phi D^2/d^2, \quad (3)$$

f — фокус объектива;
 $\tau_{об_2}$ — пропускание объектива для спектра фонового излучения;
 B_ϕ — яркость фона.

Освещенность на входном зрачке объектива [5]:

$$E_\phi = \pi B_\phi, \quad (4)$$

тогда

$$E_S = 0,25\tau_{об_2}E_\phi D^2/f^2, \quad (5)$$

$$N_* = K_1 E_*, \quad (6)$$

где K_1 — коэффициент, учитывающий спектральный квантовый выход фоточувствительного слоя матрицы, время экспозиции и спектр излучения астроориентира.

$$N_S = K_2 E_S, \quad (7)$$

где K_2 — коэффициент, учитывающий спектральный квантовый выход фоточувствительного слоя матрицы, время экспозиции и спектральный состав фонового излучения.

При $N_S \gg N_*$, $N_S \gg N_D$, $N_S \gg N_R^2$,

$$S/N = \frac{N_*}{\sqrt{n_{pix} N_S}} = \frac{K_1 \tau_{об_1} E_{зв} D^2 / d^2}{\sqrt{n_{pix} K_2 0,25 \tau_{об_2} E_\phi D^2 / f^2}} = \frac{K_1 \tau_{об_1} E_{зв}}{\sqrt{n_{pix} K_2 0,25 \tau_{об_2} E_\phi}} \frac{Df}{d^2}. \quad (8)$$

Осуществление суммирования M кадров позволяет уменьшить дисперсию $n_{pix} N_S$ в M раз. Такой подход обоснован, поскольку шум выхода фотоэлектронов вызван в основном фотонным шумом, являющимся в свою очередь белым шумом [5]. Таким образом, отношение сигнал/шум:

$$S/N = \sqrt{M} \frac{N_*}{\sqrt{n_{pix} N_S}} = \sqrt{M} \frac{K_1 \tau_{об_1} E_{зв}}{\sqrt{n_{pix} K_2 0,25 \tau_{об_2} E_\phi}} \frac{Df}{d^2}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что способом повышения обнаружительной способности (при сохранении размера изображения) являются:

- увеличение диаметра входного зрачка объектива;
- увеличение фокуса объектива;
- реализация суммирования кадров матрицы с целью среднестатистического уменьшения воздействия фонового шума.

Увеличение светового диаметра объектива и фокуса возможно до определенных допустимых габаритами АИС размеров, а суммировать кадры имеет смысл, если выполняется соотношение:

$$\sigma K_2 E_S \gg K_1 E_*, \quad (10)$$

где σ — безразмерная неравномерность чувствительности по полю матрицы, т. е. сигнал астроориентира не теряется из-за неравномерности чувствительности по полю матрицы. Неравномерность чувствительности можно решить, например, калибровкой пикселей.

Рассмотрим вопрос предельного уменьшения светового диаметра объектива астрокорректора.

Анализируя имеющиеся матричные приемники, можно сделать вывод о наличии технологий матричных фотоприемников (например, CMOS) с размером пикселя менее 5 мкм, потенциальной ямой до порядка 10000 е, с динамическим диапазоном до 60 ДБ.

Рассмотрим фотоприемник со следующими параметрами:

- размер пикселя $\Delta = 5$ мкм;
- размер матрицы 2048*2048 пикселей;
- потенциальная яма (максимально возможное количество фотоэлектронов в пикселе без насыщения) $P = 10000$ е;
- динамический диапазон $D = 60$ ДБ (будем стремиться обеспечить уровень энергии в изображении на уровне не менее дисперсии темновой шумовой составляющей);
- спектры астроориентира и фона аналогичны ($K_1 = K_2$);
- длина волны максимальной спектральной чувствительности матрицы $\lambda_{max} = 0,8$ мкм.

Будем также считать, что средний диаметр изображения составляет два размера пикселя, а время накопления позволяет заполнить потенциальную яму до $N_S = 0,8P$ при $N_* \geq 10$. Максимальное фоновое излучение на входном зрачке объектива $E_\phi = 10000$ Лк, а освещенность от звезды на входном зрачке не менее $E_{зв} = 4 \cdot 10^{-8}$ Лк (~ 4 зв. величина), пропускание объектива для излучений фона и звезды — 0,8.

Определим требование к угловому разрешению, чтобы $N_* \geq 10$, а именно:

$$\frac{N_s}{N_*} = 0,25 \frac{d^2}{f^2} \frac{E_\phi}{E_{3B}} \leq \frac{0,8P}{10} = 800, \quad (11)$$

$$\frac{d}{f} \leq 56 \sqrt{\frac{E_\phi}{E_{3B}}} = 11 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 20 \text{ угл. с.} \quad (12)$$

Учитывая дифракционную расходимость, выберем значение D , а именно: $1,22\lambda_{\max}/D = d/f \leq 20$ угл. с.

Откуда следует $D \geq 8$ мм. Выберем минимально $D = 10$ мм.

Из условий (12) и $d = 2\Delta$ следует $f \geq 90$ мм.

Телеобъектив Максутова – Кассегрена [6] с диаметром входного зрачка 10 мм и фокусом 100 мм представлен на рис. 1. Концентрация энергии в изображении представлена на рис. 2.

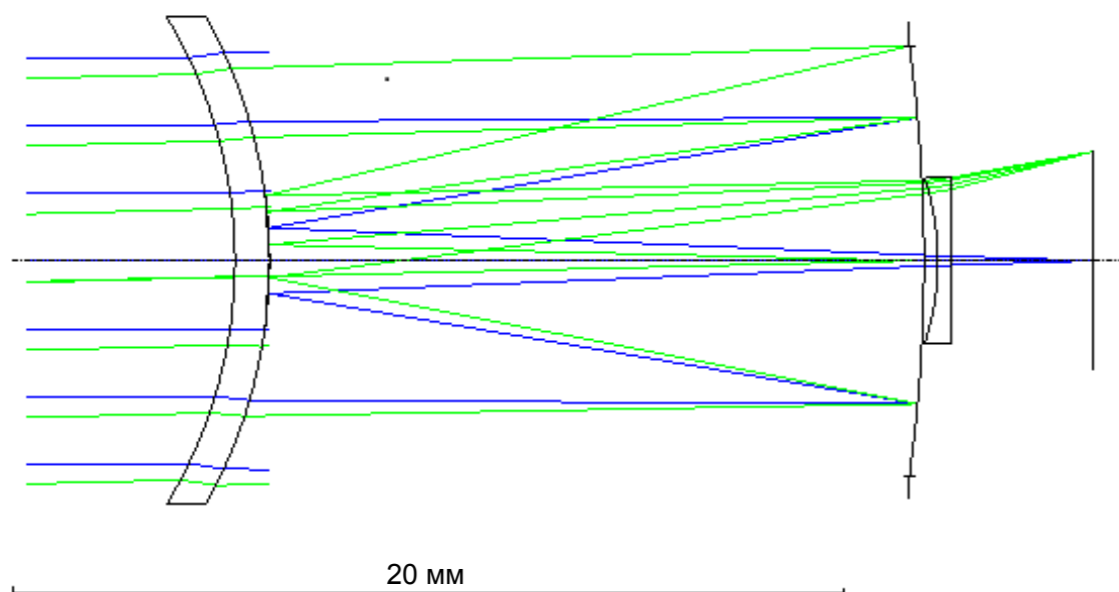


Рис. 1. Оптическая схема объектива с ходом лучей

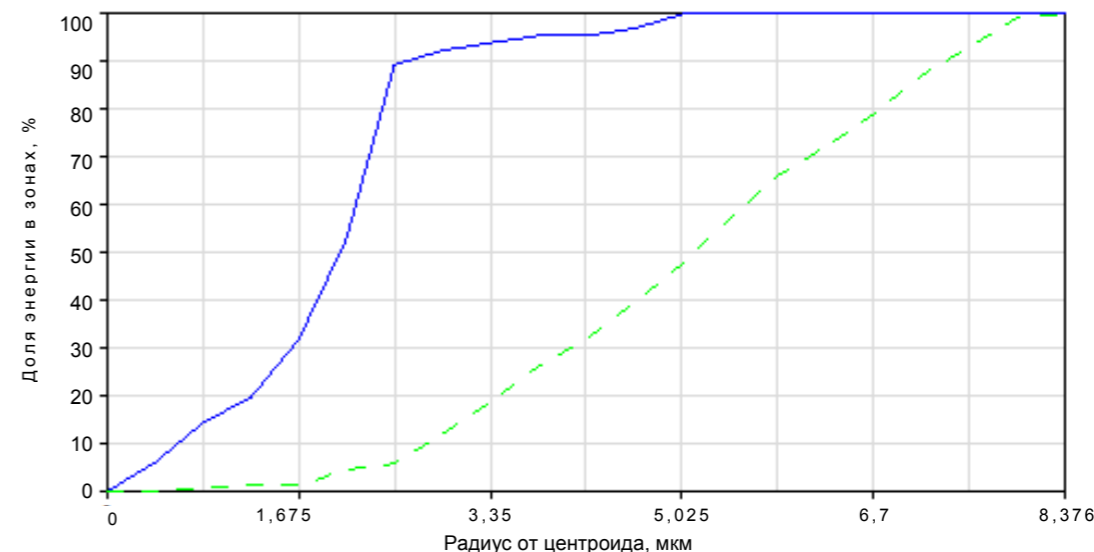


Рис. 2. Доля энергии в изображении в зависимости от радиуса от центроида (график слева — доля энергии для лучей параллельных оптической оси; график справа — доля энергии для луча под углом $0,5^\circ$ к оптической оси)

При $d = 2\Delta$ количество пикселей, на которых формируется изображение, равно $n_{pix} = 4$, и, учитывая (9), $N_s = 8000$ ($0,8P$), $\frac{N_s}{N_*} = 800$, получим:

$$S/N = \sqrt{M} \frac{N_*}{\sqrt{n_{pix} N_s}} = 0,056\sqrt{M}.$$

Для обеспечения $S/N > 3$ должно быть: $\sqrt{M} > 53$, $M > 2800$ кадров.

Если обеспечивается многокадровый режим работы со скоростью съемки ~ 100 кадров в секунду (при соответствующем времени накопления сигнала), то накопление информации может быть обеспечено за время порядка $M/100 \approx 28$ с по каждому астроориентире.

С увеличением скорости съема изображения (при сохранении необходимого времени экспозиции) можно уменьшать общее время визирования астроориентира.

Используя вышеуказанный подход к реализации астрокорректора, варьируя имеющиеся параметры необходимых к регистрации входных излучений и выбирая приемники с лучшими, по сравнению с представленной моделью, параметрами, можно и далее уменьшать габариты астрокорректора.

Таким образом, имеется возможность построения простейших оптико-электронных схем астрокорректоров с использованием свойств матричных приемников оптического излучения.

Литература

1. Чесноков Г. И., Черенков С. А. Астроинерциальные системы, прошлое, настоящее, будущее. Журнал «История науки и техники», №9 2016 г. Издание «Научтехлитиздат», Москва 2016 г., с. 27-31.
2. Аванесов Г. А., Бессонов Р. В., Куркина А. Н., Людомирский М. Б., Каютин И. С., Ямщиков Н. Е. Автономные бесплатформенные астроинерциальные навигационные системы: принципы построения, режимы работы и опыт эксплуатации // «Гироскопия и навигация» № 3, 2013 г., с. 92-93.
3. Howell S. B. Handbook of CCD Astronomy. — Second ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006. — P. 73.
4. Забелина И. А. Расчет видимости звезд и далеких огней. Ленинград, «Машиностроение», 1978 г., с. 138-139.
5. Якушенко Ю. Г. Основы теории расчета оптико-электронных приборов. М.: «Советское радио», 1971 г., с. 76.
6. Русинов М. М. Композиция оптических систем. Ленинград, «Машиностроение», 1989 г., с. 278, 283.

УДК 629.7.05

ИНТЕГРАЦИЯ МОДУЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В АРХИТЕКТУРУ ИМИТАТОРОВ СТЕНДОВЫХ КОМПЛЕКСОВ

В. Л. ФЕДОТОВ

ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

В работе предложена концепция интеграции модульности в архитектуру стендовых комплексов. В комплексе используются имитаторы блоков и систем авиационного оборудования, архитектура которых предусматривает возможность модульной замены устройств ввод-вывода. Предлагаемая архитектура служит для быстрой замены и реконфигурации имитатора.

Устройства ввода-вывода объединяются в один кластер с помощью кросс платы. Информационный обмен между кластером и компьютером управления осуществляется по протоколу Fast Ethernet, что обеспечивает минимизацию задержки передачи данных и простоту управления. Кросс плата обеспечивает агрегацию и передачу данных с устройств ввода-вывода и частичную перетрассировку линий связи с выходами имитатора.

Ключевые слова: *стендовый комплекс, модульный имитатор, информационный обмен, агрегатор данных.*

INTEGRATION OF MODULAR SOLUTIONS INTO TEST FACILITIES SIMULATORS ARCHITECTURE

V. L. FEDOTOV

'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The paper introduces the concept of integration of modularity into test facilities architecture. In the test facilities employ aircraft equipment units and systems simulators with the architecture that provides the ability of input-output (I/O) devices modular replacement. The proposed architecture is used for quick replacement and reconfiguration of a simulator.

I / O devices are integrated into one cluster with the help of a cross-board. Data exchange between the cluster and the control computer is provided via the Fast Ethernet protocol, which minimizes data transmission delays and simplifies control. The cross-board provides data aggregation and transmission from I / O devices and partial realignment of communication links with simulator outputs.

Keywords: *test facilities, modular simulator, information exchange, data aggregator.*

Введение

На сегодняшний день бортовое оборудование летательных аппаратов активно развивается, внедряются новые аппаратные и программные решения. Для снижения стоимости процедур отладки авионики создают полунатурные стенды, которые способны в наземных условиях воспроизводить работу бортового оборудования. В данной статье предложена концепция стендового комплекса на базе модульной архитектуры имитаторов. Основной особенностью является применение агрегатора данных для упрощенного и эффективного информационного обмена. Предлагаемая схема построения имитатора позволяет использовать:

- высокую скорость информационного обмена;
- быструю реконфигурируемость;
- возможность «горячей» замены устройств ввода-вывода.

Основная часть

В классической структуре полунатурного стенда имитатор объектов и систем представляет собой промышленный компьютер в форм-факторе корпуса IPC-623 с кросс платой, в которую установлены устройства ввода-вывода. Протокол взаимодействия между платами и компьютером базируется на технологии PCI шины данных. Основной недостаток такого устройства имитатора заключается в ограниченности количества слотов для PCI-устройств в шине кросс платы. В связи с тем, что современное бортовое оборудование обладает большим количеством информационных связей, требуется большое количество покупных устройств ввода-вывода, которые не размещаются в корпусе одного промышленного компьютера. С увеличением количества промышленных компьютеров в качестве имитаторов встает задача связи их в один кластер для синхронного управления. Данная задача чаще всего является сложной для исполнения в связи с взаимозависимостью сигналов имитатора. Замена модулей ввода-вывода по «горячему» просто невозможна из-за устройства промышленного компьютера.

Предлагаемая концепция заключается во внедрении структуры модульности в архитектуру имитатора сигналов датчиков и систем. Каждое устройство ввода-вывода является самостоятельным модулем, разработанным на базе семейства 8 битных контроллеров фирмы Microchip. Основная особенность этих модулей заключается в том, что каждый сам по себе является автономным и может передавать данные по протоколу USB 2.0 (обобщенная схема модуля ввода-вывода представлена на рисунке 1). Размещение таких устройств уже не ограничено габаритами корпуса системного блока промышленного компьютера и может быть осуществлено, например, на DIN рейках в 19" серверной стойке.

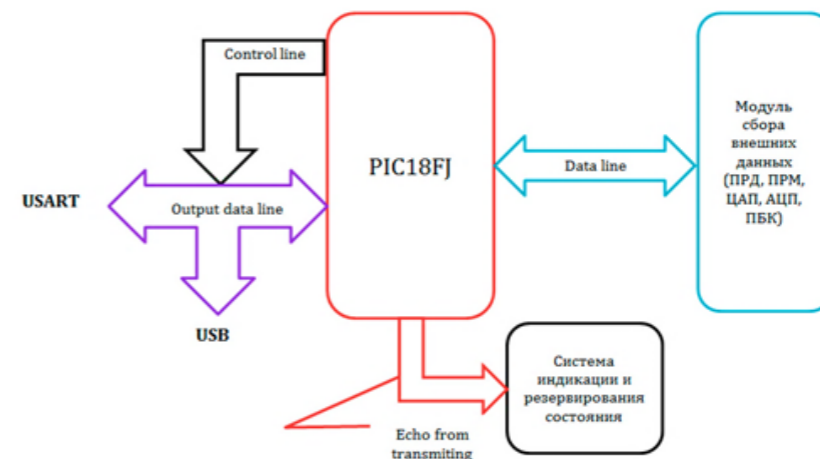


Рис. 1. Обобщенная схема модуля сбора внешних данных

При увеличении количества модулей ввода-вывода устанавливается агрегатор данных на базе высокоскоростного контроллера PIC32MZ с частотой работы ядра 200МГц. Сбор данных происходит по протоколу обмена USART со скоростью передачи 1562500 baud/s. Один кластер агрегирования данных поддерживает до 6 модулей ввода-вывода (обобщенная схема агрегатора представлена на рисунке 2). Сам контроллер обладает периферийным модулем Ethernet MII (Media Independent Interface), для его преобразования к протоколу Fast Ethernet используется преобразователь интерфейса MII/RMII 10/100 Ethernet Transceiver совместимый с данным контроллером.

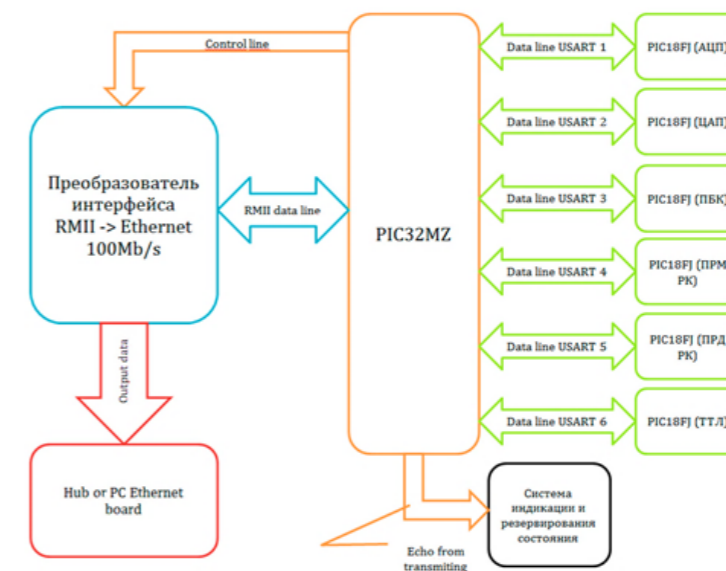


Рис. 2. Обобщенная схема агрегатора данных

Общий принцип построения и взаимодействия устройств заключается в следующем (представлен на рисунке 3). Кластер агрегации данных подключен через Ethernet к «тонкому клиенту» или PC. Через него происходит сбор данных с периферийных модулей ввода-вывода и передача команд состояния модулям по протоколу USART (Universal Synchron/Asynchronous Receiver-Transmitter). Контроллер, входящий в состав модуля, обладает автоподстройкой частоты приема и передачи информации по USART.

Скорость информационного обмена между кластером и модулями приближена к скорости обмена шины PCI за счет простоты программного обеспечения и высокой скорости работы центральных ядер контроллеров управления.

Не менее важной особенностью модульной архитектуры является возможность «горячей» замены модулей, так как протокол USART не восприимчив к отключениям и перепадам напряжения соединения.

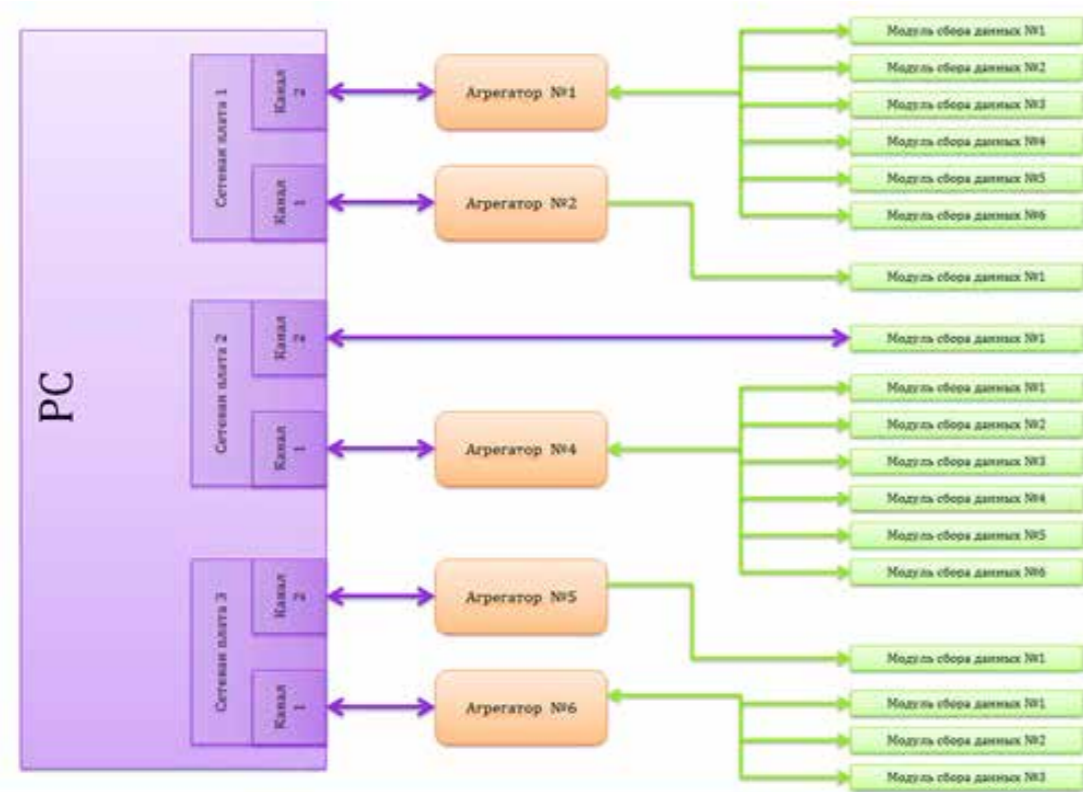


Рис. 3. Схема построения межмодульного взаимодействия

Каждый модуль оснащен отдельным разъемом питания и имеет в своем составе высокостабилизированные преобразователи напряжения, что, в свою очередь, делает невосприимчивыми внутренние контуры модулей к импульсным падениям или возрастаниям напряжения. В связи с этим каждый модуль внутри кластера можно отключать и подключать, не нарушая основного потока информационного обмена. Все выходные разъемы модулей являются идентичными и возможна 100% замена модуля.

Заключение

Внедрение данной архитектуры построения имитаторов систем и датчиков в стендах полунатурного моделирования позволит отказаться от привычных промышленных компьютеров с установленными в них устройствами ввода-вывода, увеличить количество устройств ввода-вывода и упростить работу с ними в составе конкретного стенда. Дополнительным плюсом предложенного решения является существенное сокращение длины проводов фидера стенда за счет появляющейся возможности размещения модулей имитаторов систем и датчиков бортового оборудования вблизи реального бортового оборудования, входящего в состав стенда. Так как каждый модуль может работать независимо от агрегатора, то расширяется количество областей применения и внедрения данной концепции.

Литература

1. Демидов Д. М., Крупенин А. Ю., Федотов В. Л. Развитие стендовых комплексов АО МИЭА и инновации в их технической реализации. // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами, выпуск 12, 2016 г.
2. Федотов В. Л. Демонстрационно-исследовательский стендовый комплекс для имитации и полунатурного моделирования движения воздушного судна. // Навигация и управление движением. 17-20 марта 2015 года. Санкт-Петербург ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». XVII конференция молодых ученых «Навигация и управление движением».
3. Федотов В. Л. Стенд имитационного моделирования пилотажно-навигационного комплекса. // 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика-2014». 17-21 ноября 2014 года. Москва. Тезисы. – СПб.: Мастерская печати, 2014. – 710 с.
4. Федотов В. Л. Особенности программного обеспечения демонстрационно-исследовательского стендового комплекса моделирования навигационного оборудования. // XXIV Международная научно-техническая конференция «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». 14-20 апреля 2015 года. Алушта. Труды XXIV Международной научно-технической конференции.

УДК 629.7.05

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ЖЕЛАЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНТУРА СТАБИЛИЗАЦИИ ВЫСОТЫ ПОЛЕТА САМОЛЕТА

А. С. ЮРЧЕНКО

ПАО «Московский институт электромеханики и автоматики»

Рассмотрен способ синтеза контура стабилизации высоты на основе метода обратных задач динамики. Предложен подход к аналитическому определению области желаемых динамических параметров замкнутого контура управления. Найдены границы области назначаемых параметров.

Ключевые слова: контур управления, область желаемых значений, коэффициенты обратных связей, желаемые корни, делимость многочленов, быстродействие, устойчивость системы.

DESIRED AIRCRAFT ALTITUDE CONTROL LOOP PARAMETERS RANGE DETERMINATION

A. S. YURCHENKO

'Moscow Institute of Electromechanics and Automatics' PJSC

The article considers a method of altitude control loop synthesis based on the dynamics inverse problems technique. An approach to the analytical estimation of closed control loop desired dynamic parameters range is proposed. The assigned parameters range boundaries are found.

Keywords: control loop, desired parameters range, feedback, desired roots, polynomial divisibility, quick-response, system stability.

Рассмотрим синтез контура стабилизации высоты по методу обратных задач динамики [1]. Метод позволяет аналитически определять закон управления динамической системой по желаемым характеристикам эталонного контура. Важным вопросом остается вопрос назначения желаемых параметров, которые задают необходимые динамические свойства синтезируемой системы. Существующие в настоящее время системы стабилизации высоты полета транспортных самолетов ограничены по быстродействию. Поставим задачу нахождения области желаемых параметров контура управления высотой, гарантирующей достижение повышенного быстродействия при сохранении необходимой устойчивости системы управления.

Уравнения движения центра масс ЛА в вертикальной плоскости имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = g[n_x(t) - \sin \theta(t)], \\ \dot{\theta}(t) = \frac{g}{V(t)}[n_y(t) - \cos \theta(t)], \\ \dot{H}(t) = V(t) \cdot \sin \theta(t). \end{cases} \quad (1)$$

где $V(t)$ — воздушная скорость полета, g — ускорение свободного падения, $\theta(t)$ — угол наклона траектории, $H(t)$ — высота полета, $n_x(t)$ — тангенциальная перегрузка, $n_y(t)$ — нормальная скоростная перегрузка. Привод руля высоты положим безынерционным. Систему (1) дополним системой уравнений ошибки и ее производных от заданной высоты $H_{\text{зад}}$ для дальнейшего построения желаемого характеристического полинома стабилизации высоты:

$$\begin{cases} \Delta H = H_{\text{зад}} - H, \\ \Delta \dot{H} = -\dot{H} = -V \sin \theta, \\ \Delta \ddot{H} = -\ddot{H} = -g(n_x \sin \theta + n_y \cos \theta - 1). \end{cases} \quad (2)$$

В установившемся режиме стабилизации высоты скорость полета будем полагать постоянной $V = V_{\text{зад}} = \text{const}$, угол наклона траектории в горизонтальном полете примем близким нулю, тогда $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = \theta$.

С применением метода обратных задач динамики на основании выражений (1) и (2), проведем синтез контура стабилизации высоты полета, построенного по принципу ПИ-Д регулятора [2]. Для этого в контур включим интегральное динамическое звено. Введение интегрального звена в контур управления повысит порядок полинома от второго (1) до третьего. Желаемый характеристический полином

представим в виде произведения полиномов второго и первого порядков:

$$(T_H^2 p^2 + 2\xi_H T_H p + 1)(T_n p + 1)\Delta H(p) = 0. \quad (3)$$

где T_H, ξ_H — заданные постоянная времени и относительный коэффициент затухания составляющей колебательного процесса по $\Delta H(p)$, T_n — заданная постоянная времени, определяющая интегральную составляющую переходного движения системы.

С учетом:

$$\begin{cases} p^2 \cdot \Delta H(p) = -g \Delta n_y, \\ p \cdot \Delta H(p) = -V \cdot \theta(p). \end{cases} \quad (4)$$

понятно, что для удобства дальнейших вычислений желательно при $\Delta H(p)$ сохранять второй порядок полинома. Поэтому домножим левую и правую части полинома (3) на $\frac{1}{p}$, получим:

$$T_H^2 T_n p^2 \Delta H(p) + (T_H^2 + 2\xi_H T_H T_n) p \Delta H(p) + (2\xi_H T_H + T_n) \Delta H(p) + \frac{1}{p} \Delta H(p) = 0. \quad (5)$$

Далее будем опускать промежуточные вычисления.

Подставим выражение (4) в полином (5), также полагая $\Delta n_y = \Delta n_{y_{\text{зад}}}^{\text{ид}}$, $V_y = V\theta$, вернемся во временную область, получим при этом выражение для коэффициентов закона управления по заданной перегрузке:

$$\begin{cases} \Delta n_{y_{\text{зад}}}^{\text{ид}} = -K_{V_y} V_y + K_{\Delta H} \Delta H + K_{\int} \int_{t_{\text{вкл}}}^t \Delta H(\tau) d\tau, \\ K_{V_y} = \frac{T_H^2 + 2\xi_H T_H T_n}{g T_H^2 T_n}, \quad K_{\Delta H} = \frac{2\xi_H T_H + T_n}{g T_H^2 T_n}, \quad K_{\int} = \frac{1}{g T_H^2 T_n}, \end{cases} \quad (6)$$

где $K_{V_y}, K_{\Delta H}, K_{\int}$ — передаточные коэффициенты обратной связи по вертикальной скорости, отклонению и интегралу отклонения по высоте астатического контура стабилизации высоты.

Выражение (6) определяется желаемыми постоянными времени T_H, T_n и относительным коэффициентом затухания ξ_H , которые фактически обеспечивают необходимую (желаемую) траекторию свободного движения замкнутой системы и оказывают непосредственное влияние на характер переходных процессов в контуре управления.

На основании (1), (2) и (6) составим структурную схему (рис. 1) идеального (безынерционного) контура стабилизации высоты:

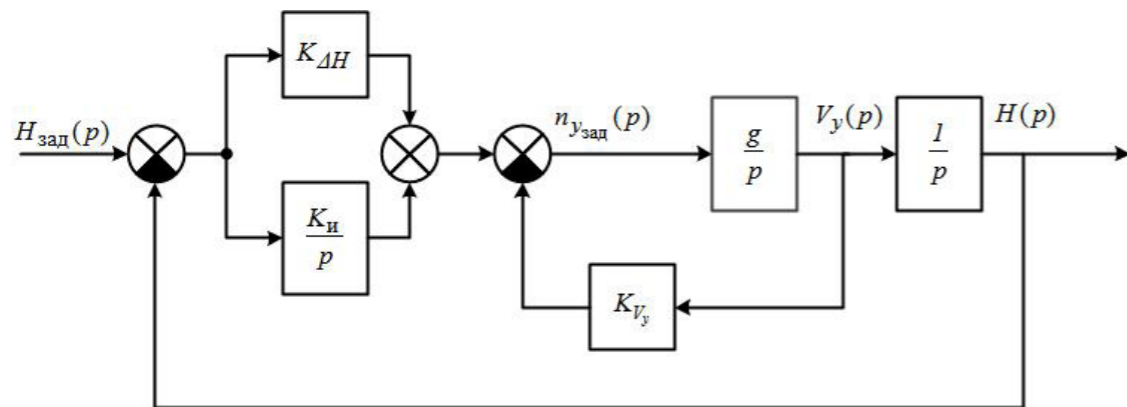


Рис. 1. Структурная схема идеального астатического контура стабилизации высоты

Передаточная функция замкнутого контура (6) имеет вид:

$$W_H^{H_{зад}}(p) = \frac{g(K_{\Delta H}p + K_{и})}{p^3 + gK_{V_y}p^2 + gK_{\Delta H}p + gK_{и}} = \frac{(2\xi_H T_H + T_{и})p + 1}{(T_{и}p + 1)(T_H^2 p^2 + 2\xi_H T_H p + 1)}. \quad (7)$$

Итак, видно, что характеристический полином синтезированной системы (7) полностью совпадает с желаемым.

Система (7) не учитывает динамики объекта управления, поэтому введем в исследуемую систему (рис. 1) динамическое звено, описывающее процесс отработки приращения заданной перегрузки. Передаточная функция звена имеет вид:

$$W_{\Delta n_y}^{\Delta n_{y,зад}}(p) = \frac{1}{T_{n_y}^2 p^2 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p + 1}. \quad (8)$$

где T_{n_y} , ξ_{n_y} — соответственно постоянная времени и относительный коэффициент затухания контура отработки перегрузки самолета, которые определяются [3] аэродинамическими коэффициентами сил и моментов, действующих на самолет.

Коэффициенты обратных связей K_{V_y} , $K_{\Delta H}$, $K_{и}$, определяемые желаемыми постоянными времени T_H , $T_{и}$ обозначим и уточним в синтезированной системе. Структурная схема полного контура управления с учетом динамики подсистемы отработки перегрузки (8) примет вид:

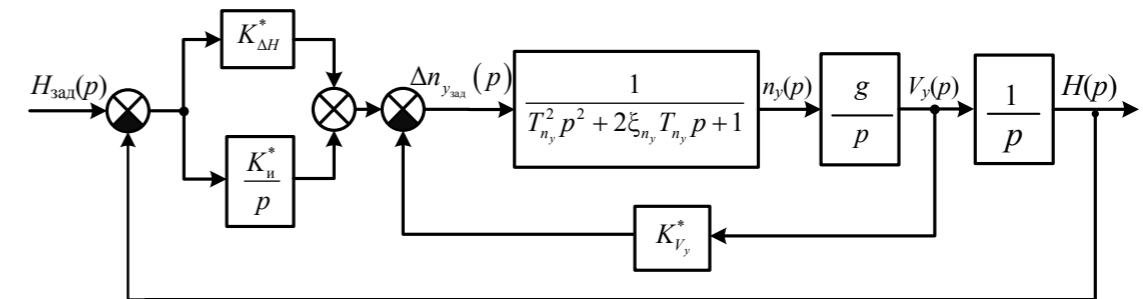


Рис. 2. Структурная схема полного астатического контура стабилизации высоты

Передаточная функция системы (рис. 2) имеет вид:

$$W_H^{H_{зад}}(p) = \frac{(K_{\Delta H}^* p + K_{и}^*)g}{T_{n_y}^2 p^5 + 2\xi_{n_y} T_{n_y} p^4 + p^3 + gK_{V_y}^* p^2 + gK_{\Delta H}^* p + gK_{и}^*}. \quad (9)$$

Ясно, что коэффициенты обратных связей $K_{V_y}^*$, $K_{\Delta H}^*$, $K_{и}^*$ должны быть отличными от исходных параметров K_{V_y} , $K_{\Delta H}$, $K_{и}$, определяемых по формулам (6). Рассмотрим вариант сохранения этих параметров в виде: $K_{V_y}^* = K_{V_y}$, $K_{\Delta H}^* = K_{\Delta H}$, $K_{и}^* = K_{и}$. Тогда их влияние на качество переходного процесса будет зависеть от желаемых постоянных времени T_H , $T_{и}$.

В реальных системах различие между желаемыми постоянными времени траекторного контура и постоянными времени контура отработки перегрузки составляет 6-10 раз. При таких выбранных желаемых параметрах, переходные процессы для систем (7) и (9) не будут сильно отличаться в смысле быстроты действия и устойчивости. Это можно показать, рассмотрев распределение корней в системах (7) и (9). Для параметров контура

$$T_H = 6 \text{ с}, \quad T_{и} = 8 \text{ с}, \quad \xi_H = 0,707 \text{ с}, \quad T_{n_y} = 1 \text{ с}, \quad \xi_{n_y} = 0,7 \text{ с} \quad (10)$$

комплексно-сопряженные пары корней будут равны:

$$\begin{aligned} p_{(7)}(6,8) &= -0,117 \pm 0,117j \quad \text{для системы (7),} \\ p_{(9)}^{\text{TP}}(6,8) &= -0,141 \pm 0,06j \quad \text{для системы (9).} \end{aligned} \quad (11)$$

Следует принять во внимание, что в системе (9) комплексно-сопряженная пара $p_{(9)}^{*tr}$ (11) траекторного контура не является единственным комплексно-сопряженным корнем, однако, именно указанная «траекторная» пара корней является наиболее значимой в смысле оценки качества переходного процесса, ввиду ее наиболее близкого расположения к мнимой оси [4]. Согласно выражениям:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (12)$$

можно рассчитать постоянные времени и относительный коэффициент затухания для выбранной пары корней. Для системы пятого порядка (9) можем оценить значения постоянной времени и относительного коэффициента затухания для траекторного контура по комплексно сопряженной паре $p_{(9)}^{*tr}$ (6,8), получим значения $T_{tr} = 6,4371$, $\xi_{tr} = 0,9205$, что близко к исходным $T_H = 6$ с, $\xi_H = 0,707$. Другой комплексно сопряженной паре $p_{(9)}^{ny}$ (6,8) $= -0,362 \pm 0,495j$ соответствует колебательное звено (8), тогда, согласно (12), получим значения $\tilde{T}_{ny} = 1,63$ и $\tilde{\xi}_{ny} = 0,59$ и сравним с исходными параметрами звена отработки перегрузки $T_{ny} = 1$ с и $\xi_{ny} = 0,7$. Составляющая углового движения по перегрузке замедляется и становится более колебательной, тогда параметры траекторного контура практически не изменяются. Фактически внедрение динамического звена отработки перегрузки в систему управления (6) при выбранных параметрах (10) не оказывает влияния на качество управления.

Выбирая более «быстрые» постоянные времени, например:

$$T_H = 3 \text{ с}, \quad T_{ny} = 4 \text{ с} \quad (13)$$

решим задачу увеличения быстродействия систем управления, не изменяя при этом коэффициентов обратных связей, то есть так же, как и в варианте, рассмотренном выше $K_{Vy}^* = K_{Vy}$, $K_{\Delta H}^* = K_{\Delta H}$, $K_{ny}^* = K_{ny}$, покажем, что в таком случае может произойти ухудшение характеристик устойчивости контура. Сравнивая только лишь «медленные» траекторные корни с минимальной действительной частью системы пятого порядка (9) $p_{(9)}^{*tr}$ (3,4) $= -0,0173 \pm 0,688j$ с комплексно-сопряженной парой идеальной системы (7) $p_{(7)}$ (3,4) $= -0,233 \pm 0,238j$, можно говорить о значительном ухудшении устойчивости системы управления. Постоянная времени

и относительный коэффициент затухания траекторного контура системы (9) согласно (12) $T_{полн} = 1,45$ с, $\xi_{полн} = 0,025$, что однозначно говорит о неприемлемой колебательности в системе.

Исходя из вышесказанного, будем решать задачу определения некоторой области желаемых параметров, при которых станет возможным увеличение быстродействия системы управления с одновременным сохранением ее устойчивости. Это возможно достичь путем такого перераспределения корней характеристического полинома системы (9), при котором наиболее медленные корни, определяющие основной характер переходного процесса, должны стремиться к значениям соответствующих корней, достигнутым для идеальной системы (6).

Вернемся к условию неравенства коэффициентов K_{Vy}^* , $K_{\Delta H}^*$, K_{ny}^* исходным параметрам K_{Vy} , $K_{\Delta H}$, K_{ny} и найдем их значения. Для этого будем применять подход, основанный на теории делимости многочленов [5]. В основе предложенного подхода лежит идея разложения полинома n -го порядка на произведение нескольких сомножителей первого и второго порядков.

Характеристический полином передаточной функции (9):

$$T_{ny}^2 p^5 + 2\xi_{ny} T_{ny} p^4 + p^3 + gK_{Vy}^* p^2 + gK_{\Delta H}^* p + gK_{ny}^*. \quad (14)$$

разложим на полином третьего порядка системы (7), т. е. на знаменатель передаточной функции системы (7), описывающий траекторную составляющую движения в системе (9):

$$p^3 + gK_{Vy} p^2 + gK_{\Delta H} p + gK_{ny} \quad (15)$$

и неизвестный полином второго порядка, который описывает поведение контура отработки перегрузки в полученной системе с перераспределенными корнями. Важно, что такая процедура деления должна быть выполнена без остатка. При этом корни полинома (15) также будут и корнями полинома (14). Тогда обеспечим выполнение условия равенства нулю полинома остатка от деления и найдем искомые коэффициенты обратных связей. Тогда необходимо выполнять условие равенства нулю полинома остатка от деления — искомое условие для нахождения коэффициентов обратных связей.

Для полинома (14) полином остатка от деления — полином второго порядка. Положим три коэффициента полинома остатка от деления равными нулю.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - gK_{\Delta H} T_{ny}^2 - (2\xi_{ny} T_{ny} - gK_{Vy} T_{ny}^2) gK_{Vy} - \frac{K_i^*}{K_n} = 0, \\ gK_{Vy}^* - gK_i T_{ny}^2 - gK_{\Delta H} (2\xi_{ny} T_{ny} - gK_{Vy} T_{ny}^2) - gK_{Vy} \frac{K_i^*}{K_n} = 0, \\ gK_{\Delta H}^* - gK_i (2\xi_{ny} T_{ny} - gK_{Vy} T_{ny}^2) - gK_{\Delta H} \frac{K_i^*}{K_n} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решая систему уравнений (16), получим выражения для расчета искомых коэффициентов K_{Vy}^* , $K_{\Delta H}^*$, K_i^* :

$$\begin{cases} K_i^* = A \cdot K_i, \\ K_{\Delta H}^* = A \cdot K_{\Delta H} + B \cdot K_i, \\ K_{Vy}^* = A \cdot K_{Vy} + B \cdot K_{\Delta H} + T_{ny}^2 K_i, \\ A = 1 - gK_{\Delta H} T_{ny}^2 - (2\xi_{ny} T_{ny} - gK_{Vy} T_{ny}^2) gK_{Vy}, \\ B = 2\xi_{ny} T_{ny} - gK_{Vy} T_{ny}^2. \end{cases} \quad (17)$$

Покажем результат разложения полинома (14) по правилу деления с нулевым остатком:

$$\left(p^3 + gK_{Vy} p^2 + gK_{\Delta H} p + gK_i \right) \cdot \left[T_{ny}^2 p^2 + (2\xi_{ny} T_{ny} - gK_{Vy} T_{ny}^2) p + \frac{K_i^*}{K_n} \right]. \quad (18)$$

Проанализируем распределение корней полинома (18). Формально все коэффициенты полинома (18) зависят только от постоянных времени идеального контура T_H и T_i , а параметры ξ_H, T_{ny}, ξ_{ny} можно считать постоянными согласно (10). Тогда, задавая только T_H и T_i , можно получить реальные значения всех коэффициентов полинома.

Полином второго порядка, который описывает траекторную составляющую движения в контуре (9), представим в виде стандартного колебательного звена второго порядка для оценки «деформированных» постоянной времени звена и относительного коэффициента затухания T_{ny}^* и ξ_{ny}^* :

$$\begin{aligned} & (T_{ny}^*)^2 \cdot p^2 + 2\xi_{ny}^* T_{ny}^* p + 1, \\ & T_{ny}^* = T_{ny} \sqrt{\frac{K_n}{K_i^*}}, \quad \xi_{ny}^* = \left(\xi_{ny} - 0,5gK_{Vy} T_{ny} \right) \cdot \sqrt{\frac{K_n}{K_i^*}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Параметры контура обработки перегрузки T_{ny}^* и ξ_{ny}^* в контуре с перераспределенными корнями будут определять характер переходного процесса в зависимости от расположения корней контура обработки перегрузки на комплексной плоскости. Поэтому для этих параметров как функций двух аргументов T_H и T_i , определим область, для которой при заданном относительном коэффициенте затухания можно будет выбрать желаемые параметры T_H и T_i , определяющие быстродействие контура.

При этом важно помнить о том, что характер переходных процессов в системе определяется корнем или парой корней, имеющих минимальную вещественную часть, поэтому после выбора желаемых постоянных времени, обеспечивающих заданные быстродействие и устойчивость, необходимо анализировать расположение корней на комплексной плоскости.

При построении областей желаемых характеристик будут накладываться ограничения на область определения функций:

$$K_{Vy}^* > 0, \quad K_{\Delta H}^* > 0, \quad K_i^* > 0, \quad T_{ny}^* > 0, \quad \xi_{ny}^* \in (0;1). \quad (20)$$

Кроме того, сузим диапазон значений ξ_{ny}^* до интервала значений относительного коэффициента затухания $[0,4;0,7]$, допустимых на практике. Условное графическое представление зависимостей $\xi_{ny}^*(T_H, T_i)$ и $T_{ny}^*(T_H, T_i)$ с учетом вышеуказанных ограничений приведено на рис. 3 и 4:

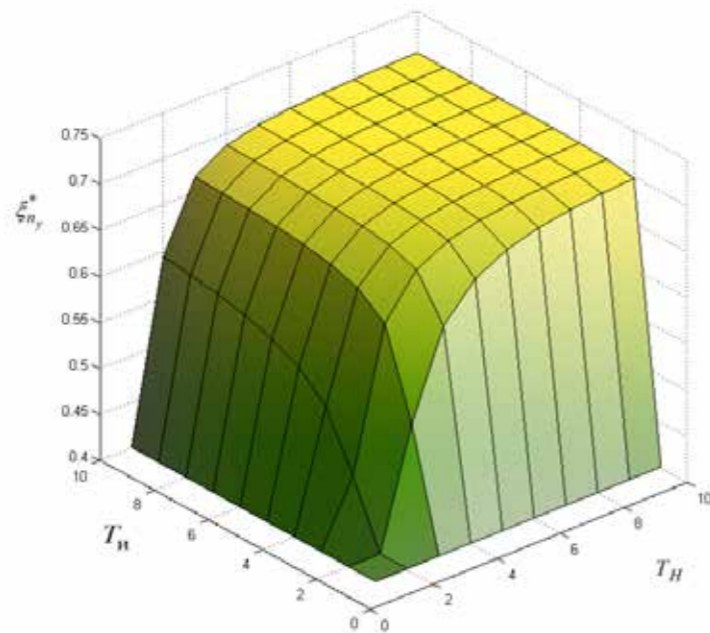


Рис. 3. Графическое представление зависимости $\xi_{ny}^*(T_H, T_и)$

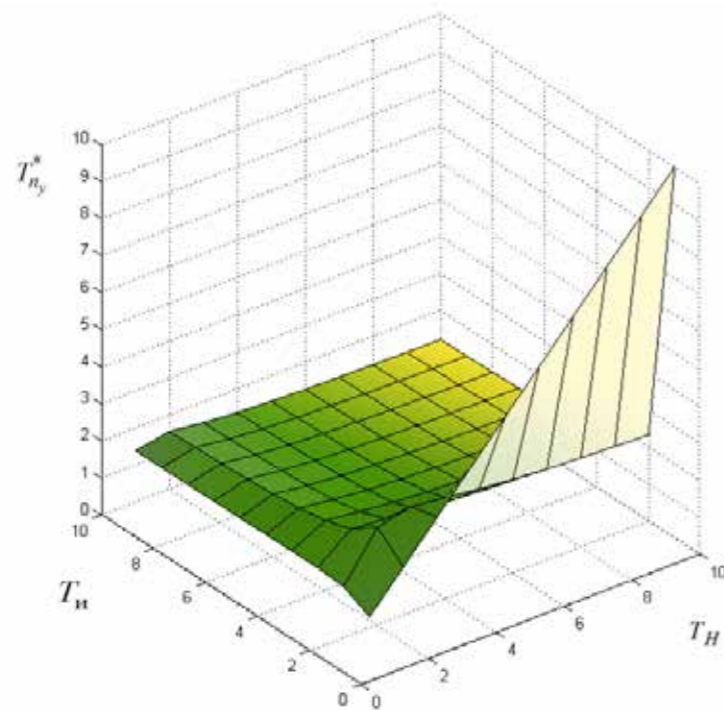


Рис. 4. Графическое представление зависимости $T_{ny}^*(T_H, T_и)$

Для уже рассмотренного варианта постоянных времени идеального контура (13) — $T_H = 3$ с и $T_и = 4$ с, найдем корни характеристического полинома (18). Пара комплексно-сопряженных корней контура перегрузки — $p_{(9)}^{ny*}(3,4) = -0,335 \pm 0,38j$. Пара комплексно-сопряженных корней, определяющих траекторное движение $p_{(9)}^{tp*}(3,4) = -0,244 \pm 0,245j$. Корень интегральной составляющей — $p_{(9)}^i(3,4) = -0,255$. Здесь видно, что пара корней контура отработки перегрузки расположена левее пары корней траекторного контура:

$$\operatorname{Re} \left| p_{(9)}^{tp*}(3,4) \right| < \operatorname{Re} \left| p_{(9)}^{ny*}(3,4) \right|. \quad (21)$$

Из этого следует, что наибольшее влияние на характер переходного процесса будет оказывать пара траекторных корней. Это говорит о том, что система, характер переходных процессов в которой во многом определяется именно этой «доминирующей» парой корней, фактически будет демонстрировать поведение, схожее с поведением идеальной системы. Действительно, получаем:

$$\begin{aligned} p_{(7)}(3,4) &= -0,233 \pm 0,238j, \\ p_{(9)}^{tp*}(3,4) &= -0,244 \pm 0,245j. \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянная времени траекторного контура и относительный коэффициент затухания (без учета интегральной составляющей) равны $T_{tp}^* = 2,89$ с и $\xi_{tp}^* = 0,707$.

Параметры контура отработки перегрузки согласно (19) для значений $T_H = 3$ с и $T_и = 4$ с равны $T_{ny}^* = 1,88$ с и $\xi_{ny}^* = 0,643$.

Покажем, возможно ли дальнейшее увеличение быстродействия системы. Рассмотрим поведение системы при постоянных времени $T_H = 2$ с и $T_и = 3$ с. Пара корней траекторного контура по-прежнему будет близка к «идеальным» значениям:

$$\begin{aligned} p_{(7)}(2,3) &= -0,35 \pm 0,357j, \\ p_{(9)}^{tp*}(2,3) &= -0,356 \pm 0,329j, \end{aligned} \quad (23)$$

как и постоянная времени, и относительный коэффициент затухания траекторного контура будут близки к идеальным $T_{tp}^* = 2,06$ с и $\xi_{tp}^* = 0,734$, однако эта пара больше не является «доминирующей».

Происходит смещение корней контура обработки перегрузки влево к мнимой оси. Комплексно-сопряженная пара контура перегрузки составляет $p_{(0)}^{n_y}(2,3) = -0,179 \pm 0,331j$, относительный коэффициент затухания равен $\xi_{n_y}^*(2,3) = 0,48$, что будет приводить к перерегулированию по перегрузке 18,3% входного сигнала. Из графика зависимости $\xi_{n_y}^*(T_H, T_{ин})$ видно, что при уменьшении значений постоянных времени ниже, чем $T_H = 3$ с, $T_{ин} = 4$ с происходит резкое «падение» относительного коэффициента затухания $\xi_{n_y}^*$. За граничное допустимое значение коэффициента относительного затухания $\xi_{n_y}^*$ целесообразно принять величину, равную $\xi_{n_y \text{ доп.}}^* = 0,5$.

Таким образом, найдена аналитическая область определения желаемых постоянных времени контура управления, обеспечивающая заданное быстродействие при сохранении устойчивости системы.

Литература

1. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели, 1987. – 304 с.
2. Аязян Г. К., Новоженин А. Ю., Таушева Е. В. Параметрический синтез ПИД-регуляторов на заданную степень колебательности. Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). – М.: изд-во ИПУ РАН, с. 147-159.
3. Куликов В. Е. Аналитический синтез демпфера тангажа с использованием аэродинамических параметров линеаризованных силовых уравнений продольного движения самолета. // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. Вып. 10, 2015, с. 2-19.
4. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, 9-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 431 с.

**Правила оформления материалов,
направляемых для опубликования в журнале
«Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами»**

- Для опубликования в журнале принимаются статьи объемом до 30 с., а также краткие сообщения объемом до 5 стр.
- Статья должна иметь аннотацию не более 600 знаков, ключевые слова.
- На первой странице должны быть указаны: фамилии и инициалы авторов, полное название текста статьи без сокращений, проставлен индекс УДК.
- Материалы должны быть подготовлены в формате *.doc, лист А4, ориентация книжная (вертикальное расположение), шрифт Times New Roman, размер шрифта 12, интервал между строками одинарный, поля (мм): верхнее 22, нижнее 50, левое 30, правое 28, расположение страниц зеркальное. Установить «Автоматическую расстановку переносов». Переносы вручную не ставить.
- Формат формул в MathType или Microsoft Equation: Define Sizes, Full 12 pt, Subscript/Superscript 7 pt, Sub-Subscript/Superscript 5 pt, Symbol 18 pt, Sub-Symbol 12 pt.
- Иллюстрированный материал представляется в формате *.jpg, *.bmp, *.png (разрешение не менее 300 точек на дюйм) или в виде рисунка Word, фрагменты которого объединены в единый объект. Цветные иллюстрации приветствуются.
- В конце текста указывается информация о каждом авторе: Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, полное название и почтовый адрес организации, должность, контактные телефоны (служебный, мобильный или домашний), адрес электронной почты.
- В редакцию предоставляется электронный носитель с текстом статьи и ее распечатка в двух экземплярах, подписанная всеми авторами.
- К статье прилагается экспертное заключение о возможности ее открытой публикации, рецензия, лицензионный договор.
- Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Содержание

О. Н. Корсун, П. А. Мотлич Алгоритмы комплексной обработки бортовых измерений, основанные на взаимосвязи между линейными и угловыми параметрами движения летательного аппарата.....	2
Ю. Б. Кулифеев, В. Е. Куликов Формирование пространственной математической модели воздействий атмосферной турбулентности на полет летательного аппарата.....	13
С. А. Черенков, А. А. Худяков О перспективных астрокорректорах астроинерциальных навигационных систем.....	35
В. Л. Федотов Интеграция модульных решений в архитектуру имитаторов стендовых комплексов.....	43
А. С. Юрченко Определение области желаемых параметров контура стабилизации высоты полета самолета.....	49